

OFICIÁLNÍ TAHÁK

(pomůcka k předmětu MA 2 na FSv ČVUT)

„Tahák“ neobsahuje vysvětlení, co písmena v jednotlivých vzorcích znamenají a za jakých okolností lze tyto vzorce použít. Předpokládáme, že to vše studenti vědí.

A. Některé důležité vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

B. Základní integrály

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C \quad (k \neq 0)$$

C. Některé speciální integrály

$$\int R \left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx \dots\dots \text{substitute: } t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$\int R \left(x, \sqrt{a^2 - x^2} \right) dx \dots\dots \text{substitute: } x = a \sin t \quad \left(\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, \quad t \in \left\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right\rangle \right)$$

$$\int R \left(x, \sqrt{x^2 + a^2} \right) dx \dots\dots \text{substitute: } x = a \operatorname{tg} t \quad \left(\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t}, \quad t \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi \right) \right)$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx \dots \text{substitute: } \begin{cases} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \left(\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \right) \\ t = \sin x \\ t = \cos x \\ t = \operatorname{tg} x & \left(\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \right) \end{cases}$$

D. Aplikace určitého integrálu v geometrii a ve fyzice

$$\text{Objem rotačního tělesa} \dots\dots\dots V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \quad V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

$$\text{Délka grafu funkce} \dots\dots\dots s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$\text{Statické momenty křivočarého lichoběžníka} \dots\dots\dots S_x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx, \quad S_y = \int_a^b x f(x) dx$$

$$\text{Těžiště křivočarého lichoběžníka} \dots\dots\dots T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m} \right], \quad \text{kde } m = \int_a^b f(x) dx$$
