

František Kuřina

GEOMETRIE A GEOMETRICKÉ VZDĚLÁVÁNÍ

Abstrakt

Na základě podnětů tří knih o geometrii se příspěvek zabývá otázkou postavení geometrie v současném vzdělávání na střední a vysoké škole. Základní otázka, kterou by měl příspěvek vyprovokovat, zní: Jak učit matematiku, aby rozvíjela myšlení. Dílčí hypotetický závěr je uveden ve třetí části příspěvku.

Klíčová slova

Geometrie, axiomatika, historie, geometrické vzdělávání, transmise struktury, řešení úloh

Je pro mne ctí, že mohu před tak kvalifikovaným plénem odborníků na geometrii a počítačovou grafiku vystoupit s referátem pedagogického zaměření. Chci se zamyslet nad některými otázkami geometrického a obecně matematického vzdělávání, které vyvstaly při studiu tří pozoruhodných publikací: 5 000 let geometrie [1], Matematika: hranice a perspektivy [2] a sborník příspěvků z konference o počítačové grafice 2004 [3].

1 Charakteristika zdrojů

Kniha „5 000 let geometrie“ je bohatě ilustrovaná publikace s rozsahem 596 stran, v níž autoři shromáždili velké množství materiálu nazíraného z hlediska historického, kulturního a společenského. Historie je členěna do osmi kapitol, publikace dále obsahuje výběr originálních textů, mezi jinými např. Platona, Archimeda, Helmholtze a Abbota a obsáhlý soubor úloh inspirovaný historií. Jejich řešitelé tak mají příležitost vcítit se do vývoje mnoha matematických problémů.

Velkou předností knihy jsou bezesporu její ilustrace. Geometrické ornamenty, z nichž se zde některé reprodukují, jsou podle publikace doložitelné již z doby 40 000 let př. n. l. Kromě ukázek ilustrací z Euklidových Základů zde nalezneme např. obrázky z knih čínských a japonských, z geometrie Boethiovy, z tvorby Dürerovy a Leonardovy, ale i reprodukce obrazů Escherových, prací Salvadora Daliho (krucifix ve tvaru

sítě čtyřdimenzionální krychle) nebo aperiodickou parketáž Penrosovu. Mnohé ilustrace jsou barevné.

Každá epocha je charakterizována výčtem řady vědeckých, technických a společenských událostí. Na pozadí této „scény“ charakterizují autoři „podstatné geometrické jevy“ studované éry v těchto oblastech: deskriptivní geometrie, projektivní geometrie, teorie geometrických konstrukcí, diferenciální geometrie, „vnitřní geometrie“ ploch, neeuklidovská geometrie, n-dimenzioální geometrie a vektorový počet, grupy transformací, základy geometrie.

Z naznačeného výčtu je zřejmé, jak obrovský úkol si autoři stanovili. Je pochopitelné, že dovést takto založený úkol až do r. 1991 (jak autoři proklamují), je sotva splnitelný úkol. Srovnají-li zájemci charakteristiku geometrie 20. století v publikaci [1] např. s rozbořem I. Koláře [4], budou se mnou patrně souhlasit, že hodnocení „v každém směru excelentní kniha“ z české recenze autorů K. Malečka a Z. Nádeníka [5], je poněkud nekritické. Souhlasím ovšem s jejich hodnocením, že se autorům „zdařilo velmi přirozeně spojit historii geometrie s obecným kulturním vývojem i dějinami vůbec“.

Český čtenář bude jistě hledat, zda autoři 5 000 let uvádějí nějaké geometrické podněty z našich zemí. V knize marně hledáme např. zmínku o V. Hlavatém nebo E. Čechovi, dozvíme se však, že obávaný profesor pražské univerzity v letech 1803 – 1857 Ladislav Jandera, byl „matematický mužiček“, jakoby vzatý z pohádky E. T. A. Hoffmanna (s. 551) a že prof. F. Kadeřávek byl synem řemeslníka z pražské chirurgické kliniky (s. 508). Profesor K. Havlíček je uveden v rejstříku, ale nikde jinde v knize jsem o něm zmínku nenašel. Najdeme zde ovšem informace o pracech F.Kadeřávka a o knize Objektivem počítače od L.Drse a J. Všeťečky.

Podstatným nedostatkem knihy je, jak uvádějí i citovaní recenzenti, že autoři prakticky nepřihlížejí k francouzské a ruské literatuře (pokud nebyla přeložena do angličtiny nebo němčiny) a např. algebraická geometrie z 19. století prakticky vypadla. Přesto je kniha 5 000 let geometrie publikací krásnou a každý milovník geometrie v ní najde řadu podnětů. Vřele ji doporučuji ke studiu.

Druhá kniha „Hranice a perspektivy“ má zcela odlišný charakter. Je to publikace, kterou k roku 2000 jako Mezinárodnímu roku matematiky zpracovali pod patronací Mezinárodní matematické unie „velcí“ matematici současnosti. Připomeňme z nejznámějších aspoň M. Atiyaha, R. Penrose, A. Wilese a V. I. Arnolda. Autoři se snaží, inspirováni Hilbertovými problémy z roku 1900, na 459 stránkách, formulovat vizi současné matematiky. Explicitně uvádí 18 problémů pro 21. století

S. Smale. Tyto problémy nejsou pro mne přirozeně zcela srozumitelné, přesto jsem však jako učitel matematiky našel v knize několik zajímavých otázek, k nimž se vrátím v druhé části příspěvku.

Třetí publikace, která mi dala podněty k zamyšlení, je sborník [3]. V něm je představena geometrická tvorba 57 autorů, převážně z českých vysokých škol z let 2003 a 2004. Vzhledem k tomu, že to není jistě veškerá geometrická tvorba autorů z České republiky, zdá se mi těchto 263 stránek dokladem dosti dobrého výkonu geometrické vědy. Bylo by jistě poučné zhodnotit tuto produkci z hlediska originality výsledků a jejího přínosu současnému bádání. To je ovšem nad mé možnosti. Řada prací má „aplikační“ charakter: výsledky známé z teorie se aplikují na řešení určitého geometrického nebo technického problému. Není sporu o tom, že i takovéto práce jsou potřebné a rozvoji poznání slouží. Některé práce jsou spjaty s pedagogickými otázkami a historií vědy. I takováto pojednání mají svůj význam.

2 O geometrii

Dosti dobrou představu o té složce matematiky, kterou nazýváme tradičně geometrií, si můžeme učinit na základě publikací [1] a [3]. Pozoruhodné charakteristiky této disciplíny připomeňme z klasické *Hilbertovy* práce [6] a ze stati *Davida Ruella* publikované v knize [2].

Hilbert píše: „V matematice se setkáváme, podobně jako v jiných oblastech bádání, se dvěma tendencemi: s tendencí k abstrakci a tendencí k názornosti. Tendence k abstrakci se snaží na základě logiky oboru disciplínu systematicky uspořádat. Názornost vychází z živého nazírání a z jejích obsahových vztahů. V geometrii vedly abstraktní principy k velkolepým systematickým stavbám, jakými jsou např. algebraická a Riemannova geometrie a topologie. V nich se podařilo široce aplikovat abstraktní uvažování, symboliku a kalkuly. Přesto však hraje i dnes významnou roli v geometrii i názornost, a to nejen jako podnětující síla v bádání; pomáhá i s oceněním jeho výsledků“ [6].

Dnes hodnotí *D. Ruell* geometrii takto: „Současný matematik listující Euklidem zde nalézá zcela netriviální i když dobře známé věty. Řecká geometrie je raná sice, ale zcela moderní matematika. Ukazuje jasněji než matematika pozdější dvě zvláštnosti lidského rozumu, který ji produkuje:

- 1) Užívá vizuální systém. Sama geometrie je přímo odvozena z vizuálních zkušeností a intuice.
- 2) Užívá „externí paměť“ ve formě kreslených čar a kružnic s body označenými písmeny“ ([2], s. 256).

Kombinace těchto dvou zvláštností umožňuje vypracovat logické konstrukce, které Řekové oprávněně považují za významný intelektuální výkon. Hilbertova verze geometrie „bez obrázků“ ukazuje, o jak obtížný předmět jde ([2], s. 256).

Významu vizuálních aspektů matematického nazírání jsem si všiml již před více než 20 léty a na elementární úrovni jsem na toto téma publikoval knihu „*Umění vidět v matematice*“ [7]. Podobnou tematikou se dnes zabývají např. knihy amerického autora *R. B. Nelsena Proofs without Words* [8].

Po tomto výkladu se naléhavě vtírá otázka: „Co je příčinou toho, že geometrie hraje dnes, jak ve školské matematice, tak i v matematice pěstované na vědecké úrovni, spíše vedlejší než hlavní roli?“ Pro mne přesvědčivou odpověď jsem našel ve vývoji matematiky ve dvacátém století silně ovlivněném Hilbertovým „nejslavnějším žákem“ *N. Bourbakiem*. Podle Bourbakiho je geometrie vyčerpanou žílou, které se s úspěchem mohou věnovat milovníci geometrie trojúhelníku, čtyřstěnu,..., která však neobsahuje strukturální problémy schopné dát impulsy dalším odvětvím matematiky. Je zajímavé, že *Eduard Čech* napsal v r. 1953: „Když jsem před 40 lety vstoupil na univerzitu jako student matematiky, měl jsem ten dojem, že geometrie, kterou jsem měl po celý život ve zvláštní oblibě, se stává poměrně málo významnou částí matematiky. Ve skutečnosti jsou právě dvacátá léta tohoto století počátkem úžasného, dodnes trvajících rozmachu geometrie.“ Tento pohled je podle mého názoru zcela v souladu se současnými názory *M. Atiaha*, jak je publikuje v předmluvě knihy [2]. Bourbakiho éru následuje „hybridní“ perioda, v níž se spojují různí specialisté (algebraická topologie a topologické grupy) tak, že konec 20. století znamená návrat k duchu matematiky *H. Poincarého*, s důrazem na geometrické myšlení i v takových oblastech jako je algebra nebo teorie čísel.

Tyto otázky souvisejí s podněty, z nichž matematika čerpá svou sílu. V roce 1941 napsal *R. Courant*: „V současnosti převládající zdůrazňování deduktivně–logického charakteru matematiky považujeme za velmi nebezpečné. Je sice pravda, že není lehké popsat, co je tvořivý objev nebo úspěšný intuitivní začátek, přesto však právě tyto jevy tvoří jádro i těch nejabstraktnějších matematických výsledků. Krystalicky čistá deduktivní forma je možná cílem matematiky, ale její hybnou silou je intuice. Vážné ohrožení pro samotný život matematiky vyplývá z tvrzení, že matematika není nic jiného než bezesporný systém důsledků odvozený z definic a axiomů.“

Podle mého názoru v takto nebezpečném pojetí žijeme ve značné části matematiky přednášené na našich vysokých školách, patrně i technických,

dodnes. V přednáškách se obvykle snažíme podat ucelený výklad části určité teoretické disciplíny, úlohy a problémy, z nichž disciplína vyrůstala, zůstávají v pozadí, pokud vůbec naleznou v kurzu uplatnění. Jakoby polemizoval s Courantovými názory uvádí V. I. Arnold v citovaných *Perspektivách* [2]: „Matematiku můžeme rozdělit na tři části: *kryptografii* (placenou CIA, KGB apod.), jejímž plodem je teorie čísel, algebraická geometrie, algebra, kombinatorika,..., *hydrodynamiku* (podporovanou výrobcí atomových ponorek), která zrodila komplexní analýzu, parciální diferenciální rovnice, ... a *nebeskou mechaniku* (financovanou armádami), která je zdrojem topologie, variačního počtu, ...

Když jsem po univerzitních studiích začal vyučovat matematiku na střední škole, byl jsem přesvědčen, že náležitým vysvětlením definic, vět a důkazů dovedu studenty k porozumění matematice. V praxi jsem poznal, že důležitější pro pochopení problematiky jsou příklady. Tento poznatek jsem si mnohem později přečetl u Komenského: „Všemu se vyučuje a učí příklady, ukázkami a cvičeními“ ([9], XL), ale teprve při studiu knihy [2] jsem pochopil, jak důležité jsou tyto otázky i pro matematiku samotnou.

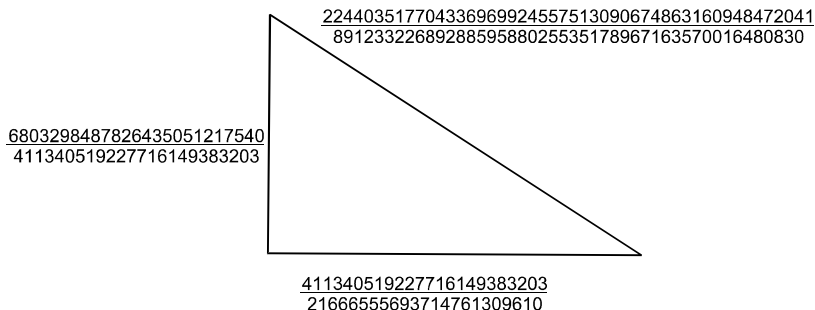
W. T. Gowers zde v článku *Dvě matematické kultury* rozlišuje dva různé přístupy k matematice podle těchto kritérií:

- cílem řešení problémů je lepší porozumění matematice,
- cílem porozumění matematice je umět lépe řešit problémy.

Konečně světově proslulý matematik A. Wiles začíná článek *Dvacet let teorie čísel* v knize [2] rozbořem tří Fermatových problémů:

1. Která prvočísla jsou součty čtverců celých čísel?
2. Existuje pravoúhlý trojúhelník, jehož délky stran jsou racionální čísla a jehož obsah je 1?
3. Existuje celočíselné řešení rovnice $x^n + y^n = z^n$ pro $n \geq 3$?

Prvé dvě úlohy vyřešil Fermat sám, poslední problém vyřešil, jak známo v roce 1995 právě A. Wiles. V citovaném článku se uvádí, že zobecnění problému 2 vede k jednomu z nejzajímavějších problémů moderní číselné teorie. Jako kuriozitu zde na obrázku připomeňme jeden z dílčích výsledků z tohoto okruhu: „nejjednodušší“ pravoúhlý trojúhelník s racionálními délkami stran a obsahem 157. Otázku, které úlohy jsou významné pro školní vzdělávání a pro matematiku samotnou, lze stěží jednoduše zodpovědět.



3 Matematika a vzdělávání

Matematické poznatky potřebuje na různých úrovních každý: žena v domácnosti, spisovatel, technik, vědec z oblasti věd společenských i přírodovědec. Matematika by však měla přispívat i ke kultivaci myšlení, měla by mít i významný formativní vliv. Je rozšířeným omylem, že tomu tak vždycky je. U zkoušek se občas setkáváme s reprodukcemi matematických definic, vět, důkazů i naučenými řešeními úloh, s minimální mírou porozumění. Takto osvojovaná matematika myšlení nerozvíjí. Zdá se, že příčinou tohoto jevu jsou zčásti zbytečně vysoké rozsahy učiva a styl učení, který tomu odpovídá. Na první problém upozornil již v 19. století náš pedagog *G. A. Lindner* („chceme vychovávat obry, ale vychováváme trpaslíky“) na otázky metod výuky matematiky orientované ke kultivaci myšlení obracel pozornost učitelů známý matematik *G. Polya*. Aniž bychom zde mohli dělat důkladnější rozbor problematiky, připomeňme několik názorů, které bychom měli považovat především za podněty k diskusi.

Geometrii můžeme chápat na elementární úrovni jako matematickou strukturu. Podle Hilbertova pojetí např. jako strukturu

$$(B, P, \in, m, \cong),$$

kde B je množina bodů, P je množina přímk, $\in$ je relace incidence, m je relace mezi a $\cong$ je relace shodnosti. Přitom jsou vlastnosti příslušných množin a relací formulovány v axiomech.

Ve Weylově pojetí je geometrie studiem struktury

$$(B, V, +, \cdot, \circ, -),$$

kde B je množina bodů, V je množina vektorů, $+$ je algebraická operace sčítání vektorů, $\cdot$ je algebraická operace násobení vektorů číslem, symbolem $\circ$ popisujeme skalární násobení vektorů a $-$ je zobrazení kartézského součinu $B \times B$ do množiny vektorů. Dále je formulována soustava axiomů, která implicitně definuje geometrickou strukturu eukleidovského prostoru.

GEOMETRIE A GEOMETRICKÉ VZDĚLÁVÁNÍ

Ačkoliv se ve škole nezavádí žádná z takovýchto struktur exaktně, napovídá členění geometrie na naší střední škole, že přece jen považujeme strukturální pohled za základní, neboť studujeme izolovaně např. stereometrii v syntetickém pojetí a analytickou geometrii. Takovýto přístup není přirozený z hlediska studenta. Proč by ho měly zajímat jakési vyspekulované abstraktní struktury? Snad by ho však měly zajímat vlastnosti prostoru, v němž žije. Měl by tomuto prostoru rozumět, orientovat se v něm a řešit geometrické problémy přirozeným způsobem, bez „svěrací kazajky“ struktury. Matematika chápána jako systém definic, vět, důkazů nebo na elementární úrovni jako systém vzorců, není nejvhodnějším základem pro přístup ke školské matematice, neboť skýtá mnoho příležitostí k formálnímu zvládání poznatků. Definice, věty a důkazy se lze naučit, aniž bychom jim rozuměli, tento soubor „vědomostí“ lze reprodukovat u zkoušek. Dobrá paměť rozvíjená tréninkem se zdá být postačující k „osvojení si“ minima matematiky. Takováto matematika však myšlení nerozvíjí, ale spíše utlumuje, protože myšlení komplikuje pohled na strukturu vytříbenou často mnohageneračním vývojem názorů na řešení určitého problému. Ne tedy studium části hotové matematiky, ale poznávání cest k matematice je základní příležitostí k rozvíjení myšlení. Snaha porozumět věcem je doložitelná historicky a aplikovatelná i didakticky. Co je geometrie, není-li studiem geometrických struktur? Za geometrii „ve stavu zrodu“ můžeme považovat řadu dovedností, které k jejímu utváření historicky patrně vedly, a které k ní mohou vést i ve škole. Jsou to především tyto dovednosti, tato „umění“ (v původním slova smyslu):

umění vidět,

umění sestavovat a

umění dokazovat.

Snad každý cítí, že tyto dovednosti nejsou specificky geometrické. Vidět můžeme nejen prostorový či rovinný geometrický útvar, vidět můžeme i útvar přírodní, vidět můžeme i souvislosti, příčiny, řešení problému, konstrukci nebo důkaz. Sestavit můžeme nejen trojúhelník nebo kružnici, ale i model, stroj, algebraický výraz nebo rovnici. Tvzení dokazujeme nejen v geometrii, ale i v algebře, důkazy se zabývají soudy, argumentace je složkou každodenního života.

Povzbuzen tím, že podle monografie [2] je pro rozvíjení matematiky základní řešení problémů, právě tak jako je řešení problémů prioritní pro jakoukoliv vědu přírodní či společenskou, s vědomím toho, že máme technické prostředky výpočetní a reprodukční techniky jako nikdy v minulosti, kladu otázku, zda jsou tradičně koncipované kurzy matematiky zaměřené na transmissi struktur nejvhodnějším přístupem k matematickému vzdělávání. Studium vhodných problémů a účinné vytváření aparátů k jejich

řešení je alternativou, která by možná mohla aspoň zčásti přispět v budoucnu k řešení současné krize ve vzdělávání. Ve vyučování matematice snad na každé úrovni často uniká studentům smysl. Smysl dokazování i smysl definování. To je začátek konce úspěšného studia. Dokážeme-li přesvědčit studenty o účelnosti koncepce kurzu matematiky, máme jistou naději na probuzení zájmu. Vím ze zkušenosti, osobní i zprostředkované, že výuka matematiky na vysoké škole a řešení problémů budoucí praxe absolventa jsou, především díky formálnímu absolvování příslušných kurzů, ale i vzhledem k akademičnosti těchto kurzů, mimoběžné oblasti. Co je platné inženýru ekonomie studium lineární algebry a řešení soustav rovnic, když v praxi řeší lineární rovnici „zkusmo!?

Literatura

- [1] C. J. Scriba, P. Schreiber: *5 000 Jahre Geometrie*, Springer, Berlin 2001.
- [2] V. Arnold, M. Atiyah,, P. Lax, B. Mazur: *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. AMS 2000.
- [3] *Geometry and Computer Graphics 2004*. Sborník příspěvků 24. konference o geometrii a počítačové grafice. VŠB, Ostrava 2004.
- [4] I. Kolář: *Postavení geometrie v současné matematice*, Matematika – fyzika – informatika, č. 8, roč. 5, 1996.
- [5] K. Maleček, Z. Nádeník: *Recenze knihy* [1], Pokroky matematiky, fyziky, astronomie.
- [6] D. Hilbert, S. Cohn Vossen: *Anschauliche Geometrie*, Berlin 1932.
- [7] F. Kuřina: *Umění vidět v matematice*. SPN, Praha 1989.
- [8] R. B. Nelsen: *Proofs without Words I., II.* MAA, Washington 2002.
- [9] J. A. Komenský: *Didaktika analytická*. Samcovo knihkupectví, Praha 1946.