

Eva Baranová, Kamil Maleček

OD STREDOVÉHO PRIEMETU KRUŽNICE KU STREDOVÝM CYKLIDÁM

Abstrakt

V prvej časti príspevku odvodzujeme podmienku, kedy je v danom stredovom premietaní priemetom kružnice opäť kružnica. Ukazujeme súvislosť so stredovou kolineáciou a lineárnou perspektívou. V druhej časti uvádzame ako využiť výsledky prvej časti k vytvoreniu stredových cyklidá a ich klasifikácie.

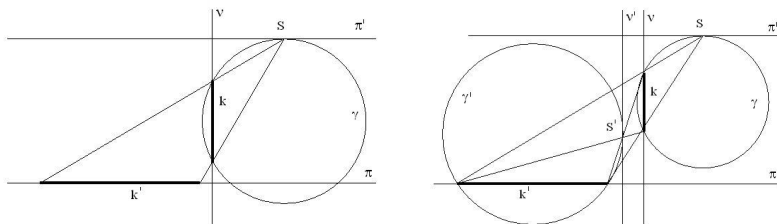
Kľúčové slová

Stredové premietanie, stereografická projekcia, kolineácia, lineárna perspektíva, cyklida.

1 Priemet kružnice v stredovom premietaní

Majme dané v priestore dve roviny π a ν , ktoré sú na seba kolmé a mimo nich bod S . V rovine ν zvolíme kružnicu k a zostrojme jej priemet v stredovom premietaní s priemetňou π a stredom S . Premietacou plochou kružnice k je kruhová kužeľová plocha s vrcholom S a jej rez rovinou π je stredový priemet kružnice k . Stredovým priemetom kružnice k môže byť vo všeobecnosti akákoľvek kužeľosečka.

Nás bude zaujímať, či je možné, aby stredovým priemetom kružnice k bola opäť kružnica a ak áno, tak pri akej voľbe kružnice k to nastane.



Obrázok 1, 2: Stredový priemet kružnice

Táto situácia je možná a vyplýva zo stereografickej projekcie. V stereografickej projekcii premietame guľovú plochu z jej bodu S do roviny, ktorá je rovnobežná s dotykovou rovinou guľovej plochy v bode

S a ako je známe, stereografickým priemetom kružnice, ktorá neprechádza bodom S , je opäť kružnica.

Voľba kružnice $k \subset v$ je znázornená na obr.1. Bodom S zostrojíme rovinu π' , ktorá je rovnobežná s rovinou π . Zostrojíme guľovú plochu γ , ktorá sa dotýka roviny π' v bode S a pretína rovinu v v kružnici k . Potom stredovým priemetom kružnice $k \subset v$ je kružnica $k' \subset \pi$. Je zrejmé, že kružnic k je nekonečne veľa a dostaneme ich ako krivky rezu roviny v a guľových plôch, ktoré sa dotýkajú roviny π' v bode S . Polomery guľových plôch musia byť väčšie ako je vzdialenosť bodu S od roviny v .

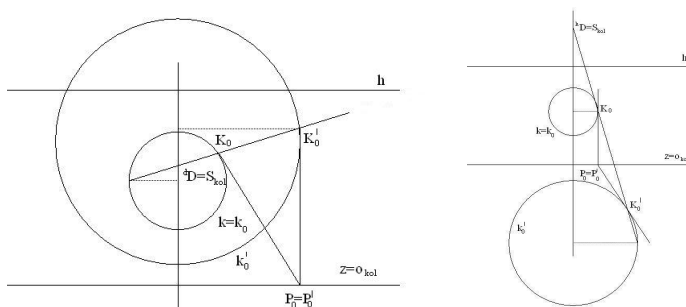
Majme kružnice $k \subset v$ a $k' \subset \pi$. Kružnica k' je stredovým priemetom kružnice k tak ako je to znázornené na obr.1. Existuje ale ešte jedno stredové premietanie, v ktorom je priemetom kružnice k kružnica k' . Na obr.2 je stredom premietania bod S' , ktorý je bodom guľovej plochy γ' . Na ploche γ' leží kružnica k' a dotyková rovina guľovej plochy γ' v bode S' je rovina $v' \parallel v$. Úloha roviny v a roviny π ako priemetne sa vymenia.

1.1 Súvislosť s priestorovou kolíneáciou

Majme dve kolmé roviny π a v a mimo nich bod S . Stredovým premietaním zo stredy S je realizované zobrazenie jednej roviny do druhej a zobrazenie sa nazýva priestorová kolíneácia. Bod S je stred a priesečnica rovin π a v je os kolíneácie. V predchádzajúcej časti sme vyriešili problém, či v danej priestorovej kolíneácii môže byť obrazom kružnice ležiacej v jednej rovine, kružnica v druhej rovine.

1.2 Súvislosť s lineárnou perspektívou

V perspektíve, keď priemetňou je rovina v , je rovina π základná a rovina π'



Obrázok 3, 4: Od lineárnej perspektívy k stredovej kolíneácii

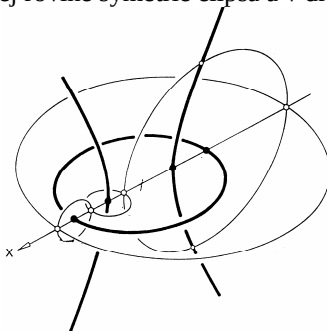
obzorová rovina, vid'. obr.1. Priesečnica z rovin π a π' je základnica a priesečnica rovin π a π' je horizont h . Ak otočíme v rovnakom zmysle rovinu π a π' do priemetne v , potom kružnica k' sa samozrejme otočí do zhodnej kružnice a otočením bodu S dostaneme buď dolný alebo horný dištančník. Situáciu v rovine v po otočení sme znázornili na obr.3 a obr.4. Všimnime si, že os kolineácie je chordála kružníc k_0 a k_0' .

2 Stredové cyklidy

V roku 1822 objavil francúzsky matematik Charles Dupin negul'ovú plochu, ktorej čiary krivosti boli kružnice a tvorili dve sústavy čiar na ploche. Túto plochu nazval **cyklida**. V prácach mnohých autorov [1], [2], [3] môžeme nájsť rôzne definície cyklíd. My použijeme nasledujúcu.

Definícia (Cayley): Cyklida je obálka meniacich sa guľových plôch, ktoré majú stredy v danej rovine a dotýkajú sa dvoch pevných guľových plôch.

Rovina stredov meniacich sa guľových plôch je prvá rovina symetrie a pretína pevné guľové plochy v extrémnych kružniciach cyklidy. Druhá rovina symetrie prechádza stredmi pevných guľových plôch a je kolmá k prvej rovine symetrie. Obsahuje tiež dve extrémne kružnice. Cyklida je kanálová plocha a jej charakteristické kružnice sú čiarami krivosti. Všetky normály kanálovej plochy (a teda aj cyklidy) pozdĺž jej charakteristiky prechádzajú spoločným bodom (stred guľovej plochy pre príslušnú polohu), ktorý leží na určujúcej krivke kanálovej plochy. Pre stredové cyklidy je určujúcou krivkou v prvej rovine symetrie elipsa a v druhej hyperbola obr.5.



Obrázok 5: Roviny symetrie

Pre každú charakteristiku vieme zostrojiť dotyčnicovú kužeľovú plochu príslušnej guľovej plochy, na ktorej charakteristika leží. Ortogonálne priemety pevných guľových plôch do prvej roviny symetrie sú ohraničené

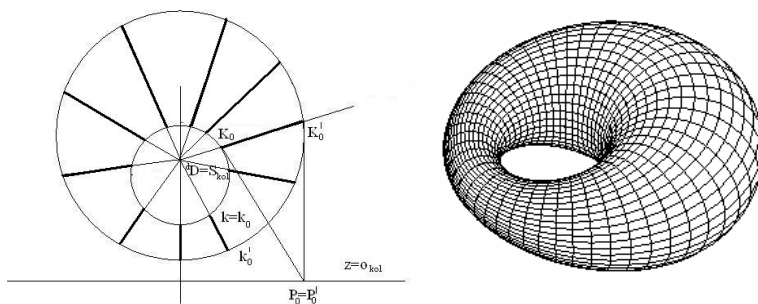
extrémnymi kružnicami a priemet dotyčnicovej kužeľovej plochy je ohraničený dotyčnicami týchto kružníc. Vrcholy dotyčnicových kužeľových plôch ležia na chordále oboch kružníc. Charakteristiky sa premietnu do úsečiek.

2.1 Konštrukcia cyklíd využitím stredovej kolineácie

Majme v rovine dve kružnice k_0 a k_0' s rôznymi stredmi a polomeri. Z predchádzajúcej časti vieme, že existujú dve stredové kolineácie, v ktorých obrazom jednej kružnice je druhá. Obe kolineácie majú spoločnú os, ale stredy sú rôzne. Pretože os kolineácie je chordála oboch kružníc, vieme z jej ľubovoľného bodu P_0 zostrojiť dotyčnice k oboj kružniciam (obr.3,4). Dotykové body K_0 (vzor) a K_0' (obraz) sú odpovedajúce body v danej stredovej kolineácii. Stred kolineácie je potom priesečník priamky $K_0 K_0'$ so spojnicou stredov kružníc k_0 a k_0' . Ak bod P_0 prebehne chordálu, dostaneme množinu úsečiek, ktorých krajné body sú vzor a obraz v niektorej kolineácii. Každú úsečku považujeme za pravouhlý priemet kružnice so stredom v rovine kružníc k_0 a k_0' do tejto roviny. Tak dostaneme systém kružníc, ktoré tvoria charakteristiky cyklidy. Tieto kružnice sú meridiány plochy.

2.2 Klasifikácia stredových cyklíd

Stredové cyklidy sa delia do troch skupín: ring, horn a spindle. Toto rozdelenie vieme určiť na základe stredovej kolineácie, ktorá platí pre extrémne kružnice v rovinách symetrie. My budeme uvažovať extrémne kružnice v prvej rovine symetrie.



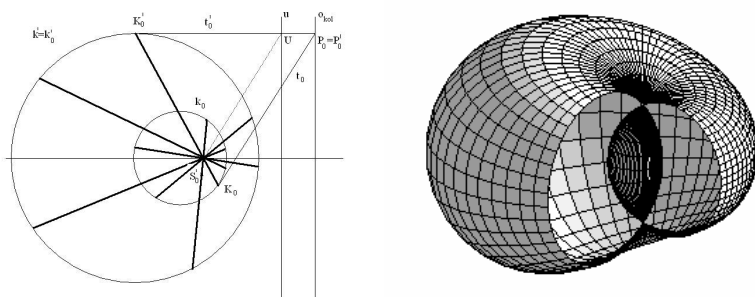
Obrázok 6: Ring cyklida

RING CYKLIDA - na obr.6 je ukážka konštrukcie ring cyklidy. Priemety meridiánov sú zvýraznené silnejšie. Pre extrémne kružnice platí, že jedna

OD STREDOVÉHO PRIEMETU KRUŽNICE KU...

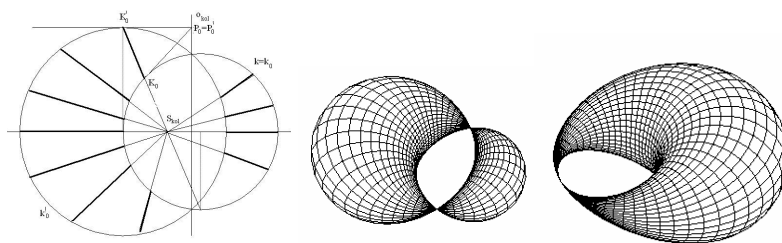
leží vo vnútri druhej. V prípade, že kružnice sú sústredné, dostaneme anuloid. Os kolineácie je nevlastná priamka a stred kolineácie je v strede sústredných kružníc.

SPINDLE CYKLIDA - základná poloha extrémnych kružníc je tá istá (obr.7). Uvažujme teraz stred druhej kolineácie, ktorá platí pre dve kružnice. Pre lepšiu názornosť je pre spindle cyklidu zostrojený výkroj plochy. Ak by sme uvažovali druhú kolineáciu pre sústredné kružnice, dostaneme špeciálny prípad anuloidu a to melonoid.



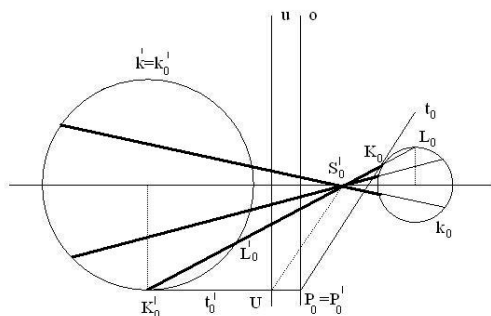
Obrázok 7: Spindle cyklida

HORN CYKLIDA - extrémne kružnice sa pretínajú, alebo dotýkajú (obr.8). V prípade, že by sme uvažovali druhý stred kolineácie, dostaneme spindle cyklidu.



Obrázok 8: Horn cyklida

Použitím stredovej kolineácie by sme vedeli určiť aj rovnobežkové kružnice cyklidy. Základná poloha extrémnych kružníc by však bola v druhej rovine symetrie. Na obr.9 je ukážka konštrukcie rovnobežkových kružníc pre spindle cyklidu.



Obrázok 9: Konštrukcia rovnobežkových kružníc

Názorné obrázky cyklíd boli vykreslené v programovom prostredí MAPLE použitím parametrických rovníc uvedených v [4].

Literatúra

- [1] V. Chandru, D. Dutta, C. M. Hoffmann: *On the geometry of Dupin cyclides*. The Visual Computer, Springer Verlag, No.5., 1989, pp.277-290
- [2] W. Boehn: *On cyclides in geometric modeling*, Computer Aided Geometric Design, No. 7, 1990, pp. 243-255
- [3] D. Dutta, R. R. Martin, M. J. Pratt: *Cyclides in Surfaces and Solid Modeling*, IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 13, No. 1, 1993, pp. 53-59
- [4] E. Baranová: *Cyklidy v geometrickom modelovaní*. In: Sborník příspěvků 24. ročník mezinárodní konference GCG 2004, Praděd-Jeseníky, ČR, ISBN 80-248-0581-2, 2004, pp.20-25