

Řešení vzorové písemky z MA01

Poznámky:

1. Řešení úloh ze vzorové písemky jsou formulována dosti podrobně (podobným způsobem jako u řešených příkladů ve skriptech). U zkoušky lze jednotlivé kroky postupu komentovat stručněji.
2. V řadě případů lze postupovat i jiným způsobem, než jak je uvedeno ve vzorových řešeních.

Řešení vzorové písemky z MA01 – příklad 1

1. Je dána funkce

$$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x-2}{x}.$$

- 4 b. a) Vypočtete limity: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x)$. Určete všechny asymptoty grafu funkce f .
- 4 b. b) Najděte všechny body grafu funkce f , v nichž je tečna grafu kolmá k přímce o rovnici $5x - y + 3 = 0$.
- 5 b. c) Určete všechny maximální intervaly, na nichž je f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, a všechny inflexní body grafu funkce f .

Řešení.

a) Zřejmě $Df = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Protože

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{x-2}{x} = \frac{-2}{+0} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{x-2}{x} = \frac{-2}{-0} = +\infty,$$

dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \operatorname{arccotg} 1 = \frac{1}{4}\pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} z = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} z = 0.$$

Ze spojitosti funkce f a z hodnot vypočtených limit vyplývá, že jedinou asymptotou grafu funkce f je přímka

$$y = \frac{1}{4}\pi \quad \text{pro } x \rightarrow +\infty \text{ i pro } x \rightarrow -\infty.$$

[Přímka $x = 0$ není asymptotou grafu funkce f , neboť obě jednostranné limity funkce f v bodě 0 jsou vlastní.]

b) Rovnici dané přímky (označme ji p) lze psát ve tvaru $y = 5x + 3$, tudíž má směrnici $k_p = 5$. Tečna t grafu funkce f má být kolmá k přímce p , tedy pro její směrnici k_t platí $k_p \cdot k_t = -1$; odtud $k_t = -\frac{1}{5}$.

Označme $T = [\bar{x}, f(\bar{x})]$ hledaný bod dotyku. Pak $k_t = f'(\bar{x})$, a tedy hledáme všechna čísla $\bar{x} \in Df$, pro něž $f'(\bar{x}) = -\frac{1}{5}$. Vypočteme

$$f'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{x-2}{x}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot x - (x-2) \cdot 1}{x^2} = -\frac{2}{x^2 + (x-2)^2} = -\frac{1}{x^2 - 2x + 2}, \quad x \in Df;$$

pak

$$-\frac{1}{\bar{x}^2 - 2\bar{x} + 2} = -\frac{1}{5} \iff \bar{x}^2 - 2\bar{x} - 3 = 0 \iff \bar{x} = -1 \vee \bar{x} = 3.$$

Body grafu funkce f s požadovanou vlastností jsou dva:

$$T_1 = [-1, \operatorname{arccotg} 3], \quad T_2 = [3, \operatorname{arccotg} \frac{1}{3}].$$

c) Vypočteme

$$f''(x) = [-(x^2 - 2x + 2)^{-1}]' = -(-1)(x^2 - 2x + 2)^{-2} \cdot (2x - 2) = \frac{2(x-1)}{(x^2 - 2x + 2)^2}, \quad x \in Df.$$

Platí

$$f''(x) = 0 \iff x = 1.$$

Znaménko čísla $f''(x)$ pro každé $x \in Df = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ zapíšeme do tabulky:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	-	0	+

Odtud a z toho, že funkce f je spojitá v bodě 1, plyne:

f je ryze konvexní na intervalu $\langle 1, +\infty \rangle$,

f je ryze konkávní na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, 1)$.

Inflexním bodem grafu funkce f je bod

$$[1, f(1)] = [1, \operatorname{arccotg}(-1)] = [1, \frac{3}{4}\pi].$$

Řešení vzorové písemky z MA01 – příklad 2

2. Je dána množina \mathcal{M} všech pětiúhelníků daného obvodu 1 m, které jsou sjednocením obdélníku a rovnostranného trojúhelníku, přičemž obdélník a trojúhelník mají jednu společnou stranu.

5 b. a) Najděte funkci S proměnné a , která vyjadřuje závislost obsahu pětiúhelníku z množiny \mathcal{M} (v m^2) na délce a strany příslušného trojúhelníku (v metrech).

2 b. b) Určete definiční obor DS a vypočtěte derivaci S' funkce S .

5 b. c) Najděte bod $a_0 \in DS$, v němž má funkce S globální maximum. Ověřte, že jde opravdu o globální maximum. Určete oba rozměry obdélníkové části pětiúhelníku z množiny \mathcal{M} , který má maximální obsah.

Řešení.

a) Pětiúhelník z množiny \mathcal{M} je sjednocením obdélníku o rozměrech a, b (v metrech) a rovnostranného trojúhelníku o straně délky a . Veličiny a, b jsou na sobě vzájemně závislé, neboť pro obvod o pětiúhelníku platí

$$o = 3a + 2b = 1. \quad (1)$$

Obdélník má obsah

$$S_1 = ab,$$

rovnostranný trojúhelník má obsah

$$S_2 = \frac{1}{2} a \cdot a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

a obsah pětiúhelníku je

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{4} [4ab + \sqrt{3} a^2]. \quad (2)$$

Hledanou funkci S získáme tak, že z (1) vyjádříme

$$b = \frac{1}{2}(1 - 3a) \quad (3)$$

a toto vyjádření dosadíme do (2):

$$S(a) = \frac{1}{4} [2a(1 - 3a) + \sqrt{3} a^2] = \frac{1}{4} [2a - (6 - \sqrt{3})a^2].$$

b) Definiční obor DS funkce S určíme z podmínek $a > 0, b > 0$. Podle (3) je

$$a > 0 \wedge b = \frac{1}{2}(1 - 3a) > 0 \iff 0 < a < \frac{1}{3},$$

a tedy

$$DS = (0, \frac{1}{3}).$$

Vypočteme

$$S'(a) = \frac{1}{4} [2 - (6 - \sqrt{3}) \cdot 2a] = \frac{1}{2} [1 - (6 - \sqrt{3})a], \quad a \in DS.$$

c) Vypočteme

$$S'(a) = 0 \iff a = a_0 = \frac{1}{6 - \sqrt{3}}.$$

Protože $1 < \sqrt{3} < 2$, je

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{6 - 1} < a_0 = \frac{1}{6 - \sqrt{3}} < \frac{1}{6 - 2} = \frac{1}{4},$$

a tedy vypočtené číslo a_0 je prvkem intervalu $(\frac{1}{5}, \frac{1}{4})$, neboli i intervalu $DS = (0, \frac{1}{3})$.

Znaménko čísla $S'(a)$ pro každé $a \in DS = (0, \frac{1}{3})$ zapíšeme do tabulky:

a	$(0, a_0)$	a_0	$(a_0, \frac{1}{3})$
$S'(a)$	+	0	-

Odtud vyplývá, že funkce S je rostoucí na intervalu $(0, a_0)$ a klesající na intervalu $\langle a_0, \frac{1}{3} \rangle$, a proto má v bodě a_0 globální maximum.

Rozměry obdélníkové části pětiúhelníku z množiny \mathcal{M} , který má maximální obsah, jsou (v metrech)

$$a_0 = \frac{1}{6 - \sqrt{3}} = \frac{6 + \sqrt{3}}{33}, \quad b_0 = \frac{1 - 3a_0}{2} = \frac{5 - \sqrt{3}}{22}.$$

Řešení vzorové písemky z MA01 – příklad 3

3. Necht' $\lambda \in \mathbf{R}$ je parametr. Jsou dány vektory

$$\mathbf{u}_1 = (1, -1, 4), \quad \mathbf{u}_2 = (1, \lambda, -6), \quad \mathbf{u}_3 = (6, 9, \lambda), \quad \mathbf{v} = (3, 7, 2).$$

- 5 b. a) Najděte množinu M všech hodnot parametru λ , pro něž je tříčlenná skupina vektorů $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ bází vektorového prostoru \mathbf{R}^3 .
- 3 b. b) Pro $\lambda = 9$ vyjádřete vektor \mathbf{v} jako lineární kombinaci dvojčlenné skupiny $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$.
- 5 b. c) Najděte všechny hodnoty parametru λ , pro něž vektor \mathbf{v} není lineární kombinací tříčlenné skupiny $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$.

Řešení.

a) Vypočteme

$$\begin{vmatrix} 1, & -1, & 4 \\ 1, & \lambda, & -6 \\ 6, & 9, & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 36 + 36 - 24\lambda + 54 + \lambda = \lambda^2 - 23\lambda + 126 = (\lambda - 9)(\lambda - 14).$$

Protože $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, tříčlenná skupina $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ je bází vektorového prostoru \mathbf{R}^3 , právě když je lineárně nezávislá; to nastane, právě když je determinant nenulový, tj. právě když $\lambda \neq 9 \wedge \lambda \neq 14$. Tedy

$$M = \mathbf{R} \setminus \{9, 14\}.$$

b) Necht' $\lambda = 9$, tj. $\mathbf{u}_2 = (1, 9, -6)$. Hledáme čísla $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}.$$

Tato vektorová rovnice je ekvivalentní se soustavou tří lineárních rovnic s neznámými α_1, α_2 . V rozšířené matici této soustavy jsou složky vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}$ zapsány ve sloupcích; dostaneme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1, & 1 & 3 \\ -1, & 9 & 7 \\ 4, & -6 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1, & 1 & 3 \\ 0, & 10 & 10 \\ 0, & -10 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1, & 1 & 3 \\ 0, & 10 & 10 \end{array} \right).$$

Soustava

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 3 \\ 10\alpha_2 &= 10 \end{aligned}$$

má řešení $\alpha_2 = 1, \alpha_1 = 2$. Tedy

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2.$$

c) Z a) víme, že pro $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{9, 14\}$ je tříčlenná skupina $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ bází vektorového prostoru \mathbf{R}^3 , a tedy libovolný vektor z \mathbf{R}^3 je lineární kombinací báze.

Z b) víme, že pro $\lambda = 9$ je daný vektor \mathbf{v} lineární kombinací dvojčlenné skupiny $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$, a tedy i tříčlenné skupiny $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ (např. $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3$).

Necht' $\lambda = 14$, tj. $\mathbf{u}_2 = (1, 14, -6), \mathbf{u}_3 = (6, 9, 14)$. Vektor \mathbf{v} je lineární kombinací tříčlenné skupiny $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$, právě když existují čísla $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbf{R}$ taková, že $\beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \beta_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}$. Tato vektorová rovnice je ekvivalentní se soustavou tří lineárních rovnic s neznámými $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Pro rozšířenou matici této soustavy dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 6 & 3 \\ -1, & 14, & 9 & 7 \\ 4, & -6, & 14 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 6 & 3 \\ 0, & 15, & 15 & 10 \\ 0, & -10, & -10 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 1, & 6 & 3 \\ 0, & 15, & 15 & 10 \\ 0, & 0, & 0 & -10 \end{array} \right).$$

Protože matice soustavy má hodnotu $h = 2$, zatímco rozšířená matice soustavy má hodnotu $h' = 3$, soustava nemá řešení, a tedy pro $\lambda = 14$ vektor \mathbf{v} není lineární kombinací skupiny $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$.

Závěr: Vektor \mathbf{v} není lineární kombinací skupiny $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$, právě když

$$\lambda = 14.$$

Řešení vzorové písemky z MA01 – příklad 4

4. V prostoru jsou dány body

$$A = [1, 1, -3], \quad B = [-2, 0, 1], \quad C = [3, 4, -1], \quad D = [8, 3, 5].$$

4 b. a) Určete vzájemnou polohu přímky p procházející body A, B a přímky q procházející body C, D .

4 b. b) Vypočtete obsah trojúhelníku ABC .

4 b. c) Najděte bod D' souměrně sdružený s bodem D podle roviny ϱ procházející body A, B, C .

Řešení.

a) Směrový vektor přímky p je (např.) vektor $\mathbf{u} = B - A = (-3, -1, 4)$, směrový vektor přímky q je (např.) vektor $\mathbf{v} = D - C = (5, -1, 6)$. Protože dvojice vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} je lineárně nezávislá, přímky p, q jsou buď různoběžné, nebo mimoběžné.

Označme $\mathbf{w} = C - A = (2, 3, 2)$. Je-li trojice $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ lineárně závislá, jsou přímky p, q různoběžné, v opačném případě jsou mimoběžné.

O lineární závislosti, popř. nezávislosti trojice vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ rozhodneme např. výpočtem determinantu:

$$\begin{vmatrix} -3, & -1, & 4 \\ 5, & -1, & 6 \\ 2, & 3, & 2 \end{vmatrix} = 6 + 60 - 12 + 8 + 54 + 10 = 126.$$

Protože tento determinant je nenulový, trojice $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ je lineárně nezávislá, a tedy přímky p, q jsou mimoběžné.

b) Pro obsah S trojúhelníku ABC platí

$$S = \frac{1}{2} |(B - A) \times (C - A)| = \frac{1}{2} |\mathbf{u} \times \mathbf{w}|.$$

Vypočteme

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \left(\begin{vmatrix} -1, & 4 \\ 3, & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -3, & 4 \\ 2, & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3, & -1 \\ 2, & 3 \end{vmatrix} \right) = (-14, 14, -7) = -7(2, -2, 1).$$

Odtud

$$S = \frac{1}{2} |-7(2, -2, 1)| = \frac{1}{2} \cdot |-7| \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = \frac{21}{2}.$$

c) Protože vektor $\mathbf{n}_\varrho = (2, -2, 1)$ je normálový vektor roviny ϱ , lze obecnou rovnici této roviny psát ve tvaru $2x - 2y + z + d = 0$; dosadíme-li do ní souřadnice (např.) bodu B , dostaneme $d = 3$. Obecná rovnice roviny ϱ tedy je

$$2x - 2y + z + 3 = 0.$$

Hledejme nejprve kolmý průmět R bodu D do roviny ϱ . Přímka r procházející bodem D a kolmá k rovině ϱ má vektorovou rovnici

$$X = [8, 3, 5] + t(2, -2, 1).$$

Průsečíkem přímky r s rovinou ϱ je hledaný bod $R = [8 + 2t, 3 - 2t, 5 + t]$, kde t je řešením rovnice

$$2(8 + 2t) - 2(3 - 2t) + (5 + t) + 3 = 0,$$

po úpravě $9t + 18 = 0$, a tedy $t = -2$. Odtud

$$R = [4, 7, 3].$$

Pro bod D' souměrně sdružený s bodem D podle roviny ϱ platí

$$D' = R + (R - D) = [4, 7, 3] + (-4, 4, -2) = [0, 11, 1].$$