

Stanislav Olivík

POROVNÁNÍ DVOU METOD HLEDÁNÍ ODRAZNÉHO BODU NA POVRCHU ELIPSOIDU

Abstrakt

Úlohou GPS altimetre je nalezení odrazného bodu signálu vyslaného z jednoho satelitu a přijatého druhým satelitem. Příspěvek porovnává dvě iterační metody hledání odrazného bodu GPS altimetrie na povrchu elipsoidu.

Klíčová slova

Altimetrie, GPS, GPS altimetrie, rotační elipsoid.

1 Popis problému

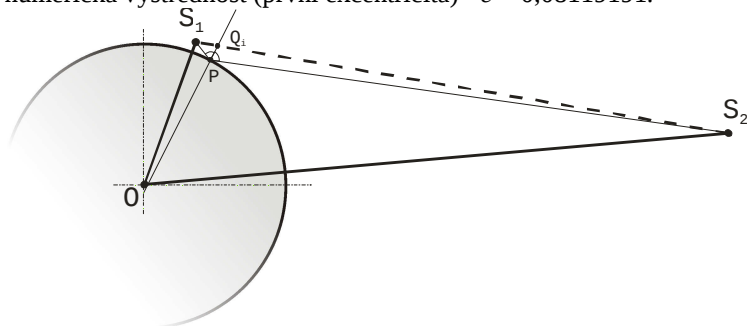
Jsou dány pravoúhlé geocentrické souřadnice dvou družic na oběžných drahách kolem Země a parametry referenčního elipsoidu nahrazujícího zemské těleso. Naším úkolem je nalezení bodu na ploše referenčního elipsoidu, kde se odrazí paprsek vyslaný jednou družicí a přijatý druhou družicí.

Referenční elipsoid nahrazuje skutečné zemské těleso. V tomto případě používáme rotační zploštělý elipsoid WGS84, jehož parametry jsou následující:

hlavní poloosa

$a = 6378137 \text{ m}$

numerická výstřednost (první excentricita) $e = 0,081119191$.



**Obrázek 1: Schematické znázornění poloh družic a elipsoidu
a přibližné polohy odrazného bodu.**

2 Hledání odrazného bodu

Řešení, která jsou zde prezentována jsou geometrická a numerická. Předpokládáme přímočaré šíření signálu při zanedbání fyzikálních podmínek reálného prostředí. Tedy zanedbání vlivu družicové aberace, zakřivení dráhy paprsku vlivem jeho průchodu atmosférou a další vlivy. Dále předpokládáme platnost zákona odrazu.

Jelikož jsme zanedbali všechny fyzikální vlivy na dráhu signálu, můžeme výslednou dráhu odraženého signálu popsat jako lomenou čáru. Je to lomená čára definovaná polohami obou družic a odrazným bodem. Tato dráha leží v jedné rovině společně s normálou referenčního elipsoidu v odrazném bodě. Při hledání odrazného bodu tedy můžeme volit body ze spojnice pozic družic S_1 a S_2 , tyto body kolmo promítnout na povrch elipsoidu a poté testovat, zda je promítnutý bod bodem odrazným.

Elipsoid uvažujeme jako pevné těleso, jímž neproniká radiový signál. V tomto případě se signál může odrážet pouze od té části povrchu elipsoidu, která leží uvnitř dotykové kuželové plochy elipsoidu blíže jejímu vrcholu. Tímto vrcholem je satelit vysílající signál. Stejnou část elipsoidu budeme uvažovat i pro určování normál k povrchu elipsoidu, které prochází mezilehlými body Q_i na spojnici vysílače a přijímače. Vzhledem k tomu existuje jediná normála elipsoidu procházející bodem Q_i .

Souřadnice průniku této normály a povrchu elipsoidu můžeme získat tak, že určíme zeměpisnou šířku a délku mezilehlého bodu Q_i . Pro tyto zeměpisné souřadnice vypočteme příčný poloměr křivosti N pro použitý referenční elipsoid a tuto trojici souřadnic převedeme zpět do výchozí kartézské soustavy souřadnic. Tím získáme souřadnice bodu P_i . Příčný poloměr křivosti je zde poloměr křivosti normálového řezu elipsoidu, ve směru poledníku, v bodě určeném vypočtenými zeměpisnými souřadnicemi.

2.1 Převodní vztahy mezi soustavami souřadnic

Pro odvození převodních vztahů z kartézských souřadnic $[X, Y, Z]$ do geodetických zeměpisných souřadnic $[\varphi, \lambda]$ a příčného poloměru křivosti N vycházíme ze vztahů v [2]

$$X = N \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = N \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = N(1 - e^2) \sin \varphi$$

POROVNÁNÍ DVOU METOD HLEDÁNÍ ODRAZNÉHO BODU ...

Pro zpětný převod do kartézské soustavy souřadnic jsem v [5] a [6] použil vztahy

$$\lambda = \arctan Y/X$$

$$\varphi = \arctan \frac{Z \sin \lambda}{Y(1 - e^2)}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

čímž bych dostal úhly φ a λ pouze v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ Pro zeměpisnou šířku φ je toto rozmezí dostačující. V případě zeměpisné délky λ jsem při konkrétní implementaci algoritmu v programu Matlab využil jeho interní funkce *atan2*, která určuje úhly v plném rozsahu. Jinak bych musel úhel λ určovat z rovností

$$\cos \lambda = \frac{X \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a^2(1 - e^2) - Z^2}}$$

$$\sin \lambda = \frac{Y \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a^2(1 - e^2) - Z^2}}.$$

Další postup se liší podle metody.

2.2 Metoda půlení úsečky

Mezilehlé body počítáme ze vztahů

$$Q_i = S_1 + q_i(S_2 - S_1)$$

$$q_i = q_{i-1} \pm 1/i^2, \quad i = 2, \dots, n.$$

Podle vztahů ve 2.1 jsou body Q_i promítnuty na povrch elipsoidu a je vypočítán příčný poloměr křivosti. Zpětným převodem do kartézských souřadnic je získán bod P_i .

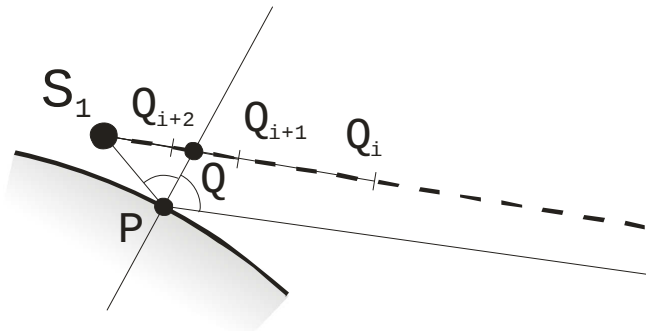
Dále počítáme rozdíl úhlů $S_1P_iQ_i$ a $S_2P_iQ_i$. Pokud je úhel $S_1P_iQ_i$ větší než úhel $S_2P_iQ_i$, volíme

$$q_i = q_{i-1} + 1/i^2,$$

jinak volíme

$$q_i = q_{i-1} - 1/i^2.$$

Pokud je rozdíl rozdíl úhlů $S_1P_iQ_i$ a $S_2P_iQ_i$ menší než 10^{-9} rad, prohlásíme bod P_i za odrazný bod.



Obrázek 2: Schematické znázornění metody půlení úsečky.

2.3 Metoda postupného přibližování

Mezilehlé body se počítají ze vztahů

$$Q_i = S_1 + q_i(S_2 - S_1)$$

$$q_i = q_{i-1} \pm dq_i, \quad dq_i = \frac{hq_i \sin \frac{d\alpha}{2}}{\sin \tau} \left| S_1 S_2 \right|,$$

kde hq_i je výška bodu Q_i nad povrchem, $d\alpha$ je rozdíl úhlů $S_1 P_i Q_i$ a $S_2 P_i Q_i$ a τ je úhel mezi vektory $S_1 S_2$ a $P_i Q_{i+1}$.

Pro první mezilehlý bod Q_1 je

$$q_1 = h_1 / h_2,$$

kde h_1, h_2 jsou výšky družic S_1, S_2 nad povrchem elipsoidu.

Podle vztahů ve 2.1 promítneme bod Q_i na povrch elipsoidu a vypočítáme příčný poloměr křivosti N . Zpětným převodem do kartézských souřadnic získáme bod P_i .

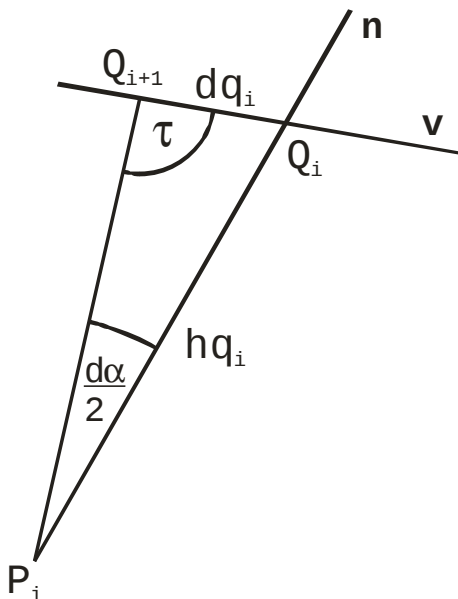
V dalším kroku vypočítáme rozdíl úhlů $S_1 P_i Q_i$ a $S_2 P_i Q_i$. Pokud je úhel $S_1 P_i Q_i$ větší než úhel $S_2 P_i Q_i$, volíme

$$q_i = q_{i-1} + dq_i$$

jinak volíme

$$q_i = q_{i-1} - dq_i.$$

Pokud je rozdíl úhlů $S_1 P_i Q_i$ a $S_2 P_i Q_i$ menší než 10^{-9} rad, prohlásíme bod P_i za odrazný bod.



Obrázek 3: Poloha bodů Q_i a Q_{i+1} . Vektor v na obrázku odpovídá vektoru $S_1 S_2$ v textu.

3 Příklad – numerické ověření

Číselné zadání je převzato z [1]

- souřadnice družic
 - o $S_1 = [1704270,88; 1037760,88; -6532029,43]$ m
 - o $S_2 = [13438722,08; 7201125,22; -21772472,43]$ m
- parametry referenčního elipsoidu
 - o $a = 6378137$ m
 - o $e = 0,08119191$

Pro tato zadaná data vychází odrazný bod o zeměpisných souřadnicích

$$\varphi = -71^{\circ}34'58,378''$$

$$\lambda = 30^{\circ}50'28,018''$$

Po přepočtu do kartézské soustavy souřadnic jsme dostali bod o souřadnicích

$$X = 1735271,845$$

$$Y = 1036118,116$$

$$Z = -6029484,018$$

Početně bylo ověřeno, že tento bod leží na ploše elipsoidu.

Metoda popsaná v oddílu 2.2, nazvaná „Metoda půlení úsečky“, dokonvergovala k výsledku po 33 krocích, rozdíl mezi úhly $S_1P_{33}Q_{33}$ a $S_2P_{33}Q_{33}$ činí $1,46 \cdot 10^{-10}$ rad.

Metoda popsaná v oddílu 2.3, nazvaná „Metoda postupného přibližování“, dokonvergovala k výsledku po 9 krocích, rozdíl mezi úhly $S_1P_9Q_9$ a $S_2P_9Q_9$ činí $-5,82 \cdot 10^{-10}$ rad.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory grantu FRVŠ G1 392

Literatura

- [1] Teichmann J.: *GPS Altimetrie: Bistatická GPS altimetrie projektu CHAMP*, semestrální práce z předmětu Geodynamika, Technische Universitaet Dresden, Institut fuer Planetare Geodesie, 2000
- [2] Baranová M.: Multimediální texty k předmětu Matematická kartografie 1 [online], URL: http://hobbes.fav.zcu.cz/gis/studium/mk1/multimedialni_texty/
- [3] Kočandrlová, M.: *Geometrický model úlohy GPS-altimetrie*, Sborník 27. konference VŠTEZ, JČMF, 2002, str. 110-113
- [4] Wagner, C., Klokočník, J.: *Reflection Altimetry for oceanography and geodesy*, presented at 2001: An Ocean Odyssey, IAPSO-IABO Symp.: Gravity, Geoid and Ocean Circulation as Inferred from Altimetry, Mar del Plata, Argentina
- [5] Olivík, S.: *Odrazný bod GPS altimetrie na ploše elipsoidu*, Sborník Semináře aplikované matematiky, Praha, 2005 [in review]
- [6] Olivík, S.: *Odrazný bod bistatické altimetrie na ploše elipsoidu*, Sborník Semináře Matematika na vysokých školách, pobočka JČMF v Praze a ČVUT v Praze, 2005, ISBN 80-01-03269-8, str. 155-156