

Ivo Serba

MOZAIKY GEOMETRICKOU SUBSTITUCÍ

Abstrakt

Příspěvek je věnován speciálnímu typu hierarchických mozaik, konstruovaných geometrickou substitucí vzoru.

Klíčová slova

Mozaiky, hierarchické mozaiky, geometrická substitute.

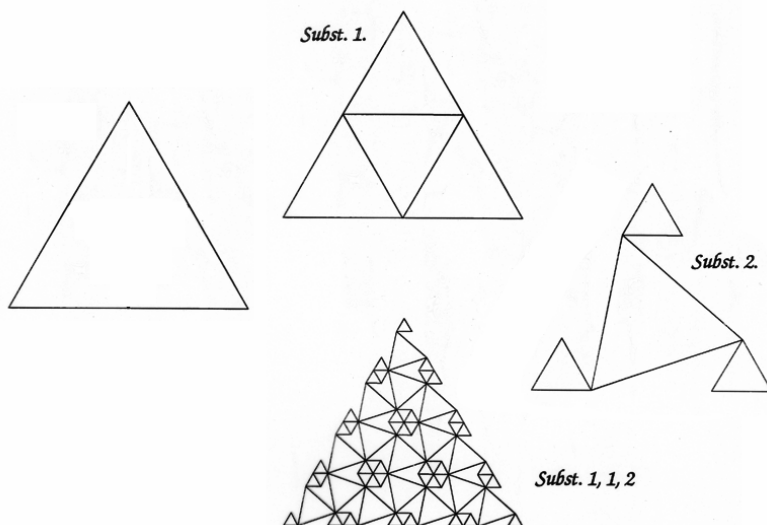
Pojem substitute je v matematice dostatečně známý. Geometrická substitute, o které předkládaný příspěvek pojednává, respektuje rámec zavedeného pojmu. Geometrickou substitucí budeme rozumět nahrazení geometrických objektů jinými geometrickými objekty.

Pokud je n -úhelník nahrazován m -úhelníky a $n = m$, budeme v soulase s [5] substituci nazývat **klonování**. Pokud $n <> m$, nazveme substituci **mutace**.

Protože se předpokládá, že substituent bude geometricky jednodušší objekt, bývá někdy v literatuře označován jako objekt primitivní (prvotní) – **primitiv**.

Obecně by primitivem mohl být n -stěn. Pro náš výklad se omezíme na rovinu a v ní vystačíme s jediným objektem - trojúhelníkem, případně s několika trojúhelníky „svázanými“ uvnitř substituovaného trojúhelníku.

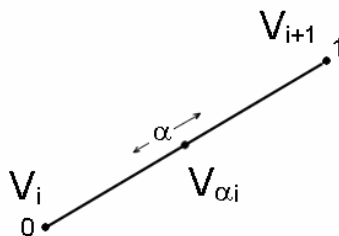
Konstrukce mozaiky je založena na posloupnosti aplikací dílčích substitucí. Princip geometrické substitute ilustruje obrázek 1., kde je rovnostranný trojúhelník postupně substituován dvěma substitučními pravidly (primitivy). První pravidlo je aplikováno dvakrát a pak teprve následuje pravidlo druhé.



Obr. 1. Princip geometrické substituce

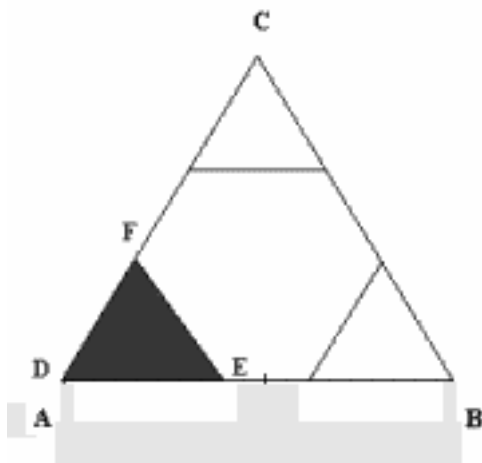
Příklad z obrázku 1. implikuje potřebné instrumentárium počítačové geometrie i grafiky. Je zřejmé, že půjde především o algoritmy transformace objektů (trojúhelníků) v rovině a o manipulace se seznamy vrcholů. V každém substitučním kroku budou souřadnice nových vrcholů odvozeny ze souřadnic vrcholů substituovaného objektu podle aplikovaného substitučního pravidla (primitiva). Pro tento účel vytvoříme v programu pomocné funkce.

První funkci nazvěme **hranová funkce EV**. Tato funkce definuje nový vrchol na hraně (straně). Poloha vrcholu $V_{\alpha i}$ na hraně spojující vrcholy V_i a V_{i+1} je řízena skalárním parametrem α , jak je naznačeno na obrázku 2.



Obr. 2: Hranová funkce $V_{\alpha i} = EV(V_i, V_{i+1}, \alpha)$

Hranovou funkcí jsme vyřešili problém definování vrcholů vnitřních trojúhelníků. Zbývá spojit příslušné vrcholy a vytvořit polygony, v našem případě trojúhelníky. Tento úkol zabezpečí v programu další **funkce vpoly**. Pro vysvětlení použijme příklad podle obrázku 3. a vytvořme vyznačený trojúhelník.



Obr. 3: Použití hranové funkce k definici vyznačeného trojúhelníka

Vstup: souřadnice vrcholů A,B,C, které tvoří substituovaný trojúhelník

Výstup: souřadnice vrcholů D,E,F, jednoho z trojúhelníků v primitiva

Zavedme v trojúhelníku orientaci hran (stran) a označme vrcholy A,B,C pomocí indexů V_1, V_2, V_3 . Funkce **vpoly** konstruuje stejné rohové trojúhelníky (stejně α).

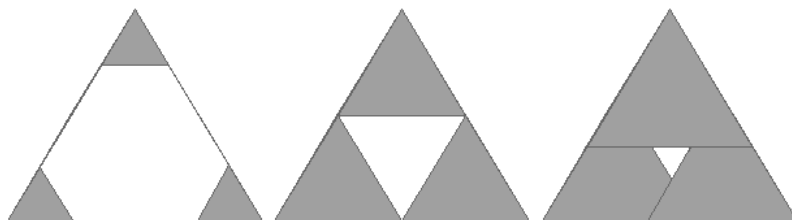
$\text{vpoly}(V_1, \text{EV}(V_1, V_2, \alpha), \text{EV}(V_1, V_3, \alpha))$

$\text{vpoly}(V_2, \text{EV}(V_2, V_3, \alpha), \text{EV}(V_2, V_1, \alpha))$

$\text{vpoly}(V_3, \text{EV}(V_3, V_1, \alpha), \text{EV}(V_3, V_2, \alpha))$

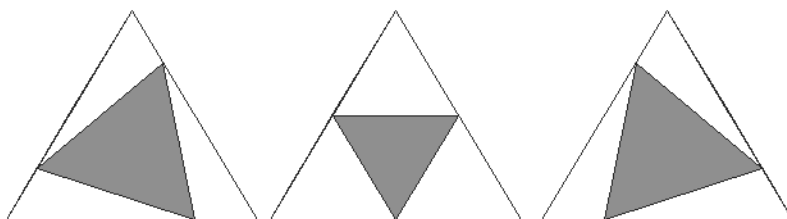
Ze zápisu vidíme, že vrcholy tvoří kruhově vázanou posloupnost. Proto další pomocná **funkce vloop** postupně navýší indexy vrcholů a zopakuje úlohu ve všech vrcholech substituovaného objektu. Obrázky 4. a 5. ukazují použití vytvořených funkcí při zápisu dvou substitučních pravidel - primitivů, výplně rohů trojúhelníka a vepsání trojúhelníka.

výplň rohů = vloopy(vpoly(V_i , $EV(V_i, V_{i+1}, \alpha)$, $EV(V_i, V_{i-1}, \alpha)$))



Obr. 4: Primitiv výplň rohů pro $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$

vepsání = vpoly ($EV(V_i, V_{i+1}, \alpha), EV(V_{i+1}, V_{i-1}, \alpha), EV(V_{i-1}, V_i, \alpha)$)

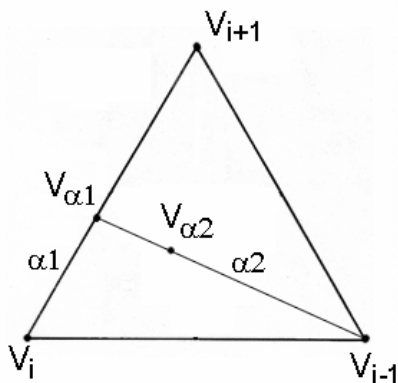


Obr. 5: Primitiv vepsání pro $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75$

Nyní máme základní programové moduly pro budoucí editor a generátor primitivů, který zajistí programově efektivní klonování trojúhelníků. Tento postup lze dále rozvinout a substituce obohatit. Pokud umožníme konstrukci trojúhelníkového primitiva ve vrstvách, které následně sloučíme, a bude-li barva hran i výplně trojúhelníků stejná, pak trojúhelníky splynou a vytvoří libovolný substituční m-úhelník a substituce se podle naší terminologie stane mutací. Při aplikaci takto definovaných mutačních pravidel na trojúhelníkovou síť vznikne opět trojúhelníková síť, na kterou můžeme dále aplikovat pravidla libovolného typu. Získali jsme tak výtvarně velmi silný nástroj. Další zlepšení konstrukce oproti přístupu Glassnera [5] zajistí **kombinovaná hranová funkce EC**, která dovolí definici souřadnic vrcholu kdekoli uvnitř substituovaného objektu.

Funkce EC je vlastně dvojitou aplikací funkce EV.

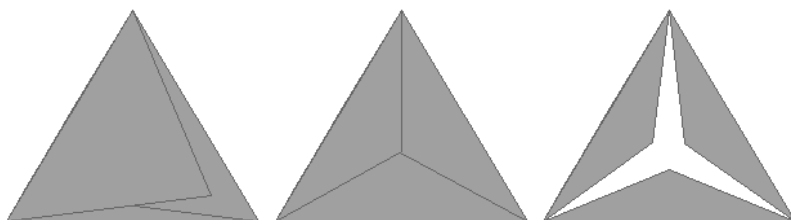
$$V_{\alpha 2} = EC(V_{i-1}, EV(V_i, V_{i+1}, \alpha_1), \alpha_2).$$



Obr. 6. Kombinovaná hranová funkce EC.

Použití kombinované funkce EC v primitivu hvězda:

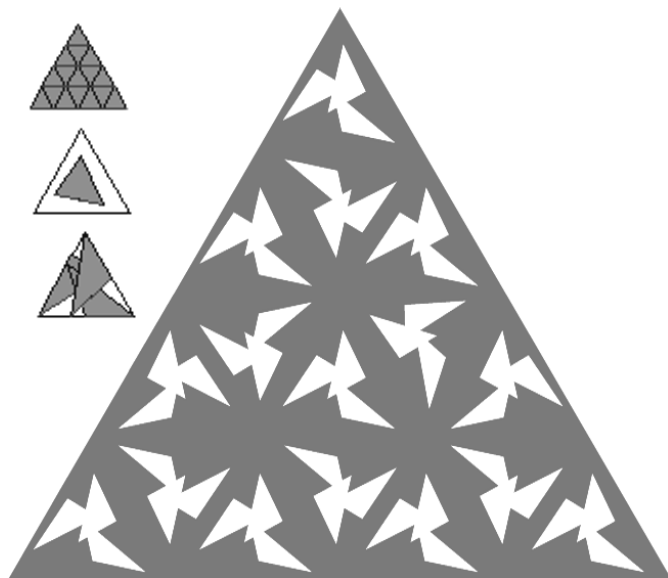
hvězda = vloopy(vpoly($V_i, V_{i+1}, EC(V_{i-1}, EV(V_i, V_{i+1}, 1/2), \alpha))$))



Obr. 7: Primitiv hvězda pro $\alpha = 0.25, 0.66, 0.75$

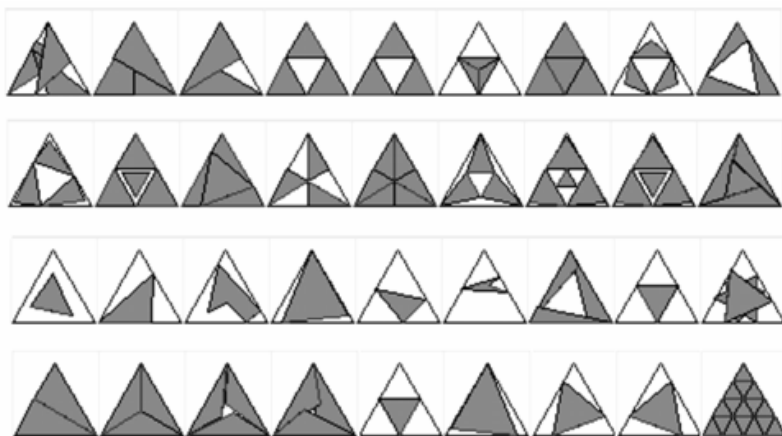
Hlavním posláním programu je interakční návrh primitivů a jejich mapování.

Výtvarné možnosti editoru jsou dány bohatstvím připraveného souboru primitivů. Zbylé moduly programu odpovídají standardnímu grafickému editoru.

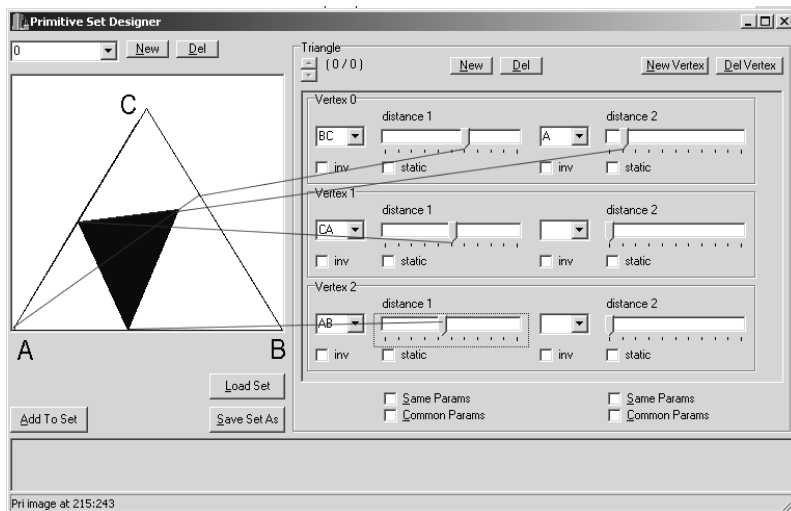


Obr. 7. Příklad tří substitucí

Na obr. 8.a 9. je soubor primitivů a jedno z programových oken René Novotného [7].

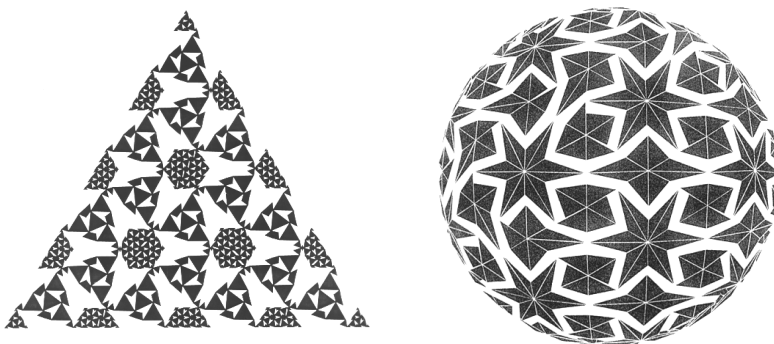


Obr. 8. Sestava vstupních primitivů



Obr. 9. Okno pro návrh primitiva

Ke geometrickým substitucím se autor vrací již několik let. Na téma editorů a generátorů grafických substitucí vedl několik prací. Poslední z nich je součástí programového zabezpečení cvičení v předmětu Výtvarná informatika. Na posledním obrázku 10. je ilustrováno mapování mozaiky na rovinu a na kouli.



Obr. 10. Mozaika v rovině a na kouli.

Literatura

- [1] Cline, M.: Recursive shapes. Internet, listopad 2000.
<http://24.113.158.62/cline/RecursiveShapes>
- [2] Firebugh, M.: Objects of fractional dimension. Internet, prosinec 2000.
<http://www.uwp.edu/academic/computer.science/morris.csci/CS.320/Week.11/Ch11a.www/Ch11a.html>
- [3] Foukal, P.: Grafické substituce, Dipl. práce FEI VUT v Brně, 1994 (ved. autor).
- [4] Horák, M.: Generátor ornamentů s využitím geometrických substitucí, Diplomová práce FEI VUT v Brně, 2000 (ved. J. Matůš).
- [5] Glassner, A.S.: Geometric Substitution: A Tutorial, IEEE Computer Graphics & Appl. January 1992, pp 22 – 36.
- [6] Kurlander, D., Bier, E. A.: Graphical Search and Replace, Computer Graphics (Proc. Siggraph), Vol. 22. No.4, Aug. 1988, pp. 113 – 120.
- [7] Novotný, R.: Generátor geometrických substitucí, Diplomová práce FEI VUT v Brně, 2001 (ved. autor).
- [8] Sequin, C, H, et al.: Procedural Generation of Geometrics Objects, Report No. UCB/CSD 89/511, Comp. Sci. Div. University of California, Berkeley, June 1989.