

Dalibor Martišek

POČÍTAČOVÁ GRAFIKA JAKO MOTIVACE STUDIA MATEMATIKY

Abstrakt

Příspěvek se zabývá úlohou počítačové grafiky při motivaci studia matematiky na vysokých školách technických. Poměrně hezké grafické výstupy lze totiž dosáhnout relativně jednoduchými programátorskými technikami podloženými znalostmi, které studenti získají v základním kurzu matematiky.

Klíčová slova

Motivace výuky, programování, lineární transformace, grupa, izomorfismus, polodie, promítání, optické jevy, iterační proces

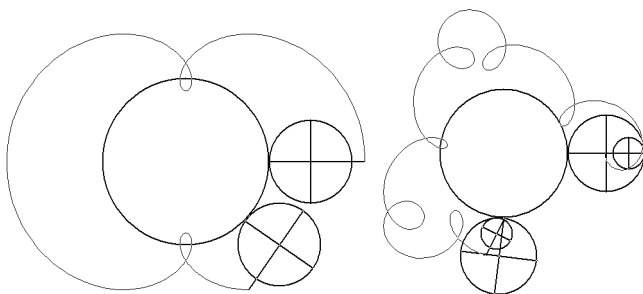
Je všeobecně známo, že motivace výuky je velmi důležitá. Ve vyučování matematice v prvním ročníku vysokých škol technických to platí dvojnásob. Matematika zde totiž tvoří podstatnou část studia. V té době toho studenti o svém oboru vědí většinou velmi málo a o potřebě matematiky v něm ještě méně. Jsou nuceni studovat matematiku „na úvěr“ a doufat, že se jim to později vyplácí.

Kromě základního kurzu matematiky vyučuji i počítačovou grafiku ve druhém semestru základního studia a ve třetím semestru oboru Matematické inženýrství. Ze svých zkušeností s touto výukou si troufám tvrdit, že vedle technických motivací učiva se dnes nabízí využít počítače již v základním kurzu matematiky, a to nejen k prezentaci možností profesionálního matematického software (Maple, MathCAD atd.). Je sice hezké, že takový software dnes „ovládá“ celý základní kurs vysokoškolské matematiky (umí pracovat s maticemi, řešit soustavy rovnic, derivovat, integrovat atd.) – to ale od studia spíše odrazuje (proč mám pracně počítat nějaké Fourierovy řady, když mně výsledek daleko rychleji a správně vyplivne počítač?).

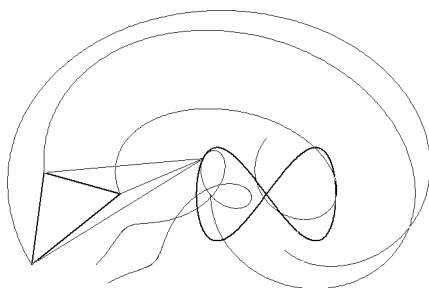
Podle mého názoru spočívá těžiště práce s počítačem ve výuce matematiky někde jinde. Mnohé partie matematiky lze například využít k „pohledům do kuchyně“ CAD systémů či různých photoshopů, o nichž již studenti nejen vědí, ale často v nich již i pracují. Většinou se domnívají, že ke zpracovávání grafických informací tak, jak je realizováno v těchto

systémech, je potřeba „velice složitá matematika“ a obdivují „neuvěřitelně hlavy“ autorů těchto systémů. Jsou pak velmi překvapeni, že většina manipulací s geometrickými útvary je založena na poznatcích, které získali v základním kursu lineární algebry a analytické geometrie v prvním semestru. Mnozí z nich pak ochotně dohánějí nejen své nedostatky v programování, ale pracně se upomínají např. na elementární poznatky analytické geometrie, které se před pár měsíci učili jen na zkoušku s tím, že je okamžitě mohou opět zapomenout.

Základem zobrazování rovinných útvarů je lineární transformace uživatelské souřadné soustavy do soustavy světové. Manipulace s rovinnými útvary pak spočívají v aplikacích geometrických transformací reprezentovaných příslušnými maticemi. Lze vyjít z elementárních matic posunutí, osových symetrií a afinit podle souřadných os, rotací a stejnolehlostí se středem v počátku. Obecnější transformace (valivé pohyby, pohyby ojníc apod.) lze získat složením vhodných transformací a jejich matice díky izomorfismu příslušných grup násobením matic několika základních transformací.



Obrázek 1 : Modelování valivých pohybů pomocí skládání lineárních transformací.



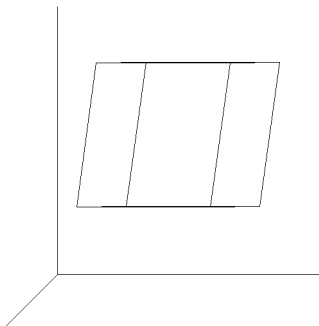
Obrázek 2 : Kinematická konstrukce pevné a hybné polodie

POČÍTAČOVÁ GRAFIKA JAKO MOTIVACE STUDIA

Posluchačům, kteří jsou zběhlejší v programování, nežiní příliš potíže naprogramovat tyto transformace do zajímavých cyklů a prostorové geometrické úvary jim „ožijí“ - začnou se na monitoru pohybovat. Mnohé z těchto výsledků (viz obr. 1 a 2) jsou pak následně používány při přednáškách a cvičeních v předmětu Konstruktivní geometrie, který vyučujeme v 1. semestru.

Při zobrazování prostorových útvarů pak narážíme na matematické problémy na každém kroku. Začínáme s kosoúhlým promítáním na rovinu. Jeho zobrazovací rovnice jsou velmi jednoduché. Při zobrazování řady křivek a ploch (šroubovice, elipsoidy, anuloidy...) je třeba nejen znát parametrické rovnice těchto konkrétních křivek a ploch, ale studenti mají zároveň příležitost k hlubšímu pochopení parametrických rovnic vůbec.

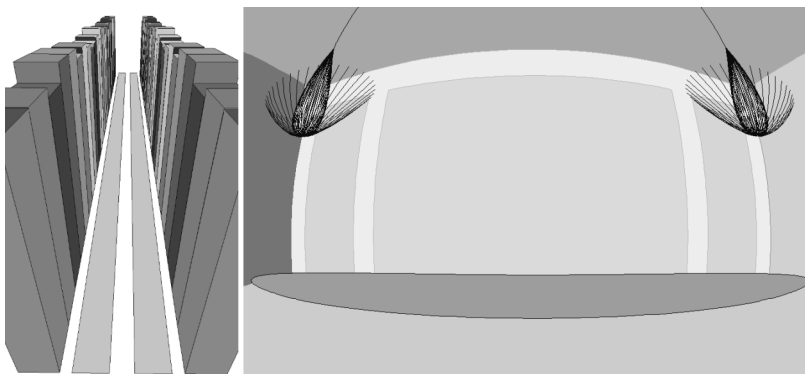
Podobně jako v rovině, tak i v prostoru můžeme naprogramovat nejrůznější transformace včetně jednoduchých animací. Při těchto animačních pokusech pak sami posluchači zjistí, že kosoúhlé promítání není pro tyto účely nejvhodnější (viz např. obr. 3). Stojí pak před otázkou, jaké promítání zvolit, aby se průměty co nejvíce přibližovaly reálným vjemům prostorových útvarů.



Obrázek 3 : Rotace krychle ve volném rovnoběžném promítání

Zrakový vjem vzniká jako středový průmět prostorového útvaru na kulovou plochu sítnice oka. Při výuce samozřejmě nezačínáme tímto poměrně obtížným zobrazením, ale i při značném zjednodušení (pravoúhlé event. středové promítání rovinu) je třeba ve studijní skupině opět prášit řadu geometrických poznatků. Je třeba odvodit rovnici promítací roviny ze směrových úhlů jejího normálového vektoru, na tuto rovinu promítnout prostorovou souřadnou soustavu a tento průmět transformovat do rovinné uživatelské, souřadné soustavy. Poměrně zdoluhavý výpočet a jeho naprogramování se však vyplatí, neboť s takto získanými průměty můžeme „věrohodně“ manipulovat.

Zvládneme-li pravoúhlé promítání na rovinu, můžeme se pustit do promítání středového. Kromě výše uvedených úloh musíme tedy určit souřadnice středu promítání, dále rovnici každé promítací přímky a průmět jako její průsečík s průmětnou. Odměnou jsou pak velmi hezké obrázky prostorových útvarů v lineární perspektivě. Odtud je pak již jen krůček k promítání na kulovou event. válcovou plochu. Místo průsečíku přímky s rovinou hledáme její průsečík s kulovou resp. válcovou plochou, v proceduře určující tento průsečík je třeba změnit pouze jeden jediný vzoreček. Nejedná se již o lineární transformaci, obrazem úsečky není úsečka. Nestačí tedy zobrazit krajní body, ale pomocí parametrické rovnice úsečky i dostatečný počet vnitřních bodů. Průměty prostorových objektů pak vypadají tak, jak je známe z fotografií pořízených širokoúhlým objektivem: místo úseček máme kruhové resp. eliptické oblouky, zakřivené více či méně podle toho, jakou zvolíme vzdálenost středu promítání (viz obr. 4).

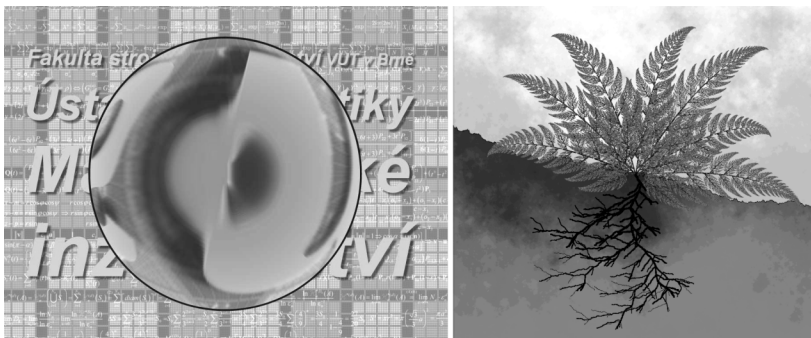


Obrázek 4 : Ukázky středového promítání na rovinu a na kulovou plochu

Zobrazování prostorových útvarů s viditelností vyžaduje další znalosti. Viditelnost lze řešit například pomocí z-bufferu, či uspořádáním segmentů plochy podle klesající vzdálenosti od pozorovatele. Později sestrojované bližší segmenty tak překreslují dříve sestrojenou scénu a viditelnost je tak vyřešena sama přirozeným způsobem. V každém případě je však třeba zvládnout určování vzdáleností v prostoru, chceme-li rub a líc plochy barvit jinou barvou, musíme strany ploch rozpoznávat vektorovým součinem. Je třeba určovat úhel normály segmentu s promítacím paprskem (zabráníme tak haváriím programu při vybarvování segmentů, naprosto nezbytné je to

POČÍTAČOVÁ GRAFIKA JAKO MOTIVACE STUDIA

v případě, chceme-li plochy osvětlit či stínovat). Lze se zabývat modelováním optických jevů, modelovat konvergenční procesy metodami fraktální geometrie a mnoha dalšími zajímavými problémy (viz obr. 5).



Obrázek 5 : Modelování optických vad spojné čočky a studium iteračních procesů

Uvedme alespoň jeden konkrétní příklad, jak počítačová grafika poskytuje nové pohledy na tradiční matematické metody. Uvažujme iterační proces

$$x_{i+1} = f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = g(x_i, y_i)$$

Tento proces bude konvergovat v případě, když alespoň jedna z norem matice

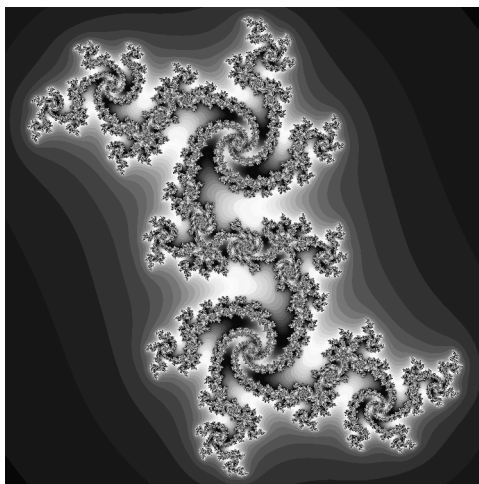
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

je menší, než jedna. V numerické matematice se většinou spokojíme s konstatováním, že ověření této podmínky pro daný konkrétní iterační proces je „obtížné“. Výpočetní technika nám však umožní daleko víc. Vezměme jako příklad soustavu

$$x_{i+1} = x_i^2 - y_i^2 + c_1$$

$$y_{i+1} = -2x_i y_i + c_2$$

(což je jednoduchá soustava, řešitelná poměrně snadno analyticky). Uvažujme startovací body z obdélníka $[x_0; y_0] \in \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle$ a sledujme konvergenci resp. divergenci procesu. Příslušný bod obarvíme barvou podle rychlosti divergence. Na obr. 6 vidíme výstup pro $c_1 = 0.23296$; $c_2 = 0.55031$; $a = c = -1.5$; $b = d = 1.5$. Studium iteračních procesů klasickými metodami je i u těch nejjednodušších případů zcela nemožné.



Obrázek 6 : Iterační proces soustavy dvou nelineárních rovnic

Domnívám se, že práce s počítačem by dnes měla být samozřejmostí. Posluchači by se měli do počítačové učebny dostat i v základním kursu matematiky, a to několikrát za semestr. Tvořivé uplatnění teoretických poznatků, vědomí, že je mohu použít v zajímavém programu, který si mohu sám napsat, a radost z toho, že mně takový program hezky funguje, to jsou nenahraditelné impulsy k dalšímu teoretickému studiu.

Literatura

- [1] Martišek, D.: *Matematické principy grafických systémů*, Littera, Brno, 2002
- [2] Martišek, D.: *Softwarové modelování lomu světla*, in Sborník XV kolokvia o řízení osvojovacího procesu, Vyškov, 2004
- [3] Martišek, D.: *Softwarové modelování odrazu světla*, Pedagogický software, České Budějovice - sborník přednášek a programů, 2004