OFICIÁLNÍ TAHÁK

(pomůcka k předmětu MAR2 na FSv ČVUT)

„Tahák“ neobsahuje vysvětlení, co písmena v jednotlivých vzorcích znamenají a za jakých okolností lze tyto vzorce použít. To by studenti měli vědět.

A. Některé důležité vzorce pro goniometrické funkce

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

B. Základní integrály

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C \quad (a \neq 0) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| + C \quad (k \neq 0)$$

C. Některé speciální integrály

$$\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) \mathrm{d}x \;\ldots\ldots\; \text{substituce:} \quad t = \sqrt[s]{\frac{ax + b}{cx + d}}$$

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x \;\ldots\ldots\; \text{substituce:} \quad x = a \sin t \quad \left(\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t, \quad t \in \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi \rangle\right)$$

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) \mathrm{d}x \;\ldots\ldots\; \text{substituce:} \quad x = a \operatorname{tg} t \quad \left(\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t}, \quad t \in \left(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\right)\right)$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x \ldots \text{ substituce: } \begin{cases} t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} & \left(\sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1 + t^2}\right) \\ t = \sin x & \\ t = \cos x & \\ t = \operatorname{tg} x & \left(\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + t^2}, \quad \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}\right) \end{cases}$$

D. Aplikace určitého integrálu v geometrii a ve fyzice

Objem rotačního tělesa ………………………………… $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x, \quad V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\, \mathrm{d}x$

Délka grafu funkce ……………………………………… $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x$

Statické momenty křivočarého lichoběžníka ………. $S_x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x, \quad S_y = \int_a^b x f(x)\, \mathrm{d}x$

Těžiště křivočarého lichoběžníka ……………………. $T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right], \quad \text{kde} \quad m = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$

E. Popisná statistika

Výběrový průměr .... $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Výběrový medián .... $\widetilde{X} = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & \text{pro } n \text{ liché} \\ \frac{1}{2}\left[X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}\right] & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$

Výběrový rozptyl .... $\sigma_n^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, resp. $\sigma_n^2 = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \overline{X}^2$

Výběrová směrodatná odchylka .... $\sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2}$

Výběrový koeficient šikmosti .... $A_3 = \dfrac{\mu_3}{\sigma_n^3}$, kde $\mu_3 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3$

F. Lineární regrese (regresní přímka $y = a + bx$)

Reziduální součet čtverců .... $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$, kde čísla a, b jsou řešením soustavy

$$na + \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)b = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)a + \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Platí

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$