(10 bodů) **1.** Vypočtěte
$$\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \ \mathrm{d}x.$$

1.

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \ \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x\right]_0^{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$u' = x, \qquad v = \operatorname{arctg} x$$

$$u = \frac{x^2}{2}, \qquad v' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 1 - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\left[x - \operatorname{arctg} x\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(10 bodů) **2.** Najděte globální extrémy funkce

$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}-x+y$$

na množině

$$M=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ y\leqq 0\ \wedge\ x^2+y^2\leqq 2x\}.$$

---

a) Najdeme stacionární body funkce:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x-1\Longrightarrow x-1=0\Longrightarrow x=1,\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=1\neq 0,$$

tj. stacionární body neexistují.

b) Najdeme body, ve kterých by mohly být vázané extrémy na hranici oblasti.

Nejdříve na půlkružnici $x^2+y^2=2x,\ y\leqq 0$.

Sestrojíme Lagrangeovu funci $\Phi(x,y)=\dfrac{x^2}{2}-x+y+\lambda(x^2+y^2-2x)$. Odtud

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}=x-1+\lambda(2x-2)=(x-1)(1+2\lambda)=0\Longrightarrow x=1\ \vee\lambda=-\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}=1+2\lambda y=0\Longrightarrow y=-\frac{1}{2\lambda}.$$

Pokud $x=1$ pak, dosazením za $x=1$ do podmínky $x^2+y^2=2x$ dostaneme $y^2=1$ a odtud za podmínky $y\leqq 0$ je $y=-1$. Bod $\boldsymbol{c}_1=(1,-1)$ je první podezřelý bod.

Pokud $\lambda=-\frac{1}{2}$, pak dosasazením do $y=-\dfrac{1}{2\lambda}$ dostaneme $y=1$ a neni splněna podmínka $y\leqq 0$.

Pro nalezení podezřelých bodů na úsečce $y=0,\ x\in\langle 0,2\rangle$ si definujme funkci $g(x)=f(x,0)=\frac{1}{2}x^2-x,\ x\in\langle 0,2\rangle$. Její derivací dostaneme

$$g'(x)=x-1\Longrightarrow x-1=0\Longrightarrow x=1,\ \text{tj. bod } \boldsymbol{c}_2=(1,0)\text{je další podezřelý bod.}$$

Poslední skupinou podezřelých bodů jsou singulární body hranice množiny M, tj. body $\boldsymbol{c}_3=(0,0)$, $\boldsymbol{c}_4=(2,0)$.

Potom

$$f(\boldsymbol{c}_1)=f(1,-1)=-\frac{3}{2},\ f(\boldsymbol{c}_2)=f(1,0)=-\frac{1}{2},\ f(\boldsymbol{c}_3)=f(0,0)=0,\ f(\boldsymbol{c}_4)=f(2,0)=0.$$

Funkce má globální minimum $f(\boldsymbol{c}_1)=-\dfrac{3}{2}$ a globální maximum $f(\boldsymbol{c}_3)=f(\boldsymbol{c}_4)=0$.

(10 bodů) **3.** Vyjádřete v explicitním tvaru řešení Cauchyovy úlohy

$$4yx\sin^2(x^2) = y', \qquad y(0) = 2.$$

Jedná se o diferenciální rovnici se separovatelnými proměnnými. Postupně dostáváme

$$4x\sin^2(x^2) = \frac{y'}{y} \Longrightarrow \int 4x\sin^2(x^2)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Užitím substituce $t = x^2$ dostaneme

$$2\int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \ln|y| \Longrightarrow \int (1-\cos 2t)\ \mathrm{d}t = \ln|y| \Longrightarrow t - \frac{\sin 2t}{2} = \ln|y| + \ln|c_1|.$$

Odtud

$$y = c_2 \mathrm{e}^{x^2 - \frac{\sin 2x^2}{2}},\ c_2 \neq 0.$$

Dosazením počáteční podmínky pak dostaneme

$$2 = c_2 \cdot \mathrm{e}^0 \Longrightarrow c = 2.$$

Odtud

$$\underline{\underline{y = 2\mathrm{e}^{x^2 - \frac{\sin 2x^2}{2}},\ x \in \mathbf{R}.}}$$