

Margita Vajsáblová

ZOBRAZENIA NA KUŽELOVÚ PLOCHU POUŽITÉ NA ÚZEMÍ ČR A SR

Abstrakt

Cieľom príspevku je popis geometrických vlastností kužeľových zobrazení používaných na území bývalého Československa, konkrétne Křovákovo a Lambertovo konformného kužeľového zobrazenia, ich porovnanie na území SR a vhodnosť použitia s ohľadom na tvar územia. Objektom analýzy sú tiež loxodrómy, ako krivky s konštantným azimutom a vlastnosti ich obrazu v týchto zobrazeniach.

Kľúčové slová

Kužeľové zobrazenie, zemepisné súradnice, kartografické súradnice, konformné zobrazenie, dĺžkové skreslenie, loxodróma.

1 Poznámky z histórie

Geometrické základy zobrazenia zemského povrchu (referenčnej plochy Zeme) na kužeľovú plochu boli položené gréckym matematikom a kartografom Ptolemaiom (90 – 168 n.l.), ktorého dielo významne ovplyvnilo ďalší vývoj kartografie.

Matematik a geometer Johannes Lambert (1728-1777) je považovaný za zakladateľa kartografie ako vednej disciplíny. Okrem iných zobrazení navrhol kužeľové zobrazenie v normálnej polohe, teda na súosú kužeľovú plochu, ktoré je konformné. Použitie sečnej kužeľovej plochy zabezpečí dve neskreslené rovnobežky a relatívne malé dĺžkové skreslenia medzi nimi.

Na našom území bolo kužeľové zobrazenie používané až po vzniku ČSR, kedy Ministerstvo financií vypísalo požiadavku na nový geodetický súradnicový systém, teda aj na kartografické zobrazenie územia republiky. Boli prijaté dva návrhy. Vojenské zložky prijali systém navrhnutý plukovníkom Dr. Benešom z vojenského zemepisného ústavu, ktorého zobrazenie má rovnaký geometrický princíp ako Lambertovo zobrazenie.

V civilných zložkách je od r. 1937 dodnes Československá jednotná trigonometrická sieť katastrálna zobrazená v dvojito konformnom kužeľovom zobrazení vo všeobecnej polohe s dvoma neskreslenými kartografickými rovnobežkami, ktoré navrhol Ing. Křovák. Územie bývalého Československa malo pozdĺžny tvar v okolí kružnice guľovej plochy, ktorá nie je zemepisnou rovnobežkou, ale tzv. kartografickou.

Křovák zostrojil kartografické rovnobežky ohraničujúce územie Československa, s amplitúdou rovnobežkového pásu $2^{\circ}31' \cong 280 \text{ km}$, ktorá je takmer o stupeň menšia ako amplitúda zemepisných rovnobežiek u Benešovho zobrazenia, teda má aj menšie maximálne dĺžkové skreslenie.

2 Charakteristika kuželových zobrazení

2.1 Všeobecné poznámky

Jednoduché kuželové zobrazenie je zobrazením na kuželovú plochu rozvinutú do roviny, poludníky sa zobrazujú do častí tvoriacich priamok, rovnobežky a póly do rovnobežkových kružníc, v rozvinutí do oblúkov sústredných kružníc so stredom vo vrchole V kuželovej plochy.

Obraz prvkov referenčného rotačného elipsoidu vyjadrujeme v polárnych súradniciach $[\rho, \varepsilon]$ so začiatkom V a pravouhlou súradnicovou sústavou $[x, y]$, kde x je totožná s priamkou, na ktorej leží obraz tzv. základného poludníka a y sa dotýka obrazu tzv. základnej rovnobežky s polomerom ρ_0 . Obrazy poludníkov so zemepisnou šírkou λ zvierajú so základným poludníkom uhol $\varepsilon = n\lambda$, kde $n \in \langle 0, 1 \rangle$ a rovná sa sínusu uhla tvoriacich priamok kuželovej plochy s jej osou, čo vyplýva z výpočtu uhla rozvinutia kuželovej plochy. Polomery ρ obrazov rovnobežkových kružníc sú funkciou ich zemepisnej šírky φ .

Konštanty kuželového zobrazenia n a ρ_0 sú určované z požiadaviek skreslení a z geometrického hľadiska zo vzájomnej polohy referenčnej plochy a kuželovej plochy. Pri požiadavke, aby bola neskreslená jedna rovnobežka, je kuželová plocha dotyková, pri požiadavke na dve neskreslené rovnobežky sa volí sečná kuželová plocha.

2.2 Lambertovo konformné kuželové zobrazenie

Pri konformných zobrazeniach, kedy sa neskresľujú uhly, dĺžkové skreslenie v bode nie je závislé od smeru. Z rovnakého skreslenia rovnobežiek a poludníkov sú potom odvodené zobrazovacie rovnice Lambertovho kuželového zobrazenia, ako je uvedené v [Srňka, 1986]. V konformných kuželových zobrazeniach sa pól zobrazuje do bodu, opačný pól sa zobrazuje do kružnice s nekonečne veľkým polomerom.

2.3 Křovákovo zobrazenie

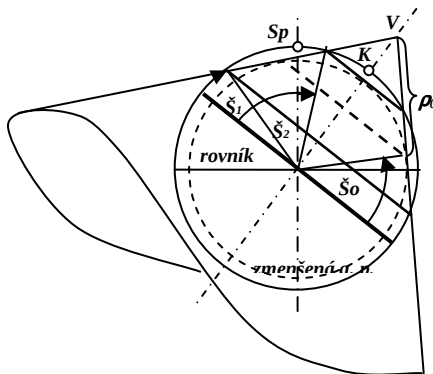
Transformáciu bodov Besselovho referenčného rotačného elipsoidu do roviny je v Křovákovom zobrazení možné rozdeliť do štyroch základných

ZOBRAZENIA NA KUŽELOVÚ PLOCHU POUŽITÉ NA ÚZEMÍ ...

krokov. Zobrazovacie rovnice a hodnoty parametrov všetkých krokov sú uvedené v [Daniš –Val’ko, 1980, Hojovec, 1987, Srnka, 1986]. Popíšeme stručne geometrický princíp jednotlivých krokov. V prvom kroku transformácie je Besselov elipsoid zobrazený Gaussovým konformným zobrazením na guľovú plochu (tzv. Gaussovu).

Vzhľadom na všeobecnú polohu Křovákovo je druhým krokom otočenie zemepisnej sférickej súradnicovej sústavy, čím sa zemepisný pól P_S zobrazí do tzv. kartografického pólu K_P .

Treťou fázou Křovákovo zobrazenia je výpočet polárnych súradníc v rovine rozvinutej kužeľovej plochy z kartografických súradníc, a to konformne vo všeobecnej polohe, teda os kužeľovej plochy pretína guľovú plochu v kartografickom póle (obr. 1). Pri dotykovej ploche v základnej kartografickej rovnobežke $78^{\circ}30'$ dosiahol Křovák na krajných rovnobežkách skreslenie $+24\text{ cm/km}$. Voľbou kužeľovej plochy, ktorá sa dotýka zmenšenej guľovej plochy (polomer vynásobený koeficientom 0,9999) zmenšil skreslenie na 14 cm/km . Dôvodom je, že z geometrického hľadiska kužeľová plocha pretína referenčnú guľovú plochu v dvoch kartografických rovnobežkách, a tým sa lepšie primyká k rovnobežkovému pásu ohraničujúcemu naše územie.



Obrázok 1: Vzájomná poloha guľovej a kužeľovej plochy v Křovákovo zobrazení

Záverečným krokom je transformácia polárnych súradníc zobrazených bodov do pravouhlých rovinných súradníc x, y . Územie bývalého Československa leží v jednom kvadrante vzhľadom na súradnicové osi. Obrazom zemepisnej siete v Křovákovo zobrazení sú krivky vyššieho rádu, avšak na našom území je prakticky možné zobrazovať aj zemepisné poludníky ako zväzok priamok a rovnobežky ako sústredné kružnice.

3 Použitie kuželových zobrazení

V súčasnosti sú v Křovákovom zobrazení základné mapy veľkých a stredných mierok a všetky tematické mapy z nich odvodené na území bývalého Československa.

Lambertovo konformné kuželové zobrazenie je používané na niektorých účelových mapách, napr. na leteckých. Podľa medzinárodných smerníc AIP sú pre letové mapy predpísané dve zobrazenia, a to Mercatorovo valcové zobrazenie v rovníkovej polohe a Lambertovo kuželové zobrazenie [Kubasák, 2005]. Pre leteckú mapu SR boli zvolené neskreslené rovnobežky $48^{\circ}00'$ a $49^{\circ}20'$, použitý je trojosí elipsoid WGS-84.

Konformné kuželové zobrazenie Lambertovo v normálnej polohe je používané aj v štátnych mapových dielach niektorých európskych štátoch a v 60% štátov USA. Vo Francúzsku je používaný Clarkov elipsoid, územie Francúzska je rozdelené na 3 rovnobežkové pásy a Korziku. Mapové dielo Belgicka je tiež v konformnom kuželovom zobrazení Lambertovom, v pólovej polohe s 2 neskreslenými rovnobežkami. Celé územie Belgicka je zobrazené z Hayfordovho elipsoidu na jednu kuželovú plochu.

4 Analýza kuželových zobrazení na území SR

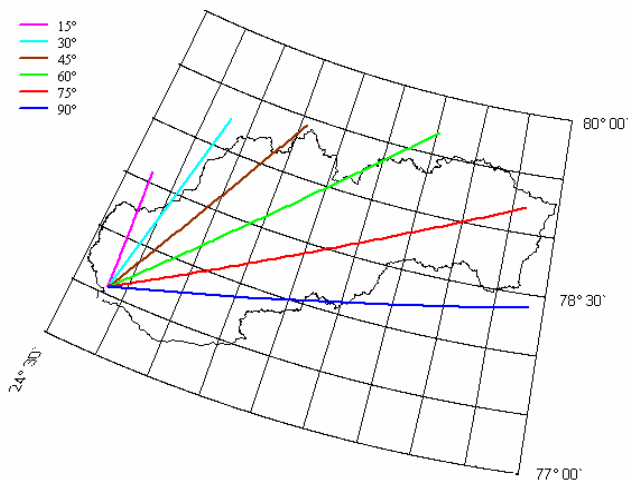
Táto kapitola článku je venovaná analýze Křovákovho a Lambertovho kuželového zobrazenia územia Slovenska, tiež vlastnostiam obrazu loxodrómu, ako kriviek s konštantným azimutom.

Na obr. 2 sú v Křovákovom zobrazení obrazy štátne hranice SR a loxodrómy vychádzajúce z Bratislavy pod rôznymi azimutmi uvedenými v legende, a to na intervaloch kartografickej šírky a dĺžky pre územie Slovenska. Na obr. 3 je obraz zemepisnej siete a rovnaká sieť loxodrómu v Lambertovom konformnom kuželovom zobrazení s neskreslenou rovnobežkou $U_0 = 48^{\circ}30'$. Vzhľadom na konformnosť oboch popísaných zobrazení pre obraz loxodrómu platí, že sú to krivky, ktorých azimut je neskreslený. V Lambertovom zobrazení je to krivka zvierajúca konštantný uhol so zemepisnými poludníkmi, teda so zväzkom priamok. V Křovákovom kuželovom zobrazení je obrazom loxodrómy krivka zvierajúca konštantný uhol s krivkami, ktoré sú obrazom zemepisných poludníkov. So zväzkom priamok, ktoré sú obrazom kartografických poludníkov, nezvíra obraz loxodrómy konštantné uhly.

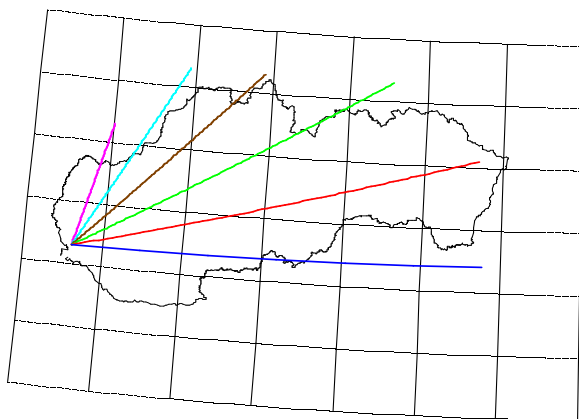
Křovákovo a Lambertovo zobrazenie zachováva uhly, preto sme analyzovali skreslenia azimutu loxodrómu na území Slovenska v Ptolemaiovom ekvidištancnom zobrazení (zachováva dĺžku poludníkov). Graf týchto skreslení je znázornený na obr. 4. Loxodrómy prechádzajúce bodom $P [48^{\circ}45', 19^{\circ}]$ majú rôzny rozsah zemepisnej dĺžky na našom

ZOBRAZENIA NA KUŽELOVÚ PLOCHU POUŽITÉ NA ÚZEMÍ ...

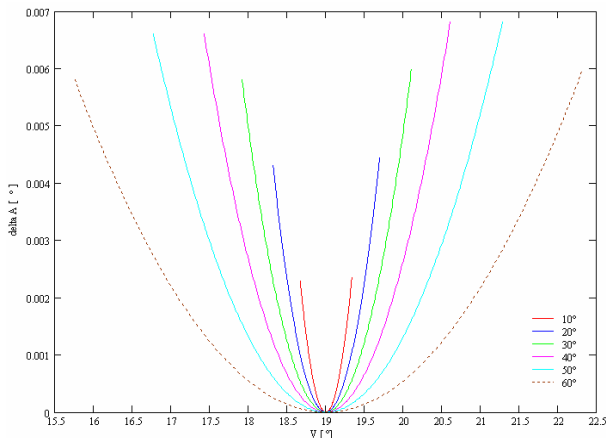
území, a to v závislosti od veľkosti azimutu. Z analýzy skreslenia loxodrómy v Ptolemaiovom ekvidištanchom zobrazení pre územie Slovenska možno dospieť k záveru, že najmenšie maximálne skreslenia dosahujú azimuty loxodrómy s malou hodnotou azimutu (konkrétne skreslenie pre azimut 10° je $7,92''$), najväčšie loxodrómy s azimutom 40° - 50° (konkrétne skreslenie pre azimut 40° je takmer $24,48''$).



Obrázok 2: Obráz kartografickej siete a loxodróm s počiatkom v Bratislave s uvedenými azimutmi v Křovákovom zobrazení



Obrázok 3: Obráz kartografickej siete a loxodróm s počiatkom v Bratislave s uvedenými azimutmi v Lambertovom zobrazení



Obrázok 4: Graf skreslení azimutu loxodrómy na území SR v Ptolemaiovom ekvidistančnom kuželovom zobrazení v závislosti od zemepisnej dĺžky

5 Záver

Amplitúda kartografických rovnobežiek Křovákovo zobrazenia na území Slovenska je približne $2^{\circ} 20'$ a amplitúda zemepisných rovnobežiek na území Slovenska je približne $1^{\circ} 52'$. Z toho vyplýva, že aj maximálne dĺžkové skreslenie je v Lambertovom kuželovom zobrazení v normálnej polohe menšie, ako v Křovákovom. Záverom možno konštatovať, že vzhľadom na tvar územia je použitie konformného kuželového zobrazenia v normálnej polohe vyhovujúce nielen pre účelové a tematické mapy, ale aj pre mapy veľkých a stredných mierok štátneho mapového diela SR.

Podakovanie

Tento článok vznikol za podpory grantovej výskumnej úlohy VEGA č. 1/1034/04..

Literatúra

- [1] Daniš, M., Vaľko, J.: *Matematická kartografia, praktická časť, tabuľky, nomogramy*, Edičné stredisko SVŠT, Bratislava, 1980.
- [2] Hojovec, V. a kol.: *Kartografie*, GKP, Praha, 1987.
- [3] Kubasák, T.: *Uhlové skreslenia loxodrómy v kuželových zobrazeniach*, Diplomová práca, SvF STU, Bratislava, 2005.
- [4] Srnka, E.: *Matematická kartografie*, VAAZ, Brno, 1986.