6.

Jde o rovnici

$$\left(1 + y^2 \sin 2x\right) + \left(-2y \cos^2 x\right) y' = 0.$$

Označme

$$M(x,y) = 1 + y^2 \sin 2x, \qquad N(x,y) = -2y \cos^2 x.$$

Protože na jednoduše souvislé oblasti $\mathbf{R}^2$ platí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \sin 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y \cdot 2\cos x \sin x = 2y \sin 2x, \qquad \text{tj.} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\,,$$

je daná diferenciální rovnice na $\mathbf{R}^2$ exaktní.

Hledejme její potenciál V:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = M(x,y) = 1 + y^2 \sin 2x \implies V(x,y) = \int \left(1 + y^2 \sin 2x\right) \mathrm{d}x = x - \tfrac{1}{2} y^2 \cos 2x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -y \cos 2x + \varphi'(y) = -y\left(2\cos^2 x - 1\right) + \varphi'(y) = -2y\cos^2 x + y + \varphi'(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = N(x,y) \iff y + \varphi'(y) = 0 \iff \varphi'(y) = -y \iff \varphi(y) = -\tfrac{1}{2} y^2 + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

$$\begin{aligned} V(x,y) &= x - \tfrac{1}{2} y^2 \cos 2x - \tfrac{1}{2} y^2 + C = x - \tfrac{1}{2} y^2 (\cos 2x + 1) + C = \\ &= x - \tfrac{1}{2} y^2 \left(\cos^2 x - \sin^2 x + 1\right) + C = x - y^2 \cos^2 x + C, \quad C \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Obecné řešení dané diferenciální rovnice:

$$x - y^2 \cos^2 x + C = 0, \quad C \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Dosadíme-li do (1) počáteční podmínku $y\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) = -1$, vypočteme postupně:

$$\tfrac{1}{4}\pi - (-1)^2 \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + C = 0 \implies C = \tfrac{1}{4}(2 - \pi)$$

$$x - y^2 \cos^2 x + \tfrac{1}{4}(2 - \pi) = 0$$

$$y^2 = \frac{4x + 2 - \pi}{4\cos^2 x}$$

$$y = -\frac{\sqrt{4x + 2 - \pi}}{2\cos x} \tag{2}$$

Znaménko minus v explicitním vyjádření (2) hledaného partikulárního řešení dané diferenciální rovnice je proto, že toto řešení má mít v bodě $\tfrac{1}{4}\pi$ zápornou hodnotu -1.