

Milada Kočandrlová

ELIPSOID HOMOTETICKÝ K REFERENČNÍMU ELIPSOIDU

Abstrakt

V bistatické altimetrii se ze znalosti polohy dvou satelitů S_1 , S_2 a délky $2a$ signálu vyslaného z jednoho na druhý satelit hledá bod P odrazu signálu na zemském tělese. Ze všech bodů dané vlastnosti zvolíme ten, který je nejbližší středu Země a sestojíme jím elipsoid homotetický k referenčním elipsoidům.

Klíčová slova

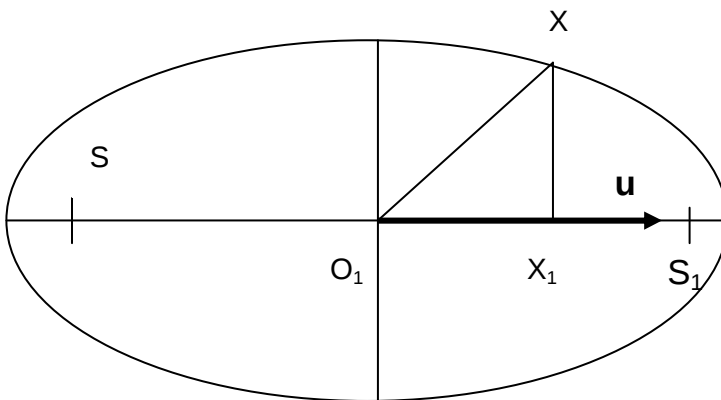
Bistatická altimetrie, referenční elipsoid, střed křivosti.

1 Úvod

Na elipsoidu odrazných bodů, označíme ho Q_1 , hledáme bod P , ve kterém se ho vně dotýká elipsoid homotetický s referenčním elipsoidem Q_0 .

2 Elipsoid odrazných bodů

Elipsoid Q_1 vyjádříme v geocentrické soustavě souřadnic. Jeho střed je bod $O_1 = (S_1 + S_2)/2$. Jednotkový vektor osy elipsoidu označíme $\mathbf{u} = (S_1 - S_2)/2e$.



Pro body X elipsy, jejíž rotací vzniká elipsoid Q_1 , platí

$$|O_1 X_1| = \mathbf{u}(X - O_1), \quad (1)$$

$$|XX_1|^2 = |O_1 X|^2 - |O_1 X_1|^2. \quad (2)$$

Středová rovnice této elipsy potom je

$$\frac{|O_1 X_1|^2}{a^2} + \frac{|XX_1|^2}{b^2} = 1. \quad (3)$$

Dosazením (1) a (2) do rovnice (3) postupně dostáváme rovnici (4) elipsoidu Q_1

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{u}(X - O_1))^2}{a^2} + \frac{(X - O_1)^2 - (\mathbf{u}(X - O_1))^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{(X - O_1)^2}{b^2} + (\mathbf{u}(X - O_1))^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) &= 1, \\ (X - O_1)^2 - \frac{e^2}{a^2} (\mathbf{u}(X - O_1))^2 - b^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Rozepsáním do souřadnic má rovnice elipsoidu tvar

$$\begin{aligned} x_1^2 \left(1 - \frac{e^2 u_1^2}{a^2} \right) + x_2^2 \left(1 - \frac{e^2 u_2^2}{a^2} \right) + x_3^2 \left(1 - \frac{e^2 u_3^2}{a^2} \right) - \\ - 2x_1 x_2 \frac{e^2 u_1 u_2}{a^2} - 2x_1 x_3 \frac{e^2 u_1 u_3}{a^2} - 2x_2 x_3 \frac{e^2 u_2 u_3}{a^2} + \\ + 2x_1 \left(\frac{e^2}{a^2} u_1 (\mathbf{u} \mathbf{o}_1) - o_1 \right) + 2x_2 \left(\frac{e^2}{a^2} u_2 (\mathbf{u} \mathbf{o}_1) - o_2 \right) + \\ + 2x_3 \left(\frac{e^2}{a^2} u_3 (\mathbf{u} \mathbf{o}_1) - o_3 \right) + \mathbf{o}_1^2 - b^2 - \frac{e^2}{a^2} (\mathbf{u} \mathbf{o}_1)^2 = 0, \end{aligned}$$

kde jsme označili $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vektor osy elipsoidu Q'_1 a $\mathbf{o}_1 = (o_1, o_2, o_3)$ radius vektor jejího středu O_1 .

Označíme-li ještě $\varepsilon = e/a$, matice elipsoidu je

$$F = \begin{pmatrix} \mathbf{o}_1^2 - b^2 - \varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1)^2 & u_1\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_1 & u_2\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_2 & u_3\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_3 \\ u_1\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_1 & 1 - u_1^2\varepsilon^2 & -u_1u_2\varepsilon^2 & -u_1u_3\varepsilon^2 \\ u_2\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_2 & -u_1u_2\varepsilon^2 & 1 - u_2^2\varepsilon^2 & -u_2u_3\varepsilon^2 \\ u_3\varepsilon^2(\mathbf{u}\mathbf{o}_1) - o_3 & -u_1u_3\varepsilon^2 & -u_2u_3\varepsilon^2 & 1 - u_3^2\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

3 Afinita referenčního elipsoidu

Afinita, která převádí referenční elipsoid Q_0 , s poloosami a_0, b_0 , na sféru, bude mít vyjádření

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z/q, \quad (5)$$

kde jsme označili $q = b_0/a_0$.

V této afinitě je obrazem rotačního elipsoidu Q_1 nerotační elipsoid, označíme ho Q'_1 . Jestliže $f_{ij}, i, j = 0, \dots, 3$, jsou prvky matice F , potom

$$F' = \begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & qf_{03} \\ f_{01} & f_{11} & f_{12} & qf_{13} \\ f_{02} & f_{12} & f_{22} & qf_{23} \\ qf_{03} & qf_{13} & qf_{23} & q^2 f_{33} \end{pmatrix}$$

je matice elipsoidu Q'_1 . Tím je řešená úloha transformována na úlohu najít na daném elipsoidu Q'_1 bod, který je nejbližše středu referenčního elipsoidu, tedy i afinní sféry.

4 Minimální vzdálenost bodu od elipsoidu

Označíme O_0 , resp. O'_1 střed referenčního elipsoidu Q_0 , resp. elipsoidu Q'_1 . Úsečka $O_0O'_1$ protíná elipsoid Q'_1 v bodě P' . V bodě P' zvolíme normálovou rovinu elipsoidu Q'_1 , která obsahuje bod O_0 , jednotkový normálový vektor $\mathbf{n}$ a jednotkový tečný vektor $\mathbf{t}$ elipsoidu Q'_1 v bodě P' . Přitom normálový vektor orientujeme dovnitř elipsoidu.

V bodě P' určíme střed normálové křivosti elipsoidu O'_1 ve směru tečného vektoru. Tento střed přebírá úlohu bodu O'_1 , tj. určíme průsečík P' nové úsečky $O_0O'_1$ s elipsoidem Q'_1 . Tak sestojíme posloupnost průsečíků P' s elipsoidem Q'_1 , která konverguje k bodu elipsoidu Q'_1 o nejmenší vzdálenosti od středu referenčního elipsoidu Q_0 .

Podmínku cyklu lze volit obvyklým způsobem – počet iterací, vzdálenost bodu P' ve dvou po sobě jdoucích iteracích apod. Ukazuje se, že plně stačí deset iterací.

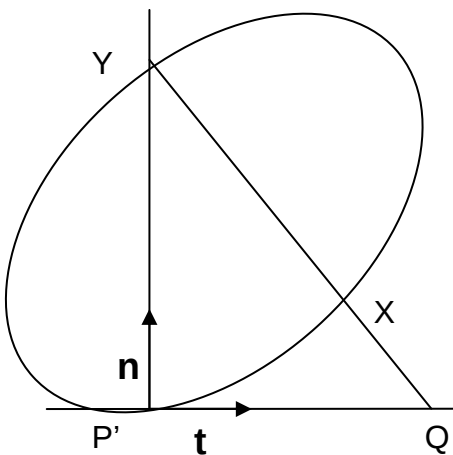
5 Střed křivosti normálového řezu elipsoidu

Střed normálové křivosti elipsoidu Q'_1 v bodě P' je středem křivosti jeho normálového řezu. Abychom tento řez analyticky popsali, zvolíme v normálové rovině kartézskou soustavu souřadnic $\langle P, \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle$. Rovnice elipsy řezu v příslušných homogenních souřadnicích bude

$$(x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

kde $a_{00} = 0$. Rovnice její tečny v počátku je

$$a_{01}x_1 + a_{02}x_2 = 0.$$



Odtud plyne $a_{01} = 0$. Rovnice (6) v kartézských souřadnicích nyní je

$$a_{11}x^2 + 2a_{02}xy + a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0. \quad (7)$$

ELIPSOID HOMOTETICKÝ K REFERENČNÍMU ELIPSOIDU

Pro některé výpočty v algoritmu je vhodné parametrické vyjádření elipsy (7). Budeme ji parametrizovat svazkem přímek o středu v bodě Y , tj. průsečík s osou y , bod $Y = [0, -2a_{02}/a_{22}]$.

Druhým bodem těchto přímek bude jejich průsečík s osou x , označíme ho $Q = [t, 0]$. Potom parametrické vyjádření svazku přímek je

$$X = Y + \alpha(Q - Y) = \left[\alpha t, \frac{2a_{02}}{a_{22}}(\alpha - 1) \right]. \quad (8)$$

Bod X z rovnice (8) dosadíme do rovnice (7) elipsy a vypočítáme parametr α

$$\alpha = \frac{4a_{02}(a_{12}t + a_{02})}{a_{11}a_{22}t^2 + 4a_{02}a_{12}t + 4a_{02}^2}.$$

Potom dosazením do (8) dostáváme hledanou parametrizaci elipsy

$$X = \left[\frac{4a_{02}(a_{12}t + a_{02})t}{a_{11}a_{22}t^2 + 4a_{02}a_{12}t + 4a_{02}^2}, \frac{-2a_{02}a_{11}t^2}{a_{11}a_{22}t^2 + 4a_{02}a_{12}t + 4a_{02}^2} \right]. \quad (9)$$

Pro křivost k křivky, dané explicitní rovnicí $y = y(x)$, platí známý vzorec

$$k = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}.$$

Obě derivace vypočítáme z implicitní rovnice (7) elipsy. Je

$$0 = a_{11}x + a_{02}y' + a_{12}y + a_{12}xy' + a_{22}yy',$$

$$0 = a_{11} + a_{02}y'' + 2a_{12}y' + a_{12}xy'' + a_{22}y'^2 + a_{22}yy''.$$

Odtud derivace v bodě P' jsou

$$y' = 0, \quad y'' = -\frac{a_{11}}{a_{02}}.$$

Potom hledaná křivost je $k = y''$ a odpovídající poloměr křivosti její převrácená hodnota, tj.

$$r = \frac{a_{02}}{a_{11}}.$$

Střed křivosti elipsy v bodě P' je $S = P' + r \mathbf{n}$.

6 Homotetický elipsoid

K bodu P' elipsoidu Q'_1 v inverzní afinitě k afinitě (5) určíme obraz P na elipsoidu Q_1 . Pro různé geodetické výpočty se používají různé referenční elipsoidy, v současné době je jich aspoň padesát. Elipsoid procházející odrazným bodem P určíme stejnolehlostí o středu O_0 . Koeficient této stejnolehlosti je dán dvojicí bodů P, P_0 , kde P_0 je průsečík polopřímky O_0P s referenčním elipsoidem Q_0 .

7 Závěr

Toto je jedno z komplexních matematických řešení problému bistatické altimetrie. Další lze najít v [1], [2].

Literatura

- [1] Kočandrlová M.: *Singulární kvadriky v modelu GPS-altimetrie*, Sborník 24. konference GCG, VŠB-TU Ostrava, 2004, str. 76-9
- [2] Kočandrlová M.: *Středy normálových křivostí elipsoidu v modelu bistatické altimetrie*, Proceedings of Symposium on Computer Geometry, v.14, SSGG, Kočovce, 2005, str. 37-41