

Marie Provazníková

# NAKRYTÍ GRUP $SO(3)$ A $SO(4)$ SPINOROVÝMI GRUPAMI

## Abstrakt

Příspěvek se zabývá jednou z oblastí, kde je možné využít algebry s dělením, konkrétně kvaterniony. Je uvedeno nakrytí grupy  $SO(3)$  třírozměrnou sférou, dále nakrytí grupy  $SO(4)$ .

## Klíčová slova

Univerzální nakrytí, kvaternion, spinorová grupa.

## 1 Úvod

**Definice.** Zobrazení  $p$  nazýváme *univerzální nakrytí* prostoru  $X$ , jestliže ke každému bodu  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  existuje otevřené okolí  $\tilde{U}$  takové, že  $U = p(\tilde{U})$  je otevřené okolí bodu  $x = p(\tilde{x}) \in X$  a zobrazení

$$p/\tilde{U} : \tilde{U} \rightarrow U$$

je homeomorfismus.

Příklad univerzálního nakrytí je nakrytí kružnice  $X$  šroubovicí  $\tilde{X}$ . Zobrazení  $p$  je zde ortogonální promítání do roviny kružnice, na každý bod  $x$  kružnice se zobrazí nekonečně mnoho bodů šroubovice, vzory tvoří fibr  $p^{-1}(x)$ . Proto jde o korespondenci " $\infty - 1$ ".

V případě, že prostor  $X$  je topologická grupa, vždy existuje univerzální nakrytí

$$p : \tilde{X} \rightarrow X$$

a platí, že  $\tilde{X}$  je rovněž grupa a  $\pi_1(X) \cong \ker p$ .

Tedy

$$1 \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \tilde{X} \longrightarrow X \longrightarrow 1$$

je krátká exaktní posloupnost.

Nechť  $SO(n)$  značí grupu všech automorfismů vektorového prostoru  $\mathbb{R}^n$  zachovávajících skalární součin a orientaci. Je to tedy pro každé  $n \in \mathbb{N}$  grupa všech matic  $A$ , pro které platí  $A^T \cdot A = E_n$  a jejichž determinant  $\det A = +1$ .

$SO(n)$  je topologická grupa, existuje tedy její univerzální nakrytí

$$p: \widetilde{SO(n)} \longrightarrow SO(n).$$

$$\pi_1(SO(n)) = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$$

$$\pi_1(\widetilde{SO(n)}) = 1$$

Grupu  $\widetilde{SO(n)}$  značíme  $Spin(n)$  a nazýváme *spinorová grupa*.

## 2 Nakrytí grup $SO(3)$ a $SO(4)$

### 2.1 Nakrytí grupy $SO(3)$

Těleso kvaternionů  $\mathbb{H}$  můžeme chápat jako 4-rozměrný reálný vektorový prostor se skalárním součinem, tedy čtyřrozměrný euklidovský prostor ( $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ ). Pro  $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ,  $q_1, q_2 \neq 0$  je zobrazení

$$x \mapsto q_1 x q_2, \quad \text{pro } x \in \mathbb{H}$$

podobnost v euklidovském prostoru s koeficientem podobnosti  $|q_1| \cdot |q_2|$ , a pro  $|q_1| \cdot |q_2| = 1$  jde o shodnost. Jestliže toto zobrazení zachovává prvek  $x = 1$ , tedy platí

$$q_1 \cdot q_2 = 1 \Rightarrow q_2 = q_1^{-1},$$

pak zachovává také trojrozměrný prostor kolmý k 1

$$\{xi + yj + zk\} \cong \mathbb{R}^3.$$

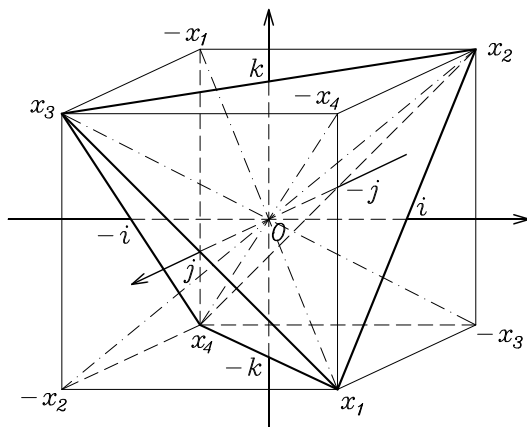
Tato shodnost  $[q] : x \mapsto qxq^{-1}$  geometricky odpovídá otočení kolem přímky.

Pak  $SO(3)$  značí grupu všech automorfismů vektorového prostoru  $\mathbb{H}$  zachovávajících skalární součin, orientaci a jednotku 1, tj. grupu všech přímých shodností. Každý prvek  $SO(3)$  má tvar  $x \mapsto qxq^{-1}$  pro nějaký kvaternion  $q \in \mathbb{H}$ , a jde o rotaci kolem přímky. Tato korespondence mezi kvaterniony a rotacemi je " $\infty - 1$ ", poněvadž každý násobek daného kvaternionu  $q$  určí stejnou rotaci

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 0 : (aq)x(a^{-1}q^{-1}) = qxq^{-1}.$$

Můžeme proto požadovat, aby  $|q| = 1$ . Množina všech jednotkových kvaternionů je třírozměrná sféra

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H}; |q| = 1\}.$$



Zobrazení

$$p : S^3 \longrightarrow SO(3)$$

$$p(q)x = qxq^{-1},$$

které každému jednotkovému kvaternionu přiřadí příslušnou rotaci, je dvojnásobné nakrytí  $SO(3)$ , neboť

$$\ker p = \{-1, 1\}$$

$$\pi_1(SO(3)) = \{-1, 1\}$$

$$S^3 = Spin(3).$$

## 2.2 Příklad

Otočení v prostoru kolem přímky  $x_1, -x_1$  o úhel  $\frac{2}{3}\pi$  (viz. obrázek).

$$\begin{array}{ll} x_2 \mapsto x_3 & \text{tedy } i + j + k \mapsto i - j - k \\ x_3 \mapsto x_4 & i - j - k \mapsto -i - j - k \\ x_4 \mapsto x_2 & -i - j - k \mapsto i + j + k \end{array}$$

Vhodnější je ale použít:

$$\begin{array}{l} i \mapsto -k \\ j \mapsto i \\ k \mapsto -j \end{array}$$

Dostáváme 3 rovnice pro  $q$ :

Marie Provazníková

$$\begin{array}{ll}qiq^{-1} = -k & q \in \mathbb{H} \\ qjq^{-1} = i & q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ kqk^{-1} = -j & |q| = 1\end{array}$$

Dosazením za  $q$ :

$$\begin{aligned}(a + bi + cj + dk) i (a - bi - cj - dk) &= -k \\(a + bi + cj + dk) j (a - bi - cj - dk) &= i \\(a + bi + cj + dk) k (a - bi - cj - dk) &= -j\end{aligned}$$

roznásobením a úpravou

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + (2ad + 2bc)j + (2bd - 2ac)k &= -k \\(2bc - 2ad)i + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)j + (2ab + 2cd)k &= i \\(2ac + 2bd)i + (2cd - 2ab)j + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)k &= -j.\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostáváme:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0 \quad (1) \quad 2bc - 2ad = 1 \quad (4)$$

$$2ad + 2bc = 0 \quad (2) \quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0 \quad (5)$$

$$2bd - 2ac = -1 \quad (3) \quad 2ab + 2cd = 0 \quad (6)$$

$$2ac + 2bd = 0 \quad (7)$$

$$2cd - 2ab = -1 \quad (8)$$

$$a^2 - b^2 - c^2 + d^2 = 0 \quad (9)$$

Z rovnic (1), (5) a (9):

$$a^2 = b^2 = c^2 = d^2 \implies |a| = |b| = |c| = |d|.$$

Z ostatních rovnic:

$$ac = -bd = \frac{1}{4}, \quad ad = -bc = -\frac{1}{4}, \quad ab = -cd = \frac{1}{4},$$

proto

$$q_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k, \quad q_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$$

## 2.3 Nakrytí grupy $SO(4)$

Nechť  $SO(4)$  značí grupu všech automorfismů vektorového prostoru  $\mathbb{H}$  zachovávajících skalární součin a orientaci. Budeme definovat epimorfismus:

$$p : S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4).$$

Je-li  $(a, b) \in S^3 \times S^3$ , tj. jsou-li  $a$  a  $b$  dva jednotkové kvaterniony, definujeme

$$p(a, b)x = ax\bar{b} \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{H}.$$

Zřejmě

$$\begin{aligned} p((a_1, b_1)(a_2, b_2))x &= p(a_1a_2, b_1b_2)x = a_1a_2x\overline{b_1b_2} = a_1a_2x\bar{b}_1\bar{b}_2 = \\ &= a_1(a_2x\bar{b}_2)\bar{b}_1 = p(a_1, b_1)(p(a_2, b_2)x), \end{aligned}$$

čímž jsme dokázali, že

$$p((a_1, b_1)(a_2, b_2)) = p(a_1, b_1)f(a_2, b_2)$$

tj. že  $p$  je homomorfismus grup.

Nyní je třeba dokázat, že  $p$  je epimorfismus. K tomu si stačí uvědomit, že každý prvek z  $SO(n)$  je složením konečného počtu souměrností podle nadrovin, v našem případě nejvýše čtyř, musí jich být též sudý počet:

$$x \mapsto q_n q_{n-1} \cdots q_1 \cdot x \cdot \bar{q}_1 \cdots \bar{q}_n \quad \text{pro } q_1, \dots, q_n \in S^3.$$

Stačí tedy ukázat, že každá souměrnost podle nadroviny v  $\mathbb{H}$  je obrazem nějakého prvku z  $S^3 \times S^3$ . Každá souměrnost podle nadroviny ve čtyřrozměrném euklidovském prostoru má tvar

$$x \mapsto -qx\bar{q} \quad \text{pro } q \in S^3.$$

Toto zobrazení můžeme považovat za obraz prvku  $[-q, q] \in S^3 \times S^3$ . Nejde sice o prvek grupy  $SO(4)$ , neboť jde o nepřímou shodnost, determinant zobrazení je roven  $-1$ , složením sudého počtu souměrností ale dostáváme prvek  $SO(4)$ .

Dále je třeba dokázat, že jádro epimorfismu  $p$  obsahuje pouze dva prvky a to  $(1, 1)$  a  $(-1, -1)$ . Prvek  $(a, b)$  patří do jádra, jestliže

$$\begin{aligned} ax\bar{b} &= x \quad \text{pro každé } x \\ axb^{-1} &= x \\ ax &= xb \quad \Rightarrow a = b = 1 \text{ nebo } a = b = -1 \end{aligned}$$

Marie Provazníková

Potom máme dokázáno, že  $p : S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$  je dvojnásobné nakrytí grupy  $SO(4)$  neboť

$$\ker p = \{-1, 1\}$$

$$\pi_1(SO(4)) = \{-1, 1\}$$

$$S^3 \times S^3 = Spin(4).$$

### 3 Závěr

Každá přímá shodnost ve třírozměrném či čtyřrozměrném prostoru jde vyjádřit pomocí násobení kvaterniony, ve 3D jako zobrazení  $x \mapsto qx\bar{q}$ , ve 4D jako zobrazení  $x \mapsto ax\bar{b}$ . Nemusíme tedy použít maticové rovnice  $X' = AX + B$ , které pro zápis shodnosti používáme obvykle, což může být výhodné například při počítačovém zpracování izometrií.

## Literatura

- [1] John C. Baez. The Octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*. **39**: 145-205, 2002.
- [2] John H. Conway, Derek A Smith. *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*. A K Peters, Natick, Massachusetts (Canada), 2003. ISBN 1-56881-134-9.
- [3] Jiří Vanžura. Osobní sdělení. 26. 9. 2004.