Řešení vzorové zkouškové písemky z MAR2

1. Vypočtěte
$$\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x.$$

Řešení.

Metodou per partes pro určité integrály (♣) dostaneme

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x \overset{♣}{=} \left| \begin{matrix} u' = x^2, & u = \frac{1}{3}x^3 \\ v = \operatorname{arctg} x, & v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{matrix} \right| = \tfrac{1}{3} \underbrace{\Big[x^3 \operatorname{arctg} x\Big]_0^1}_{=1\cdot\operatorname{arctg} 1 - 0 = \frac{1}{4}\pi} - \tfrac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Integrál vpravo vypočteme užitím prvního pravidla o substituci pro určité integrály (♢) a rozkladem (♡):

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2\cdot x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\big[(1+x^2)-1\big]\cdot x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{♢}{=} \left| \begin{matrix} 1+x^2 = t \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t=1+x^2 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right| =$$

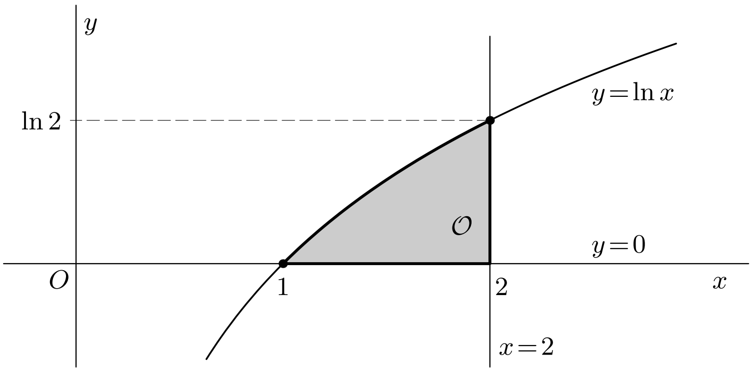
$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{t-1}{t}\,\mathrm{d}t \overset{♡}{=} \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[t - \ln t\Big]_1^2 = \tfrac{1}{2}(2 - \ln 2 - 1) = \tfrac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

Celkem
$$\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{12}\pi - \tfrac{1}{6}(1 - \ln 2) = \tfrac{1}{12}\big(\pi + 2\ln 2 - 2\big)$$

2. Rovinný obrazec $\mathcal{O}$ je ohraničen křivkami $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$ (načrtněte obrázek). Vypočtěte objem V_x tělesa $\mathcal{T}_x$, které vznikne rotací obrazce $\mathcal{O}$ kolem osy x, a objem V_y tělesa $\mathcal{T}_y$, které vznikne rotací obrazce $\mathcal{O}$ kolem osy y.

Řešení.

Křivka $y = \ln x$ protíná osu x v bodě $[1, 0]$. Obrázek daného obrazce $\mathcal{O}$ vypadá takto:



Pro výpočet objemů rotačních těles V_x, V_y použijeme vzorce

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x, \qquad V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Obrazec $\mathcal{O}$ je totiž křivočarý lichoběžník určený grafem funkce $f(x) = \ln x$ nad intervalem $\langle a, b\rangle = \langle 1, 2\rangle$.

Pro objem V_x tělesa $\mathcal{T}_x$ metodou per partes pro určité integrály (♣) dostaneme

$$V_x = \pi \int_1^2 \ln^2 x\,\mathrm{d}x \overset{♣}{=} \left| \begin{matrix} u' = 1, & u = x \\ v = \ln^2 x, & v' = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| = \pi \left(\underbrace{\Big[x \cdot \ln^2 x\Big]_1^2}_{=2\ln^2 2} - 2\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x \right) =$$

$$\overset{♣}{=} \left| \begin{matrix} u' = 1, & u = x \\ v = \ln x, & v' = \dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| = \pi \left(2\ln^2 2 - 2\underbrace{\Big[x \cdot \ln x\Big]_1^2}_{=2\ln 2} + 2\int_1^2 1\,\mathrm{d}x \right) =$$

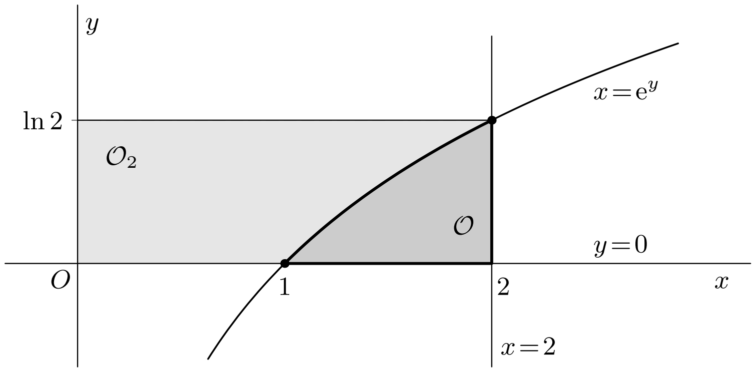
$$= \pi \left(2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2\underbrace{\Big[x\Big]_1^2}_{=2-1=1} \right) = \pi\big(2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2\big) = 2(\ln 2 - 1)^2\,\pi$$

Pro objem V_x tělesa $\mathcal{T}_x$ metodou per partes pro určité integrály (♣) dostaneme

$$V_y = 2\pi \int_1^2 x \ln x\,\mathrm{d}x \overset{♣}{=} \left| \begin{matrix} u' = x, & u = \frac{1}{2}x^2 \\ v = \ln x, & v' = \dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| = 2\pi \left(\tfrac{1}{2}\Big[x^2 \cdot \ln x\Big]_1^2 - \tfrac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x \right) =$$

$$= \pi \left(\underbrace{\Big[x^2 \cdot \ln x\Big]_1^2}_{=4\ln 2} - \int_1^2 x\,\mathrm{d}x \right) = \pi \left(4\ln 2 - \tfrac{1}{2}\underbrace{\Big[x^2\Big]_1^2}_{=4-1=3} \right) = \pi\big(4\ln 2 - \tfrac{3}{2}\big) = \tfrac{1}{2}\big(8\ln 2 - 3\big)\,\pi$$

Objemy obou těles lze vypočítat také tak, že zaměníme role proměnných x, y. Protože platí $y = \ln x \iff x = \mathrm{e}^y$, je daný obrazec popsán nerovnicemi $\mathrm{e}^y \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq \ln 2$. Objemy těles $\mathcal{T}_x$, $\mathcal{T}_y$ pak lze počítat jako rozdíly objemů dvou těles: obrazec $\mathcal{O}$ doplníme k ose y obrazcem $\mathcal{O}_2$, což je křivočarý lichoběžník určený grafem funkce $f_2(y) = \mathrm{e}^y$, $y \in \langle 0, \ln 2\rangle$, čímž vznikne obdélník $\mathcal{O}_1$ se stranami délek 2 a $\ln 2$.



Rotací obdélníku $\mathcal{O}_1$ kolem osy x vznikne rotační válec s poloměrem $r = \ln 2$ a výškou $v = 2$. Má objem $\big(V_x\big)_1 = \pi r^2 v = 2\pi \ln^2 2$. Objem tělesa, které vznikne rotací obrazce $\mathcal{O}_2$ kolem osy x, pak můžeme počítat podle druhého vzorce, kde vzájemně zaměníme písmena x, y, pro $f(y) = \mathrm{e}^y$ a $\langle a, b\rangle = \langle 0, \ln 2\rangle$. Metodou per partes (♣) dostaneme

$$\big(V_x\big)_2 = 2\pi \int_0^{\ln 2} y\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y \overset{\clubsuit}{=} \left| \begin{matrix} u' = \mathrm{e}^y, & u = \mathrm{e}^y \\ v = y, & v' = 1 \end{matrix} \right| = 2\pi \left(\underbrace{\Big[y \cdot \mathrm{e}^y\Big]_0^{\ln 2}}_{=(\ln 2)\cdot \mathrm{e}^{\ln 2} = 2\ln 2} - \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y \right) =$$

$$= 2\pi \left(2\ln 2 - \underbrace{\Big[\mathrm{e}^y\Big]_0^{\ln 2}}_{=\mathrm{e}^{\ln 2} - \mathrm{e}^0 = 2-1=1} \right) = 2\pi\big(2\ln 2 - 1\big) = 2\pi$$

Celkem

$$V_x = \big(V_x\big)_1 - \big(V_x\big)_2 = 2\pi\ln^2 2 - 2\pi\big(2\ln 2 - 1\big) = 2\pi\big(\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1\big) = 2(\ln 2 - 1)^2\,\pi$$

Rotací obdélníku $\mathcal{O}_1$ kolem osy y vznikne rotační válec s poloměrem $r = 2$ a výškou $v = \ln 2$. Má objem $\big(V_y\big)_1 = \pi r^2 v = 4\pi \ln 2$. Objem tělesa, které vznikne rotací obrazce $\mathcal{O}_2$ kolem osy y, pak můžeme počítat podle prvního vzorce, kde místo x píšeme y, pro $f(y) = \mathrm{e}^y$ a $\langle a, b\rangle = \langle 0, \ln 2\rangle$:

$$\big(V_y\big)_2 = \pi \int_0^{\ln 2} \big(\mathrm{e}^y\big)^2\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2y}\,\mathrm{d}y = \pi \cdot \tfrac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{2y}\Big]_0^{\ln 2} = \pi \cdot \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^{2\ln 2} - \mathrm{e}^0\big) = \pi \cdot \tfrac{1}{2}(4-1) = \tfrac{3}{2}\pi$$

Celkem

$$V_y = \big(V_y\big)_1 - \big(V_y\big)_2 = 4\pi\ln 2 - \tfrac{3}{2}\pi = \tfrac{1}{2}(8\ln 2 - 3)\,\pi$$

V tomto druhém způsobu řešení, kde jsme zaměnili role proměnných x, y, jsme při výpočtu integrálů metodu per partes použili jen jednou, kdežto v prvním způsobu řešení celkem třikrát.

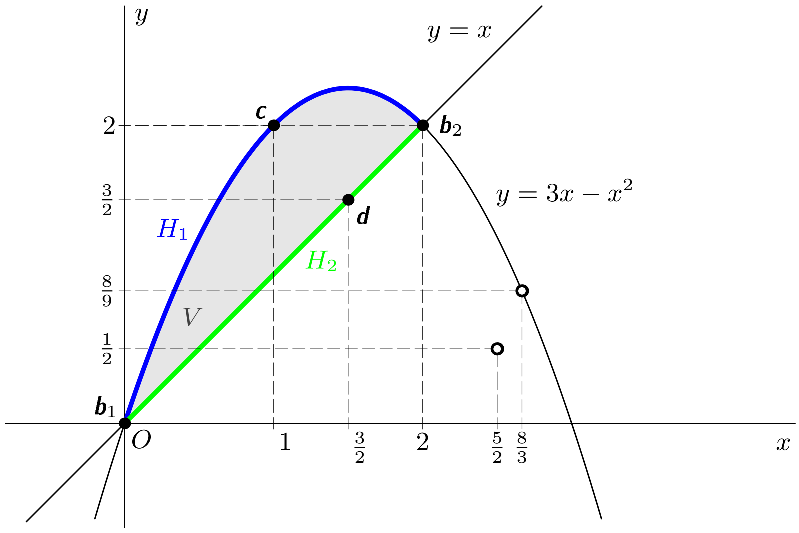
3. Vypočtěte největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = 2xy - x - 5y$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x \leqq y \leqq 3x - x^2\}$.

Řešení.

Začneme obrázkem zadané množiny M (jejím znázorněním v rovině Oxy). V našem případě jde o průnik vnitřní oblasti paraboly $y = 3x - x^2$ včetně této paraboly a poloroviny $y \geqq x$, což je parabolická úseč. Obrázek zároveň potvrzuje, že množina M je uzavřená a omezená.



Množinu M zapíšeme jako sjednocení jejího vnitřku a hranice, $M = V \cup H$, a v první části řešení vyhledáme postupně všechny podezřelé body.

a) Pro vnitřek V množiny M platí

$$V = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon x < y \wedge y < 3x - x^2\}$$

Vypočteme stacionární body funkce f:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2y - 1,\, 2x - 5) = (0,0) \iff (x,y) = \left(\tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

Vypočtený bod nesplňuje první podmínku v popise množiny V, tudíž ve V neleží žádný podezřelý bod.

b) Na obrázku vidíme, že hranice H množiny M (její obvodová křivka) obsahuje dva body lomu. Proto

$$H = L \cup (H_1 \cup H_2),$$

kde L je množina bodů lomu, H_1, H_2 jsou hladké části hranice H množiny M (viz obrázek).

1) Máme

$$L = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon y = x \wedge y = 3x - x^2\}$$

Kvadratickou rovnici $x = 3x - x^2$ upravíme do tvaru $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$. Její kořeny jsou $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Jim odpovídají dva body lomu hranice množiny M, a to

$$\boldsymbol{b}_1 = (0,0), \quad \boldsymbol{b}_2 = (2,2),$$

což jsou první dva podezřelé body.

2a) Máme

$$H_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon y = 3x - x^2 \wedge y > x\}$$

Hledáme všechny body parabolického oblouku H_1 bez krajních bodů, ve kterých může mít funkce f vázaný extrém vzhledem k parabole $y = 3x - x^2$. Protože tato parabola je grafem funkce jedné proměnné o rovnici $y = \varphi_1(x) = 3x - x^2$, použijeme redukci počtu proměnných. Parabolu parametrizujeme rovnicemi $x = t$, $y = 3t - t^2$. Dostaneme

$$\begin{aligned} f(t,\, 3t - t^2) &= 2t(3t - t^2) - t - 5(3t - t^2) = \\ &= -2t^3 + 11t^2 - 16t = -(2t^3 - 11t^2 + 16t) = h_1(t) \end{aligned}$$

Vypočteme stacionární body funkce h_1:

$$h_1'(t) = -2(6t^2 - 22t + 16) = -4(3t^2 - 11t + 8)$$
$$h_1'(t) = 0 \iff 3t^2 - 11t + 8 = (t-1)(3t-8) = 0 \iff \left(t_1 = 1 \ \vee\ t_2 = \tfrac{8}{3}\right)$$

Potom

$$t_1 = 1 \implies (x,y) = (1,2), \qquad t_2 = \tfrac{8}{3} \implies (x,y) = \left(\tfrac{8}{3}, \tfrac{8}{9}\right)$$

Protože množina H_1 je část paraboly $y = 3x - x^2$ pro hodnoty parametru t takové, že $0 < t < 2$ (viz obrázek), a vypočtená hodnota $t_1 = 1$ této podmínce vyhovuje, kdežto hodnota $t_2 = \frac{8}{3}$ nikoli, v množině H_1 jsme našli jeden podezřelý bod:

$$\boldsymbol{c} = (1,2)$$

2b) Máme

$$H_2 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \colon y = x \ \wedge\ y < 3x - x^2\right\}$$

Hledáme všechny body úsečky H_2 bez krajních bodů, ve kterých může mít funkce f vázaný extrém vzhledem k přímce $y = x$. Protože tato přímka je grafem funkce jedné proměnné o rovnici $y = \varphi_2(x) = x$, použijeme redukci počtu proměnných. Přímku parametrizujeme rovnicemi $x = t$, $y = t$. Dostaneme

$$f(t,\, t) = 2t \cdot t - t - 5t = 2t^2 - 6t = 2(t^2 - 3t) = h_2(t)$$

Vypočteme stacionární body funkce h_2:

$$h_2'(t) = 2(2t - 3) = 0 \iff t = \tfrac{3}{2}\,, \quad t = \tfrac{3}{2} \implies (x,y) = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right)$$

Protože množina H_2 je část přímky $y = x$ pro hodnoty parametru t takové, že $0 < t < 2$ (viz obrázek), a vypočtená hodnota $t = \frac{3}{2}$ této podmínce vyhovuje, v množině H_2 jsme našli jeden podezřelý bod:

$$\boldsymbol{d} = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right)$$

Celkem jsme v množině M našli čtyři podezřelé body:

$$\boldsymbol{b}_1 = (0,0), \quad \boldsymbol{b}_2 = (2,2), \quad \boldsymbol{c} = (1,2), \quad \boldsymbol{d} = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right)$$

Ve druhé části řešení vypočteme hodnoty funkce f ve čtyřech zjištěných podezřelých bodech:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{b}_1) &= f(0,0) = 0 \\ f(\boldsymbol{b}_2) &= f(2,2) = 8 - 2 - 10 = -4 \\ f(\boldsymbol{c}) &= f(1,2) = 4 - 1 - 10 = -7 \\ f(\boldsymbol{d}) &= f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{9}{2} - \tfrac{3}{2} - \tfrac{15}{2} = -\tfrac{9}{2} = -4.5 \end{aligned}$$

Po porovnání těchto hodnot podle jejich velikosti vychází:

$$\text{funkce } f \text{ má v množině } M \begin{cases} \text{největší hodnotu } f(0,0) = 0 \\ \text{nejmenší hodnotu } f(1,2) = -7 \end{cases}$$

4. Vypočtěte koeficienty a, b v rovnici přímky $y = a + bx$, která ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje data z tabulky:

x_i	-1	1	2	3	5
y_i	2.6	1.4	0.9	0.6	-0.4

Určete příslušný reziduální součet čtverců této aproximace.

Řešení.

V tabulce je zadáno pět bodů $[x_i, y_i]$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vypočteme jednotlivé koeficienty u neznámých a, b a pravé strany rovnic pro soustavu (S), ze které budeme čísla a, b v rovnici regresní přímky počítat [viz oficiální tahák]:

$$\begin{aligned}
n &= 5 \\
\sum_{i=1}^{5} x_i &= (-1) + 1 + 2 + 3 + 5 = 10 \\
\sum_{i=1}^{5} x_i^2 &= (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40 \\
\sum_{i=1}^{5} y_i &= 2.6 + 1.4 + 0.9 + 0.6 + (-0.4) = 5.1 \\
\sum_{i=1}^{5} x_i y_i &= (-1) \times 2.6 + 1 \times 1.4 + 2 \times 0.9 + 3 \times 0.6 + 5 \times (-0.4) = \\
&= (-2.6) + 1.4 + 1.8 + 1.8 + (-2.0) = 0.4
\end{aligned}$$

Rozšířená matice soustavy (S) dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a, b je

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5, & 10 & 5.1 \\ 10, & 40 & 0.4 \end{array}\right)$$

Soustavu

$$\left.\begin{aligned} 5a + 10b &= 5.1 \\ 10a + 40b &= 0.4 \end{aligned}\right\} \text{(S)}$$

můžeme vyřešit například užitím Cramerova pravidla. Vypočteme determinant matice soustavy:

$$D = \begin{vmatrix} 5, & 10 \\ 10, & 40 \end{vmatrix} = 100$$

a determinanty pro jednotlivé neznámé a, b:

$$D_a = \begin{vmatrix} 5.1, & 10 \\ 0.4, & 40 \end{vmatrix} = 200, \qquad D_b = \begin{vmatrix} 5, & 5.1 \\ 10, & 0.4 \end{vmatrix} = -49$$

Pak podle Cramerova pravidla dostaneme

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{200}{100} = 2, \qquad b = \frac{D_b}{D} = \frac{-49}{100} = -0.49$$

Hledaná regresní přímka má tedy rovnici

$$y = 2 - 0.49\,x$$

Pro výpočet reziduálního součtu čtverců

$$S(2, -0.49) = \sum_{i=1}^{5} \big[y_i - 2 - (-0.49)\, x_i\big]^2$$

použijeme vzorec

$$S(a, b) = S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a \sum_{i=1}^{n} y_i - b \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{$*$}$$

(viz oficiální tahák). Vypočteme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} y_i^2 &= 2.6^2 + 1.4^2 + 0.9^2 + 0.6^2 + (-0.4)^2 = \\ &= 6.76 + 1.96 + 0.81 + 0.36 + 0.16 = 10.05\end{aligned}$$

a pak dosadíme do ($*$):

$$\begin{aligned}S(2, -0.49) = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{5} x_i + 0.49 \sum_{i=1}^{5} y_i &= 10.05 - 2 \times 5.1 + 0.49 \times 0.4 = \\ &= 10.05 - 10.2 + 0.196 = 0.046\end{aligned}$$