

Iva Křivková

POUŽITÍ PROGRAMU GEOMETRICA 02

Abstrakt

Geometrica je rozšířením programu Mathematica a slouží k snadnější práci s geometrickými objekty (bod, přímka, rovina, plocha). Příspěvek se zabývá možnostmi, přínosy a limity tohoto programu při řešení úloh středoškolské i vysokoškolské geometrie.

Klíčová slova

Geometrica, Mathematica, vizualizace, analytická geometrie

1 Grafické možnosti programu Mathematica

Snaha o geometrické a grafické využití širokých možností softwaru Mathematica není novinkou. Již i starší verze umožňovaly různými způsoby prezentovat grafiku. Základní grafická primitiva, se kterými bylo možné pracovat, byla např. Point, Line, Polygon, Circle, či Disk. Vlastní kresba pak byla realizována především příkazy Plot, ParametricPlot, Plot3D a ParametricPlot3D s možnostmi výběru doplňujících podmínek, např. Frame, Box, Axes, Ticks. Zobrazení se provádělo v trojúhelníkové perspektivě s možností volby středu promítání. Částečně bylo také možné použít osvětlení. Tento nástroj byl sice poněkud těžkopádný, ale jak dokázaly mnohé semestrální práce, studenti byli schopni dosáhnout pěkných výsledků. Každou geometrickou konstrukci nad rámec základních příkazů však bylo nutné naprogramovat samostatně.

2 Objekty modulu Geometrica a práce s nimi

Geometrica je rozšířením programu Mathematica, které má zjednodušit práci s geometrickými objekty. Základní grafická primitiva ani způsob práce se nemění, ale nabízí se možnost pracovat s řadou hotových speciálních příkazů, které práci usnadní.

Především se nabízí výběr, zda chceme pracovat s objekty zadanými „euklidovsky“ nebo „kartézsky“. To se odlišuje písmeny E a C u příslušného příkazu (např. ELine, CLine), ale program provádí automaticky konverzi na zadání v kartézských souřadnicích. Speciální objekty, které bez použití softwaru Geometrica bylo nutné naprogramovat, jsou:

- body (např. `BrianchonPoint`, `CenterOfGravity`, `Circumcenter`, `Orthcenter`, `Pole`)
- přímky (např. `Altitudes`, `Asymptotes`, `Bisector`, `ConicAxes`, `Diagonals`, `Directrix`, `Medians`, `Normals`, `Polar`)
- roviny (např. `Bisector a Plane`)
- kuželosečky a kvadriky (např. `CConic`, `Conic`, `Quadric`, `ECircle`, `Sphere`, `Ellipse`, `Parabola`, `Paraboloid`)
- křivky a plochy (např. `Bezier`, `Cubic`, `Cone`, `Cylinder`, `SolidOfRevolution`)
- lomené čáry, mnohoúhelníky a mnohostěny (např. `Isosceles`, `Diamond`, `Cube`, `PlatonicSolid`, `Pyramid`).

Se zadanými objekty je možné provádět transformace nejen shodné nebo afinní, ale také např. kruhovou inverzi. Rovněž můžeme získat údaje o délkách, vzdálenostech, úhlech nebo plošných obsazích. Vzhledem k numericky prováděným reprezentacím euklidovských konstrukcí jsou užitečné příkazy testovací (např. `Complanar`, `TangentQ`, `ParallelQ`).

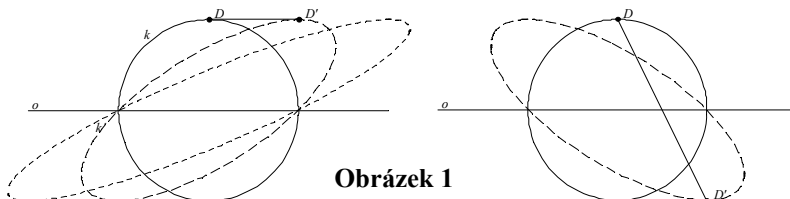
3 Řešení úloh se softwarem Geometrica

Dříve než v rámci práce s programem Mathematica použijeme modul Geometrica 02, je nutné provést příkaz `<<Geometrica`Geometrica02``.

Částí středoškolského kurzu matematiky, kde je vizualizace pojmů rozhodně užitečná, je analytická geometrie. Za souřadnicemi bodů či rovnicemi přímek často studenti nevidí jejich grafickou podobu. Geometrica může být v tomto směru dobrým nástrojem. Nejjednodušším použitím je sledování vlivu změny parametrů v obecné rovnici přímky, kdy je výhodné použít příkazy `StoryBoard` nebo `Movie`. Stejným způsobem je možné pracovat s afinitou v rovině i v prostoru, kde podle zkušeností se studenty 1. ročníku FSv ČVUT je propojení stránky analytické a grafické prakticky nulové.

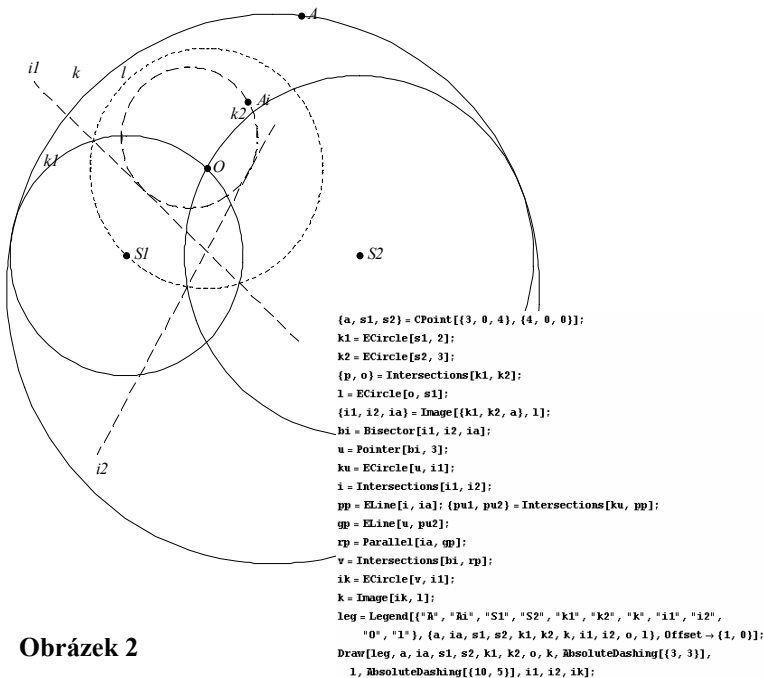
Dalším námětem pro použití programu Geometrica je hledání involutorní afinity. Osová afinita je zadána rovnicemi $x' = x + y$, $y' = y$. V levé části obr. 1 jsou zachyceny kružnice k , její obraz k' v této afinitě, osa o a dvojice bodů D a D' , které jsou vzorem a obrazem. Pokud zobrazíme elipsu k' v této afinitě ještě jednou, získáme další elipsu k'' . Úkolem je modifikovat rovnice afinity tak, aby elipsa k'' splynula s původní kružnicí k . V pravé části obr. 1 je zachycena situace pro afinitu $x' = x + y$, $y' = -y$, která tento požadavek splňuje. Úvahy by pak pro studenta měly směřovat k odhalení nutnosti, aby střed úsečky DD' ležel na ose afinity o (testovací příkaz `OfQ`), a k zavedení pojmu charakteristika afinity. Program Geometrica umožňuje snadno získat metrické údaje o délkách úseček, velikostech úhlů a plošných

obsazích (příkazy Distance, Angle a Area), je možné hledat kromě involucí také zobrazení shodná, konformní nebo ekviafínní.



Obrázek 1

Jako ukázkou použití programu Geometrica při řešení čistě konstrukční úlohy uvedme jednu z Apolloniových úloh. Máme sestavit alespoň jednu kružnici, která se dotýká zadaných kružnic k_1 , k_2 a prochází bodem A . Na obr. 2 je kromě grafického výstupu řešení tohoto příkladu posloupnost příkazů, které k němu vedou. Geometrica poskytuje možnost získat obraz objektu v kruhové inverzi (Image), která je jedna z mála nelineárních transformací, se kterými se studenti mohou setkat. Proto její konstrukční využití může být pro studenty zajímavé.

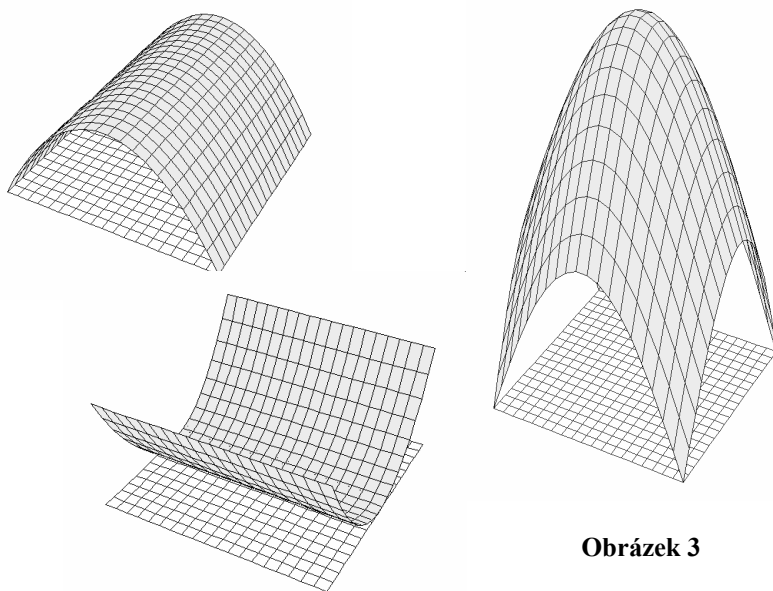


Obrázek 2

V trojrozměrném euklidovském prostoru se objekty zobrazují příkazem Draw3D. Je-li rovina zadána obecnou rovnicí, zobrazuje se z ní část, která je symetrická podle kolmého průmětu počátku soustavy souřadnic do této roviny. Pokud chceme zobrazovanou část změnit, je nejkratší cestou použití příkazu PlaneOrigin, kdy se pak vykreslí část roviny kolem kolmého průmětu libovolného zvoleného bodu. Chceme-li, aby zadané objekty byly zobrazeny s uplatněním viditelnosti, je možné např. použít příkaz Paint.

Výhodnost snadné vizualizace v trojrozměrném prostoru pomocí programu Geometrica můžeme dokumentovat na formování plochy nad čtvercovým půdorysem. Pokud použijeme příkaz Paraxial, lze pracovat se širokou nabídkou použitelných funkcí programu Mathematica. Zadáme-li parametricky plochu Ω , pak příkazem Paraxial $[\Omega, f]$ získáme plochu, která je tvořena body ve vzdálenosti f od plochy Ω , přitom f je funkce dvou proměnných. Na obr. 3 je čtvercový půdorys modifikován funkcemi

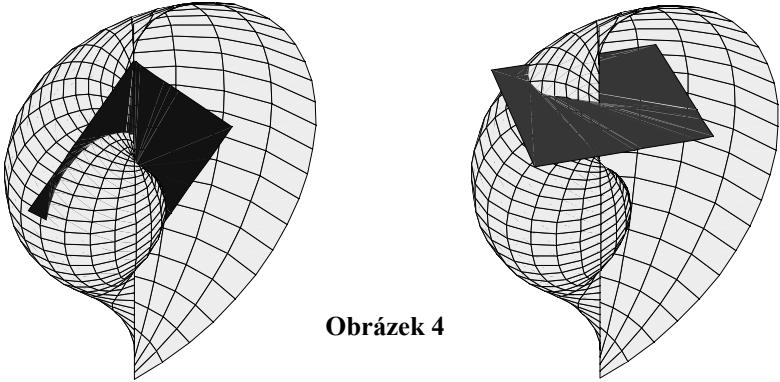
$$f = -2(t_1 - 0.5)^2 + 0.5, f = 2(t_2 - 0.5)^2 \text{ a } f = \sin \pi t_1 + \sin \pi t_2.$$



Obrázek 3

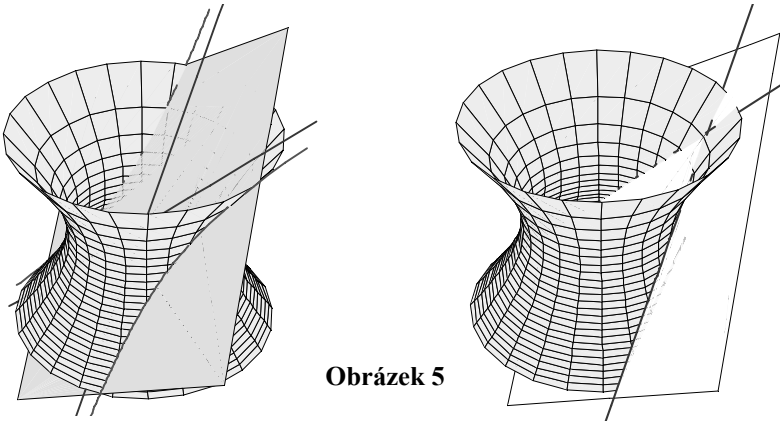
V situaci, kdy výchozí plochou je část roviny, se výhodnost příkazu Paraxial plně neprojeví, stejného efektu bychom docílili příkazem ParametricPlot3D, ale výchozí plocha Ω může být libovolná a lze získat velmi zajímavé výsledky. Na obr. 4 je např. použita jako výchozí kulová plocha,

modifikující funkce je $f = t_1 - t_2$. Výsledná plocha má dosti komplikovaný tvar a pro lepší představu o něm jsou doplněny řezy rovinami.



Obrázek 4

Chceme-li s programem Geometrica studovat kuželosečky a kvadriky, nemusíme se omezit jen na grafický výstup, ale přejít od euklidovského určení k analytickému popisu. Např. v obr. 5 je zadán jednodílný rotační hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ a dvě roviny řezu s obecnými rovnicemi $x + y - z = 0$ a $x + y - z - 1 = 0$. Roviny lze ovšem zadat i trojicí nekomplanárních bodů nebo jinou euklidovskou konstrukcí. Použijeme-li příkaz Intersections, můžeme nejen rozhodnout, zda řezem je elipsa, hyperbola či např. dvojice různoběžek, ale získat i jejich analytické vyjádření. S průnikovou křivkou je možné dále pracovat, u hyperbolického řezu získat asymptoty, střed, osy, ohniska, řídící přímku (vykresleny jsou pouze



Obrázek 5

asymptoty). V tomto směru je Geometrica vybavena dostatečným aparátem. Bohužel chybí možnost práce s projektivními transformacemi.

Postup od kuželosečky v trojrozměrném prostoru k planimetrickým konstrukcím není složitý, komplikovanější je zadat kuželosečku v obecné rovině. K tomu slouží příkaz CConic[c,p], kde c je kuželosečka a p zvolená rovina. Pokud je rovnice roviny $p: z = 0$, výsledek příkazu tentýž jako To3D[c], jde-li o rovinu $z = d$, provede se posunutí, ale pokud se jedná o jinou rovinu, je kuželosečka získána otočením do roviny p kolem průsečnice s rovinou $z = 0$. Pokud se nejedná o některou ze souřadnicových rovin, je tento postup zadávání dosti náročný. Chybí možnost zadat kuželosečku v obecné rovině např. středem, hlavním vrcholem a délkou vedlejší poloosy.

4 Přínosy a nevýhody programu Geometrica

Rozhodnutí, jaký grafický software bude nejúčelnější pro výuku, je závislé na cíli, který si klademe. Chceme-li získat rychle a snadno obrázky jednoduchých geometrických objektů, není Geometrica tím nejlepším krokem. Pokud ale chceme vizualizovat analytickou geometrii v rovině i prostoru, může být tento nástroj velmi účelný. Je možné zapojit všechny části programu Mathematica. Náповěda je zpracována podrobně. Největší přínos je v možnosti pracovat se symbolickými objekty. Spojení analytické geometrie s vizuální stránkou zvyšuje názornost, algebraické pojmy nezůstávají odtržené od jejich geometrické interpretace. Navíc chceme-li získat pomocí programu Geometrica grafický výstup, je nutné přesně promyslet posloupnost příkazů. I to lze označit z výchovného hlediska za přínos. Pokud požadovaný výstup má směřovat spíše k technickému výkresu, pak podpora CAD funkcí není příliš bohatá. Pracná je změna typu čáry, popis objektů je nutné často upravovat příkazem Offset. S grafikou je jen málo možné manipulovat myší. To jsou ovšem jen technické připomínky. V oblasti obsahové by bylo vhodné doplnit projektivní transformace, obzvláště proto, že část zabývající se kuželosečkami je zpracována do velké šíře. Totéž platí o zmíněném zadávání kuželosečky v obecné rovině. Jinak totiž základní středoškolské učivo program Geometrica 02 nejen dostatečně pokrývá, ale i přesahuje.

Literatura

- [1] J. Černý: *Konstruktivní geometrie. Křivky a plochy se softwarem Mathematica*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999.
- [2] Geometrica 02, uživatelský manuál, Video Atelier, 1997-2003.