Matematika 1 až 4: Vysvětlení některých symbolů a pojmů

Verze ze dne 23. září 2019

Jan Chleboun

Obsah

Úvod

Během let, která trávím výukou na Stavební fakultě ČVUT v Praze, ve mně vzklíčilo podezření, že mnozí studenti mají ke skriptům z matematiky vlažný vztah proto, že jim už od počátečních stran nerozumějí kvůli matematickým symbolům, které se v matematickém textu nevyhnutelně objevují a bez nichž matematický text ani není možné napsat.

Jako vyučující jsem (asi naivně) mlčky předpokládal, že i když studenti nemají středoškolskou matematiku v malíčku, přeci jen se v ní orientují aspoň na úrovni hlavních pojmů a základní matematické notace. Například obsažný *Přehled středoškolské matematiky* Josefa Poláka běžně používá matematickou formu zápisu, takže jsem podlehl přesvědčení, že našim studujícím řetězce matematických symbolů nejsou cizí. Nicméně nyní se naopak domnívám, že pro některé studenty je i jednoduchý matematický zápis téměř tak tajemný jako sumerské klínové písmo. Úmysl objasnit smysl základních matematických symbolů a jejich zřetězení byl prvním impulzem pro vznik tohoto vysvětlujícího textu.

Druhý se zrodil z dlouhodobých potíží, které studující mají s pochopením abstraktnějších pojmů, najmě vektorového (lineárního) prostoru. S ním se během studia setkávají několikrát, ale moji kolegové ani já si neděláme iluze, že všichni studující plně chápou, o co jde. Tomuto tématu se věnuje druhá polovina textu.

1 Závorky a množiny

V matematice se běžně setkáváme s několika typy závorek: $(\,,\,)$, $[\,,\,]$, $\{\,,\,\}$, $\langle\,,\,\rangle$. Znáte je ze složitějších výrazů, v nichž vymezují jednotlivé části a jejich hierarchii jako například

$$[7 + (4 - 5a)(3 + 2b)]\cos(a + b).$$

Použití závorek v matematické literatuře je však daleko širší, ale (žel) není úplně jednotné. Například interval mezi body (hodnotami) 0 a 1 otevřený zleva a uzavřený zprava je možné zapsat několika způsoby, kupříkladu $(0, 1]$, $]0, 1]$ nebo $(0, 1\rangle$. Při čtení matematického textu je tedy vhodné věnovat pozornost tomu, jak autor závorky interpretuje, jeho způsob může být jiný, než na jaký jste byli zvyklí třeba ze střední školy.[1]

Dosti specifickou roli hrají závorky složené, tj. $\{\ \}$. Setkáváme se s nimi především v definicích množin. Připomeňme, že *množina* je soubor nějakých matematických objektů (prvků) definovaný tak jednoznačně, že můžeme rozhodnout, které objekty do něj patří a které do něj nepatří. Jednoduše se množina definuje výčtem. Například zápis

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$

definuje množinu sestávající ze čtyř prvků, a to přirozených čísel 1, 2, 3 a 4.

Výčtem mohou být definovány i množiny s nekonečným počtem prvků;

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{1}$$

[1]Kupříkladu závorky $\langle$ a $\rangle$ v jistých partiích matematiky standardně označují vztah, jemuž se říká dualita (při studiu na FSv se s ním (snad s výjimkou některých doktorandů) nesetkáte), pak by ovšem jejich užití při vymezování uzavřených intervalů bylo matoucí.

definuje posloupnost čísel 1, 1/2, 1/3, 1/4 atd.

Některé množiny čísel jsou tak významné a tak často používané, že se pro ně ustálilo označení speciálním symbolem:

$\mathbb{N}$ přirozená čísla, obvykle[2] 1, 2, 3, ...;
$\mathbb{Z}$ celá čísla (včetně nuly);
$\mathbb{Q}$ racionální čísla, tj. podíly celých a přirozených čísel;
$\mathbb{R}$ reálná čísla;
$\mathbb{C}$ komplexní čísla.

Přistupme nyní ke způsobu definování množin, s nímž se setkáváme nejčastěji. Zápis[3]

$$I_1 = \{a \in \mathbb{R}|\ 3 < a \ \&\ a \leq 9\} \tag{2}$$

definuje množinu I_1. Definice má dvě části. Ta první je vymezena závorkou { a symbolem | (případně :, viz poznámku pod čarou) a říká nám, že prvky množiny I_1 jsou vybírány z množiny všech reálných čísel. V druhé části — mezi symboly | a } — je upřesněno, která reálná čísla do výběru patří, musejí být větší než 3 a zároveň[4] (symbol &) menší nebo rovna 9.

Vidíme, že definice (2) definuje polouzavřený interval a že platí

$$I_1 = (3, 9]. \tag{3}$$

Někteří studenti a některé studentky si zápis typu (2) vykládají zkresleně. Představují si, že množinu I_1 tvoří jen jediný prvek, jenž se jmenuje a a pro nějž platí nějaké podmínky.

Proveďme malou změnu a pišme

$$I_2 = \{a \in \mathbb{Z}|\ 3 < a \ \&\ a \leq 9\}. \tag{4}$$

Nyní prvky množiny I_2 vybíráme jen z množiny všech celých čísel, tedy je

$$I_2 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Typu definice (2) odpovídá i množina

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}|\ \sin x > \pi\}.$$

Tvoří ji všechny reálné hodnoty takové, že jejich sinus je větší než číslo π. Protože obor hodnot funkce sinus je roven intervalu $[-1, 1]$, žádné reálné x s požadovanou vlastností neexistuje. Množina je prázdná, tj.[5]

$$M_1 = \emptyset.$$

Zkusme

$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}|\ \sin(\pi x) = 0\}.$$

Po chvilce přemýšlení zjistíme, že

$$M_2 = \mathbb{Z}. \tag{5}$$

[2]Uvažujeme-li navíc i číslo 0, užívá se často označení $\mathbb{N}_0$.

[3]Nebo $I_1 = \{a \in \mathbb{R} :\ 3 < a \ \&\ a \leq 9\}$, rozdíl je jen v jediném znaku.

[4]Symbol & bývá nahrazen symbolem $\wedge$ nebo chybí. Pak definice vypadá takto

$$I_1 = \{a \in \mathbb{R}|\ 3 < a,\ a \leq 9\}$$

a obě nerovnosti platí zároveň.

[5]Povšimněte si speciálního symbolu pro prázdnou množinu.

1.1 Pár slov o rovnítku

Znaménko rovnosti je trochu záludné a dovede studující znejistit. Zdánlivě je vše jasné: to, co je vlevo od =, je rovno tomu, co stojí vpravo od =. Klasickou ukázkou je rovnice, kupříkladu

$$7 + 2x = 4x + 13,$$

z níž ihned odvodíme, že $x = -3$.

Když se však zamyslíme nad definicí (2), o žádnou rovnici v ní nejde. Znaménko rovnosti jen říká, že matematický objekt uvedený na pravé straně (jak jsme zjistili, je to interval) budeme pro jednoduchost a stručnost označovat symbolem I_1. Role znaménka rovnosti tedy závisí na kontextu a některé méně zkušené studující to někdy mate. Pro ně je vhodné obě role rozlišit například tím, že role definiční se explicitně zdůrazní

$$I_1 \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R} | \ 3 < a \ \& \ a \leq 9\},$$

obecně se však v matematické literatuře s takovou péčí o čtenáře nesetkáváme, protože oba významy rovnítka jsou snadno odlišitelné.

Subtilnější je rozdíl mezi rovnítkem a znakem $\equiv$, na nějž občas také narazíte. Má význam „je ekvivalentní“ a mohl by být použit kupříkladu v (3), tj.

$$I_1 \equiv (3, 9],$$

kdy se vlastně říká, že složitě definovaná množina I_1 je vlastně jen umně maskovaný interval $(3, 9]$, že oba zápisy jsou ekvivalentní.

K množinám se váží jak symboly $\in$ (je prvkem), $\notin$ (není prvkem) a $\subset$ (podmnožina), tak symboly pro operace s množinami, tj. sjednocení $\cup$, průnik $\cap$ a rozdíl množin $\setminus$.

Zaveďme množinu $I_3 = \{7, 8, 11\}$ a s použitím množiny I_2 předveďme několik ukázek:

$$6 \in I_2, \qquad 0 \notin I_3, \qquad I_2 \cup I_3 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}, \qquad I_2 \cap I_3 = \{7, 8\},$$
$$\{4, 5, 6\} \subset I_2, \qquad \{7\} \subset I_2 \cap I_3, \qquad \{4, 5, 6, 9\} = I_2 \setminus I_3.$$

2 Kvantifikátory

Přenesme pozornost na matematické symboly, s nimiž se setkáváme v definicích některých pojmů a v matematických tvrzeních. Říká se jim kvantifikátory a mají tento význam:

$\forall$ (pro) každý, (pro) všechna;

$\exists$ existuje, $\exists!$ existuje právě jeden (jedna, jedno).

Použití si ukažme na posloupnosti (1). Její prvky označme a_j, tj. $a_j = 1/j$, kde $j = 1, 2, 3, \ldots$. Je patrné, že všechny prvky a_j jsou kladné, což můžeme zapsat takto

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ a_k > 0.$$

Řečeno slovy — pro každý index k, jenž je přirozeným číslem, je odpovídající člen posloupnosti (tj. prvek a_k) kladný.

V předchozím odstavci jsem čtenářům naschvál zkomplikoval čtení tím, že posloupnost (1) je definována pomocí n, avšak její prvky mají nejprve index j a nakonec index k. Touto schválností chci vyvést z omylu ty studující, kteří jsou nakloněni vidět v posloupnostech $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ a $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *dvě různé* posloupnosti. Nikoli, jde o stále stejnou posloupnost s prvky

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}.$$

Ve standardním (tj. méně zlomyslném) textu by se o (1) psalo jako o posloupnosti s prvky a_n a ani by se nemuselo zdůrazňovat, že $a_n = 1/n$ pro $n = 1, 2, \dots$, protože vlastnosti indexu n už plynou z (1). V dalším tedy budeme pracovat s označením $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Limita posloupnosti reálných čísel je reálné číslo, které nejlépe vystihuje chování členů posloupnosti při indexech jdoucích do nekonečna. Existence takového čísla není zaručena a jeho definice není návodem pro jeho výpočet, nýbrž je formulována jako test, zda zvolené číslo L je limitou posloupnosti nebo není.

Připomeňme tedy, že o $L \in \mathbb{R}$ řekneme, že je limitou posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad |a_n - L| < \varepsilon. \tag{6}$$

Rozšifrujme zápis (6). Říká, že pro každé (reálné) kladné číslo ε existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro každé n větší než n_0 platí, že vzdálenost mezi L a prvkem a_n je menší než ε. Jinými slovy — od jistého indexu n_0 se všechny prvky posloupnosti s indexem větším než n_0 drží od L ve vzdálenosti menší než je předem zvolená, ale libovolná kladná tolerance ε. Pokud má posloupnost limitu L, tak ať zvolíme ε jakkoli malé (avšak kladné), celá zbývající část posloupnosti za indexem n_0 bude v ε-blízkosti hodnoty L. To mj. znamená, že posloupnost nemůže mít limitu $L_1 \neq L$, protože stačí zvolit například $\varepsilon = |L - L_1|/3$ a „zbytek“ posloupnosti bude od L_1 vzdálen o více než ε, takže L_1 nemůže být limitou dané posloupnosti.

Zdůrazněme, že pořadí $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ je velmi důležité. Tento zápis připouští, že index n_0 může záviset (a obvykle také závisí) na hodnotě ε.

Zápis

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > n_0 \quad |a_n - L| < \varepsilon \tag{7}$$

má značně odlišný význam. Říká, že existuje takový index $n_0 \in \mathbb{N}$ (nezávislý na ε), že pro *libovolnou toleranci* ε a pro všechny indexy n větší než n_0 platí $|a_n - L| < \varepsilon$. Když to domyslíte, varianta (7) vlastně znamená, že $\forall n > n_0$ platí $a_n = L$. Definicí (7) bychom tedy limitu posloupnosti definovali jen pro velmi speciální, ba nezajímavé posloupnosti.

Nezapomeňme, že v celkovém kontextu má výraz (6) význam podmínky „jestliže pro L platí (6), pak L je limitou posloupnosti“. Snadno nahlédneme, že posloupnost (1) má limitu $L = 0$, nicméně je dobré si uvědomit, že definice limity posloupnosti, jak jsme ji tady představili, je obecná a může být použita pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel, nejen pro tu konkrétní danou předpisem (1).

3 Vektorový prostor

Přicházíme k nejtěžší části výkladu. Ačkoli jde o pojem v principu vlastně jednoduchý, snad je to kvůli jeho abstraktnosti, že některým studujícím jeho pochopení působí nebývalé potíže.

Začněme trochu zeširoka. V první části výkladu jsme se seznámili s množinami a s jejich definováním. V další jsme se zabývali kvantifikátory a pro ilustraci jsme zvolili posloupnosti.

Mlčky jsme však vzali za dané, že umíme nejen porovnat dva objekty, v našem případě přirozená čísla v roli indexů (porovnání je dáno nerovností $n > n_0$), ale také s nimi provést například aritmetickou operaci odčítání $L - L_1$. V matematice se však postupuje jemněji a zavádí se bohatá a hierarchická rodina typů množin, které se liší tím, jaké operace lze s prvky množiny dělat. Je to podobné jako systematika v biologii, kdy různé vlastnosti a jejich zvyšující se počet vymezují kmeny, třídy, řády, čeledi, rody atd.

Obecně množina nemá pro své prvky definované operace.[6] Zavedením jedné operace (nebo více operací) mezi prvky (třeba násobení, sčítání) pak vzniká algebraická struktura,[7] obvykle se specifickým názvem, například grupoid, pologrupa, grupa, okruh, těleso aj. Ze základní školy známá reálná čísla s operacemi sčítání a násobení jsou v této klasifikaci komutativním tělesem.

My se zaměříme na strukturu, která se jmenuje *vektorový prostor* (též se říká lineární prostor). S vektorovými prostory se setkáváte ve všech předmětech Matematika X, kde $X = 1, 2, 3, 4$. Naneštěstí už tak obsažný sylabus předmětu neumožňuje podrobně ukázat, proč je právě pojem vektorového prostoru důležitý. Souvisí to s jeho strukturou, s jeho vlastnostmi, jež jsou v dalším označeny (12) až (19). A také s tím, v jakých souvislostech se vektorový prostor v matematice a v jejích aplikacích vyskytuje. Velmi se mu daří v symbióze s lineárním zobrazením, které ve vaší výuce nabývá řady podob od soustav lineárních algebraických rovnic, lineárních diferenciálních rovnic (potkáte je jako rovnici vedení tepla, kmitání, rovnice lineární pružnosti, aj.) až po metodu konečných prvků. Ale to je téma na další, hodně rozsáhlý text.

Odvažme se uvažovat o vektorovém prostoru nejprve abstraktně. Představme si, že máme množinu V nějakých matematických objektů, prozatím neupřesňujeme jakých. Dále si představme, že pro prvky množiny V je definována operace $\oplus$, jejímž výsledkem je opět prvek množiny V, a dále taková operace $\odot$ mezi prvky množiny reálných čísel a prvky množiny V, jejíž výsledek je také prvkem množiny V. Obě operace jsou binární, to znamená, že $\oplus$ operuje se dvěma prvky z V a $\odot$ operuje s jedním reálným číslem a s jedním prvkem z V.

Myslím, že pro čtenáře obtížnost těchto a dalších úvah spočívá v tom, že na abstrakní úrovni operace $\oplus$ a $\odot$ nejsou nijak konkrétně definovány, dokonce ani není řečeno, co vlastně jsou prvky množiny V, jak si je máme představit. Operace $\oplus$ a $\odot$ prozatím nebudeme konkretizovat, jen budeme vyžadovat, aby měly požadované *vlastnosti*, a to (12) až (19), viz dále. To, proč se studující setkávají s nezvyklými symboly $\oplus$ a $\odot$ tady, a nikoli běžně ve skriptech, bude vysvětleno později. První operaci budeme nazývat sčítání, druhou násobení.

Ten, koho abstraktní přístup příliš zneklidňuje, si může představu množiny V zúžit na (například) uspořádané dvojice reálných čísel (tj. vektory v rovině). Konkrétní ilustrací operací $\oplus$ a $\odot$, pak může být sčítání vektorů $u = (u_1, u_2) \in V$ a $v = (v_1, v_2) \in V$ definované takto: $z = u \oplus v \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, tedy známé sčítání po složkách. Výsledný vektor z je opět uspořádanou dvojicí čísel, tudíž $z \in V$. Podobně pro $c \in \mathbb{R}$ definujme $z = c \odot u \stackrel{\text{def}}{=} (cu_1, cu_2)$ a dostaneme $z \in V$. Ilustračním příkladům se ještě budeme věnovat.

[6] Neplést se sjednocením či průnikem množin, to jsou operace definované pro množiny.

[7] Důležitá je i *uzavřenost* vhledem k operaci. To znamená, že výsledek operace je opět prvkem téže množiny. Například množina celých čísel není uzavřená vzhledem k operaci dělení, protože podíl dvou celých čísel nemusí být celé číslo.

Vraťme se k abstraktnějšímu pojetí. Z uzavřenosti V vzhledem k operacím $\oplus$ a $\odot$ plyne uzavřenost množiny V vzhledem k lineárním kombinacím. Připomeňme, že lineární kombinace je v našem značení výraz

$$c_1 \odot v_1 \oplus c_2 \odot v_2 \oplus c_3 \odot v_3 \oplus \cdots \oplus c_m \odot v_m, \tag{8}$$

kde $c_i \in \mathbb{R}$ a $v_i \in V$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. Označíme-li výsledek součinů u_i, tj. $u_i = c_i \odot v_i$, je $u_i \in V$ díky uzavřenosti V vzhledem k násobení $\odot$. Lineární kombinaci (8) pak můžeme zapsat

$$u_1 \oplus u_2 \oplus u_3 \oplus \cdots \oplus u_m. \tag{9}$$

Zaveďme nyní $w_1 = u_1 \oplus u_2$. Díky uzavřenosti V vzhledem k operaci $\oplus$ je $w_1 \in V$ a z (9) se stane

$$w_1 \oplus u_3 \oplus \cdots \oplus u_m. \tag{10}$$

Označme $w_2 = w_1 \oplus u_3$, opět $w_2 \in V$ a (9) má podobu

$$w_2 \oplus u_4 \oplus \cdots \oplus u_m. \tag{11}$$

Teď je již jasné, jak postupujeme dále. Definujeme $w_3 = w_2 + u_4$, $w_4 = w_3 + u_5$, $\ldots$, $w_{m-1} = w_{m-2} + u_m$. A protože $w_{m-2}, u_m \in V$, je $w_{m-1} \in V$, tudíž součet (9) i původní lineární kombinace (8) jsou stejným prvkem množiny V.

Uzavřenost vzhledem k operacím $\oplus$ a $\odot$ je zásadní, avšak aby množina V mohla být nazvána vektorovým prostorem, musejí být splněny další podmínky. Uveďme je (pro větší pestrost značení) prostřednictvím reálných čísel α a β a prvků $x, y, z \in V$, a to v podobě převzaté z Wikipedie (`https://cs.wikipedia.org/wiki/Vektorov%C3%BD_prostor`):

$$\forall\, x, y \in V \quad x \oplus y = y \oplus x \quad \text{(komutativita sčítání)}, \tag{12}$$

$$\forall\, x, y, z \in V \quad x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z \quad \text{(asociativita sčítání)}, \tag{13}$$

$$\exists!\, \tilde{0} \in V \quad \forall\, x \in V \quad x \oplus \tilde{0} = x \quad \text{(existence nulového prvku)}, \tag{14}$$

$$\forall\, x \in V \quad \exists\, y \in V \quad x \oplus y = \tilde{0} \quad \text{(existence opačného prvku)}, \tag{15}$$

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha\beta) \odot x \quad \text{(asociativita násobení)}, \tag{16}$$

$$\forall\, x \in V \quad 1 \odot x = x, \tag{17}$$

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, \forall\, x \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x \text{ (distributivita násobení I)}, \tag{18}$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}\, \forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad \alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y \text{ (distributivita násobení II)}. \tag{19}$$

Zastavme se u požadovaných vlastností (12)–(19). Všechny vlastnosti jsou velmi přirozené, nepřekvapivé a odpovídají zkušenosti, kterou s matematickými operacemi máte. Může tedy připadat zbytečné je tak podrobně zmiňovat. Háček je však v tom, že ne všechny operace s prvky množin, s nimiž se v matematice běžně pracuje, mají vlastnosti (12)–(19). Pro ilustraci těchto vlastnosti si opět lze představit vektory v rovině se standardním sčítáním a násobením reálným číslem.

Rovnost (12) říká, že výsledek nezávisí na pořadí sčítanců. Podle (13) je jedno, jestli k x přičteme součet prvků y a z nebo jestli k součtu $x \oplus y$ přičteme prvek z. Výraz (14) postuluje existenci právě jednoho *nulového prvku* ve V, tj. prvku, jehož přičtením k libovolnému $x \in V$ se prvek x vůbec nezmění. Opačný prvek, viz (15), k prvku $x \in V$

je pro jednoduchost a přehlednost zvykem značit $-x$ (z toho např. plyne, že opačný prvek k $w \in V$ značíme analogicky $-w$). Vztah (16) je obdobou (13), ale pro násobení reálným číslem. Povšimněte si, že součin $\alpha\beta$ je standardním součinem reálných čísel, proto není označen symbolem $\odot$, kdežto na levé straně rovnosti (16) jde o součin reálných čísel a prvků množiny V (součin $\beta \odot x$ je prvkem V). Výraz (17) říká, že násobení číslem jedna nemění prvky množiny V.

Distributivita (18) znamená, že je jedno, zda nejprve sečteme α a β (standardní sčítání reálných čísel), a pak násobíme prvek množiny V, nebo násobíme týž prvek jednou hodnotou α, podruhé hodnotou β, a teprve pak součiny sečteme. Paralelou k (18) je distributiva (19), nyní však pro součet prvků množiny V násobený reálným číslem α.

Po rozsáhlé přípravě můžeme konečně definovat vektorový prostor. Množinu V nazveme vektorovým prostorem, pokud pro její prvky je definována operace $\oplus$ a pro její prvky a reálná čísla je definována operace $\odot$, přičemž platí (12) až (19) a množina V je uzavřená vzhledem k $\oplus$ a $\odot$.

3.1 Příklady vektorových prostorů

Prozatím jsme se zdržovali především na abstraktní úrovni množiny V a operací reprezentovaných symboly $\oplus$ a $\odot$. Nyní se věnujme konkrétním ukázkám vektorových prostorů.

3.1.1 Vektory

Klasickým příkladem vektorového prostoru je množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel, značíme ji $\mathbb{R}^n$. Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ máme dobrou geometrickou představu v podobě vektorů v rovině nebo v třídimenzionálním prostoru. Pro větší n naše představivost selhává, avšak definice operací $\oplus$ a $\odot$ zůstává stejná, totiž sčítání po složkách a násobení reálným číslem také po složkách. Každý si snadno ověří, že toto sčítání a násobení splňuje požadavky (12) až (19). Nulový prvek je vektor, jehož složky tvoří samé nuly, opačný vektor získáme změnou znaménka u všech složek původního vektoru. Uzavřenost vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektorů reálným číslem je zřejmá.

S tím vším jste se setkali už v Matematice 1, jen symboly $\oplus$ a $\odot$ chyběly. To proto, že sčítání vektorů a jejich násobení číslem je tak blízké standardnímu sčítání a násobení reálných čísel, že se jeví zbytečné používat pro ně speciální symboly.

Povšimněte si, že $\mathbb{R}^n$ je struktura s větším potenciálem, než jaký vymezují podmínky (12) až (19). Například na $\mathbb{R}^3$ je definován i vektorový součin, což je násobení dvou vektorů $\mathbb{R}^3$, jehož výsledek je opět prvkem $\mathbb{R}^3$. V požadavcích kladených na vektorový prostor se však existence operace *násobení prvků*[8] prostoru vůbec nepožaduje.

Využijme $\mathbb{R}^n$ k objasnění pojmu *podprostoru*. Zvolme pevně $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ a definujme množinu

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n |\ u_1 p_1 + u_2 p_2 + \cdots + u_n p_n = 0\}, \tag{20}$$

kde u_i jsou složky vektoru u a $i = 1, 2, \ldots, n$.[9]

[8] Tj. oba činitele jsou prvky vektorového prostoru.

[9] Doufám, že si nikdo nemyslí, že množinu U tvoří jen jeden vektor, který se navíc napevno jmenuje u. Nikoli, množina U sestává z nekonečně mnoha vektorů, jejichž skalární součin s daným vektorem p je nulový, tj. vektorů, které jsou kolmé k vektoru p.

Splňuje množina U požadavky kladené na vektorový prostor? Jelikož U je podmnožinou $\mathbb{R}^n$, což zapisujeme $U \subset \mathbb{R}^n$, je pro prvky množiny U definováno stejné sčítání a násobení jako v $\mathbb{R}^n$. Jsou v U splněny požadavky (12) až (19), kde si místo písmene V představíme U? Snad nečiní potíže nahlédnout, že ano, jen u (14) a (15) váháme. Jestlipak nulový prvek $\tilde{0}$ leží v množině U? Jinými slovy, je vektor $(0, 0, \ldots, 0)$ prvkem množiny U? Ano, je, neboť skalární součin $\tilde{0} \cdot p = 0$. A jestliže $w \in U$, leží také opačný prvek v w v U? Opačný prvek k w získáme tak, že w vynásobíme číslem -1. Ovšem $-w \cdot p = 0$, takže (15) platí.

Nesmíme však zapomenout ověřit uzavřenost množiny U vzhledem ke sčítání vektorů a k jejich násobení reálným číslem. Mějme tedy dva vektory $u, v \in U$ a reálné číslo c. Víme, že $u \cdot p = 0$ a $v \cdot p = 0$. Odtud a z definice skalárního součinu vektorů plyne

$$(u + v) \cdot p = u \cdot p + v \cdot p = 0 + 0 = 0 \text{ a } (cu) \cdot p = c(u \cdot p) = c\,0 = 0,$$

takže jak $u + v$, tak cu jsou prvky U. Opustili jsme speciální symboly, místo $\oplus$ píšeme jen $+$, znak $\odot$ je vypuštěn bez náhrady a symbol $\cdot$ značí skalární součin dvou vektorů.

Množina U tedy je vektorovým prostorem, zároveň však je i podmnožinou vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Říkáme, že U je vektorovým *podprostorem*.

Jiným příkladem podprostoru vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ je prostor řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic (říká se mu také nulový (pod)prostor). S tím byste se měli podrobněji seznámit v Matematice 1 a 4.

3.1.2 Funkce

Svět funkcí jedné nebo více proměnných je bohatým zdrojem rozličných vektorových prostorů funkcí s širokým využitím jak v teorii, tak v aplikacích, včetně mnoha inženýrských. Mnohé prostory funkcí mají své speciální označení a zpravidla splňují více než jen požadavky (12) až (19), například zavádějí pojem velikosti prvku (tj. funkce), v odborné terminologii jde o normu prvku. Pak hovoříme o normovaném vektorovém (lineárním) prostoru. Jelikož už ze středí školy znáte délku vektoru, nepřekvapí vás, že i na $\mathbb{R}^n$ lze pohlížet jako na normovaný lineární prostor. Záležitost normy, ač je opravdu důležitá, však ponechme stranou a omezme se jen na vektorové prostory, tedy struktury, které pojem normy ještě nezavádějí.

Při studiu se běžně setkáváte se spojitými funkcemi. Množina všech reálných funkcí reálné proměnné spojitých na intervalu I (omezeném, neomezeném, uzavřeném, otevřeném, polouzavřeném) se značí $C(I)$ a s operacemi sčítání $\oplus$ funkcí a násobení $\odot$ funkcí reálným číslem je vektorovým prostorem. K ověření jak uzavřenosti vzhledem k těmto operacím, tak vlastností (12) až (19) si stačí uvědomit, jak jsou operace $\oplus$ a $\odot$ definovány. Když však na cvičení při úvahách s funkcemi vidím to značné váhání a rozpaky, mám podezření, že řada studujících nemá dostatečně jasno v tom, jak se operace s funkcemi definují. Proto princip raději připomenu.

Mějme dvě funkce spojité na intervalu I, označme je f a g. Pak jejich součet $f \oplus g$ definujeme jako funkci na intervalu I, označme ji z, danou vztahem

$$\forall\, x \in I \quad z(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x).$$

Vidíme, že sčítání $\oplus$ je definováno pomocí standardního sčítání reálných čísel $f(x)$ a $g(x)$ prováděného bodově na intervalu I. Lze ukázat, že operace $\oplus$ zachovává spojitost, takže i funkce z je spojitá a je prvkem množiny (nebo přesněji vektorového prostoru) $C(I)$.

Analogicky definujeme násobení funkce f reálným číslem c

$$\forall x \in I \quad z(x) \stackrel{\text{def}}{=} cf(x),$$

spojitost je opět zachována.

Poznámka: Bodově se definují i další pojmy, například absolutní hodnota funkce f (označme ji $|f|$)

$$\forall x \in I \quad |f|(x) \stackrel{\text{def}}{=} |f(x)|,$$

kde na levé straně rovnosti stojí hodnota „nové“ funkce $|f|$ v bodě x a na straně pravé absolutní hodnota „staré“ funkce f v bodě x.

Vraťmě se k prostorům funkcí. Symbolem $C^n(I)$ se označuje množina funkcí, které jsou spojité na intervalu I včetně všech svých derivací až do řádu n včetně. Obsahuje-li interval I své koncové body, uvažují se v těchto bodech derivace jednostranné. Analogicky k $C(I)$ se ukáže, že $C^n(I)$ je vektorový prostor.

Sčítání funkcí a jejich násobení skalárem je tak přirozené a blízké operacím s reálnými čísly, že se pro tyto operace v praxi nepoužívají žádné speciální symboly $\oplus$ a $\odot$.

Mějme nyní dán interval I, bod $y \in I$ a číslo $a \in \mathbb{R}$. Kdy je množina

$$V = \{g \in C(I)|\ g(y) = a\}$$

vektorovým prostorem? Zdůrazněme, že množinu V tvoří všechny funkce spojité na intervalu I a takové, že v bodě y mají hodnotu a. Takových funkcí je nekonečně mnoho.

Pokud $a \neq 0$, ihned vidíme, že V nemůže být vektorovým prostorem. Důvodů je několik. Například neuzavřenost vzhledem k násobení skalárem. Jestliže totiž zvolíme reálné číslo c různé od jedničky, pak cg sice je spojitá funkce na intervalu I, avšak $cg(y) = ca \neq a$, takže funkce cg nepatří do množiny V, neboť v bodě y nemá hodnotu a. Podobně dopadne sčítání funkcí z V; součet dvou funkcí z V má v bodě y hodnotu $2a$, neleží tedy ve V. Také neplatí (14), protože nulový prvek (tj. funkce, která má na celém intervalu I hodnotu 0, tedy i v bodě y) neleží ve V. Ani (15) nemůže být splněno, protože v bodě y by opačný prvek měl hodnotu $-a$, pak ovšem neleží ve V.

Jestliže však $a = 0$, pak s uzavřeností V vzhledem ke sčítání a k násobení skalárem nejsou problémy. Též lze bez velkého úsilí ukázat, že platí (12)–(19). Pro $a = 0$ je V vektorovým prostorem, tj. podporostorem vektorového prostoru $C(I)$.

Jiným příkladem podprostoru vektorového prostoru spojitých funkcí může být

$$W = \left\{ h \in C([a,b])|\ \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\},$$

kde $C([a,b])$ značí vektorový prostor všech spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$.

S vektorovými (pod)prostory funkcí se setkáte v Matematice 3 v souvislosti s řešením lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s nulovou pravou stranou a také (více) v Matematice 4.

Důležitým vektorovým prostorem funkcí je prostor všech polynomů (definovaných například na celé reálné ose). Vskutku, součet dvou polynomů je opět polynom a polynom násobený reálným číslem je také polynom. Nulovým prvkem je konstantní polynom nula. Také zbývající požadavky ze sady (12) až (19) jsou splněny.

Poznamenejme, že prvkům vektorového prostoru se někdy říká vektory, přestože daný prostor není prostorem $\mathbb{R}^n$.

Symboly $\oplus$ a $\odot$ jsme účelově použili, abychom odlišili sčítání a násobení, do něhož vstupují i jiné matematické objekty než reálná čísla. Jak již bylo řečeno, v běžném počítání s vektorovými prostory se nepoužívají. Je to i kvůli tomu, že již mají své pevné místo v označení speciálních operací. Například $\oplus$ standardně značí direktní součet vektorových prostorů, o němž najdete poučení i v české Wikipedii, a $\odot$ je jednou z možností pro označení Hadamardova součinu matic.