Jiří Šrubař

VLASTNOSTI TROJÚHELNÍKA A JEJICH ANALOGIE PRO ČTYŘSTĚN

Abstrakt

Některé vlastnosti trojúhelníka mají své obdoby i pro přirozenou prostorovou analogii trojúhelníka – čtyřstěn. V příspěvku jsou výpočetně odvozeny některé takové analogie a jejich modifikace.

Klíčová slova

Kružnice devíti bodů, Eulerova přímka, Lemoinův bod, Longchampův bod, prostorové zobecnění.

1 Úvod

Ve svém příspěvku na 24. konferenci o geometrii a počítačové grafice (viz [1]) jsem se věnoval prostorovým zobecněním některých vlastností trojúhelníka pro čtyřstěn. Kromě zřejmých analogií (jako je např. těžiště) byly v příspěvku odvozeny např. podmínky pro existenci ortocentra. V tomto příspěvku ukážeme některá další jednoduchá prostorová zobecnění vlastností trojúhelníka a nakonec je složíme v zobecnění vlastností složitějších.

2 Těžiště, ortocentrum

Na úvod připomeneme vlastnosti dvou důležitých bodů spjatých s trojúhelníkem i jeho prostorovou analogií – čtyřstěnem.

Je zřejmé, že každý čtyřstěn má své těžiště. Ovšem je poměrně snadné zapomenout na to, že pro těžiště čtyřstěnu platí vztah

$$\frac{|T_\alpha T|}{|TA|} = \frac{|T_\beta T|}{|TB|} = \frac{|T_\gamma T|}{|TC|} = \frac{|T_\delta T|}{|TD|} = \frac{1}{3}\,,$$

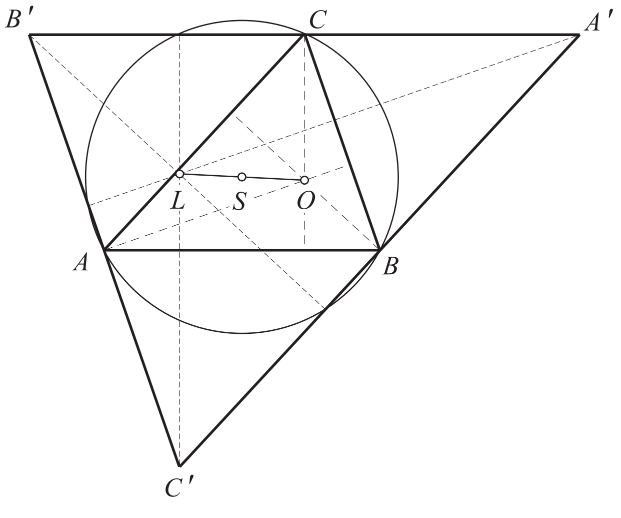
kde A, B, C, D jsou vrcholy, T_α, T_β, T_γ, T_δ jsou těžiště protějších stěn a T je těžiště čtyřstěnu.

Je také zřejmé, že ne každý čtyřstěn má ortocentrum – společný průsečík výšek. Ortocentrum čtyřstěnu existuje právě tehdy, když každé dvě protější hrany čtyřstěnu leží na kolmých přímkách (lze i ukázat, že pokud dva páry protějších hran leží na kolmých přímkách, má stejnou vlastnost i zbývající dvojice).

3 Longchampův bod

Longchampův bod L trojúhelníka je definován jako bod středově souměrný s ortocentrem O podle středu S kružnice trojúhelníku opsané (viz obr. 1). Longchampův bod je zároveň ortocentrem trojúhelníka $A'B'C'$ přidruženého k trojúhelníku ABC (strany trojúhelníka ABC jsou středními příčkami trojúhelníka $A'B'C'$). O dalších vlastnostech Longchampova bodu viz např. [3]

Také ke čtyřstěnu $ABCD$ můžeme sestrojit přidružený čtyřstěn $A'B'C'D'$ – vrcholy A, B, C, D budou těžiště stěn čtyřstěnu $A'B'C'D'$ a oba čtyřstěny si budou odpovídat ve stejnolehlosti se středem ve společném těžišti T s koeficientem stejnolehlosti 3. Protože si tyto dva čtyřstěny odpovídají ve stejnolehlosti platí, že $A'B'C'D'$ má ortocentrum (L) právě tehdy, když $ABCD$ má ortocentrum (O).



Obrázek 1: Longchampův bod trojúhelníka

Pro čtyřstěn (s ortocentrem) lze také definovat bod L jako bod souměrný s ortocentrem podle středu kulové plochy opsané. Početně lze poté snadno ověřit, že takový bod L je také ortocentrem čtyřstěnu přidruženého.

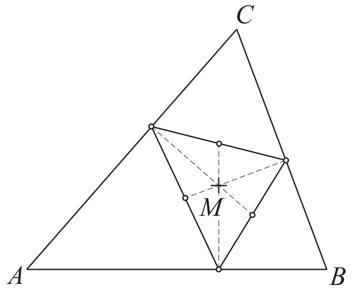
4 Lemoinův bod

Lemoinův bod lze definovat více způsoby. Z početního hlediska je nejvýhodnější definice pomocí vzdáleností: Lemoinův bod M trojúhelníka ABC je takový bod, pro který je

$$\mathrm{vzd}^2(M, a) + \mathrm{vzd}^2(M, b) + \mathrm{vzd}^2(M, c)$$

minimální (a, b, c jsou přímky, na kterých leží strany trojúhelníka).

Pěknou geometrickou vlastností Lemoinova bodu je např. to, že je těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka (viz obr 2).



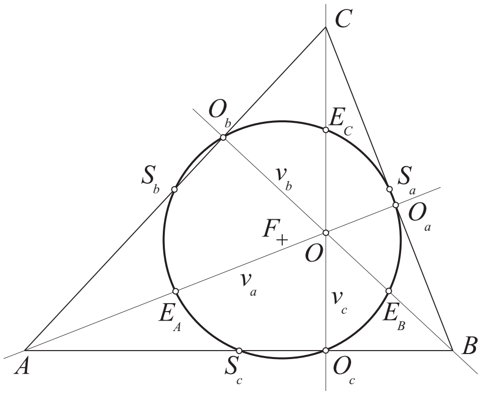
Obrázek 2: Lemoinův bod

Lemoinův bod pro čtyřstěn můžeme definovat obdobně jako u trojúhelníka. Bude to bod, pro nějž je součet čtverců vzdáleností od rovin stěn čtyřstěnu minimální. Metodami matematické analýzy lze poměrně snadno ukázat, že takový bod existuje a je právě jeden.

Zachována zůstane i ona hezká geometrická vlastnost – také Lemoinův bod čtyřstěnu je těžištěm svého úpatnicového čtyřstěnu.

5 Kružnice devíti bodů

Dalším slavným pojmem spojeným s trojúhelníkem je tzv. kružnice devíti bodů (jinak také Feuerbachova kružnice). Je to kružnice procházející středy stran, patami výšek daného trojúhelníka a dále tzv. Eulerovými body – středy úseček spojujících vrcholy trojúhelníka s jeho ortocentrem (viz obr. 3).



Obrázek 3: Kružnice devíti bodů

Prostorová analogie Feuerbachovy kružnice již není prostým převedením do prostoru – tedy není to kulová plocha procházející patami výšek, těžišti stěn a středy úseček spojujících vrcholy s ortocentrem. Pokud se omezíme na čtyřstěny s ortocentrem, pak existuje sféra, která prochází těžišti stěn a patami výšek. Tato sféra ale neprochází Eulerovými body. Zde musíme (podobně jako u těžiště) přistoupit ke změně – průsečíky úseček spojujících vrcholy s ortocentrem čtyřstěnu neleží totiž ve středu těchto úseček, ale dělí je v poměru 2:1.

Tedy za prostorovou analogii kružnice devíti bodů pro čtyřstěn $ABCD$ s ortocentrem O budeme považovat "*kulovou plochu dvanácti bodů*", která prochází těžišti stěn, patami výšek a dále body F_A, F_B, F_C a F_D, které leží na úsečkách spojujících vrcholy s ortocentrem, a které vyhovují podmínce:

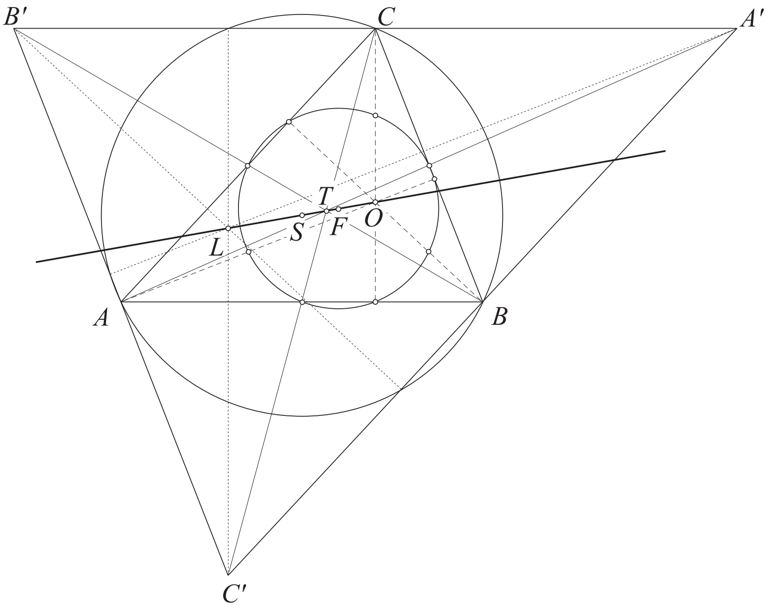
$$\frac{|AF_A|}{|F_AO|} = \frac{|BF_B|}{|F_BO|} = \frac{|CF_C|}{|F_CO|} = \frac{|DF_D|}{|F_DH|} = \frac{2}{1} \ .$$

Střed této kulové plochy (stejně jako střed Feuerbachovy kružnice) budeme značit F.

6 Eulerova přímka

Na Eulerově přímce nerovnostranného trojúhelníka ABC leží jeho těžiště T, střed kružnice opsané S, ortocentrum O, střed kružnice devíti bodů F a Longchampův bod L a to v pořadí O, F, T, S, L (viz obr. 4). Dále platí pro vzdálenosti těchto bodů:

$$|LS| = |OS|, \quad |TS| = \frac{1}{3}|OS|, \quad |FT| = \frac{1}{6}|OS|.$$



Obrázek 4: Eulerova přímka trojúhelníka

Analogie všech těchto bodů pro čtyřstěn známe, proto bude jistě zajímavé zjistit, zda i pro Eulerovu přímku existuje prostorová obdoba.

V části věnované Longchampovu bodu jsme již zjistili, že body L, S a O opravdu leží na jedné přímce a pro jejich vzdálenosti platí vztah obdobný rovinnému případu. Podobě lze také zjistit, že na této přímce leží i zbývající dva body a pro jejich vzdálenosti platí:

$$|LS| = |OS|, \quad |TS| = \frac{1}{2}|OS|, \quad |FT| = \frac{1}{6}|OS|. \tag{1}$$

Tedy pokud je $ABCD$ nepravidelný čtyřstěn s ortocentrem, potom jeho těžiště T, střed kulové plochy opsané S, ortocentrum O, střed kulové plochy dvanácti bodů F a Longchampův bod L leží na jediné přímce a to v pořadí O, F, T, S, L. Pro jejich vzdálenosti platí vztahy (1).

7 Závěr

Odvodili jsme prostorové analogie některých jednoduchých vlastností trojúhelníka a s jejich pomocí jsme byli schopni ukázat také zobecnění dvou složitějších vlastností – kružnice devíti bodů a Eulerovy přímky. Přestože je odvození některých jednodušších zobecnění záležitostí středoškolské matematiky a geometrie (zejména stereometrie), neobešli jsme se většinou bez použití matematického softwaru.

Literatura

[1] J. Šrubař: *Prostorová zobecnění vlastností trojúhelníka*, sborník příspěvků 24. konference o geometrii a počítačové grafice. VŠB-TU, Ostrava, 2004

[2] J. Švrček, J. Vanžura: *Geometrie trojúhelníka*, STNL, Praha, 1988

[3] E. W. Weisstein: *de Longchamps Point*,
From MathWorld–A Wolfram Web Resource
[http://mathworld.wolfram.com/deLongchampsPoint.html]