

Daniela Velichová**DVOJOSOVÉ ROTAČNÉ PLOCHY II****Abstrakt**

Príspevok stručne pojednáva o špeciálnej triede plôch, ktoré možno generovať euklidovskou metrickou transformáciou zloženou z dvoch otáčaní okolo dvoch rôznych osí. Klasifikácia pomocou určitej vzájomnej polohy osí rotácie a typu riadiaceho útvaru umožňuje špecifikovať špeciálne typy dvojsových rotačných plôch.. Uvedené sú príklady špeciálnych typov plôch reprezentujúcich špecifické podtriedy – plochy sférického a Eulerovho typu, ich vektorové rovnice a niektoré vlastnosti. Plochy sú zobrazené v prostredí MAPLE.

Kľúčové slová

Dvojsová rotácia, klasifikácia plôch sférického a Eulerovho typu

1 Úvod

Dvojsová rotačná plocha vznikne dvojsovým rotačným pohybom, určeným maticou $T(v) = (a_{ij}(v))$, pre $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $v \in R$, riadiacej čiary k danej vektorovou rovnicou $r(u) = (x(u), y(u), z(u), 1)$, $u \in R$.

Vektorová rovnica plochy definovaná na oblasti $\Omega \subset R^2$ je súčinom

$$p(u, v) = r(u) \cdot T(v) = \left(\sum_{i=1}^4 x(u) a_{i1}(v), \sum_{i=1}^4 y(u) a_{i2}(v), \sum_{i=1}^4 z(u) a_{i3}(v), 1 \right)$$

Nech $^1o, ^2o$ sú osi dvoch rotácií. Rozlišujeme tri základné typy dvojsových rotačných plôch v závislosti od vzájomnej polohy osí rotácií:

- I. $^1o \parallel ^2o$, plochy cykloidného typu
- II. $^1o \times ^2o$, plochy sférického typu
- III. $^1o / ^2o$, plochy Eulerovho typu.

Podľa typu riadiacej čiary (priamka, kružnica) môžeme rozdeliť plochy do skupín (priamkové, cyklické), ktoré sa dajú ďalej kategorizovať podľa vzájomnej polohy riadiaceho útvaru a osí rotácie. Plochy cykloidného typu sú charakterizované a ďalej klasifikované v [1], predmetom tohto článku sú plochy sférického a Eulerovho typu.

2 Dvojosové rotačné plochy sférického typu

Dvojosová rotácia určená rôznobežnými osami $^1o \times ^2o$ je sférickým pohybom. Umiestnime os 1o do súradnicovej osi z , os 2o do súradnicovej osi y . Parametrické rovnice dvojosovej rotačnej plochy sférického typu definovanej na oblasti $\Omega \subset R^2$, ktorej riadiacou čiarou je krivka daná rovnicou $\mathbf{r}(u) = (x(u), y(u), z(u), 1)$, $u \in R$ sú pre $(u, v) \in \Omega$ v tvare

$$x(u, v) = x(u)\cos^2 2\pi v - y(u)\sin 2\pi v \cos 2\pi v + z(u)\sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = x(u)\sin 2\pi v + y(u)\cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -x(u)\sin 2\pi v \cos 2\pi v + y(u)\sin^2 2\pi v + z(u)\cos 2\pi v$$

Špeciálne dvojosové rotačné plochy sférického typu získame umiestnením riadiacej priamky k do špeciálnej polohy vzhľadom na osi rotácie.

Skupina IIA2 - Priamkové plochy kónické

Riadiaca priamka k je rôznobežná s oboma osami rotácie. Nech:

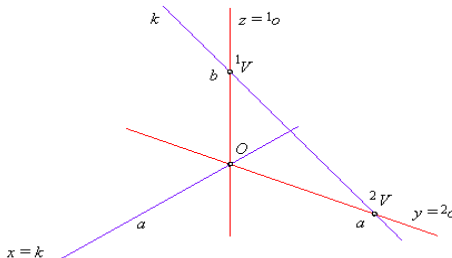
a) k leží v osi x , pretína obe osi v ich spoločnom bode O , plocha neobsahuje kružnice, má tri roviny súmernosti;°

b) k leží v rovine yz

$$k \cap ^1o = ^1V = (0, 0, b, 1)$$

$$k \cap ^2o = ^2V = (0, a, 0, 1)$$

plocha obsahuje jedinú kružnicu, dráhu pohybu bodu 1V a má jedinú rovinu súmernosti.



Parametrické rovnice plôch pre $(u, v) \in [0, 1]^2$ sú

$$x(u, v) = aucos^2 2\pi v$$

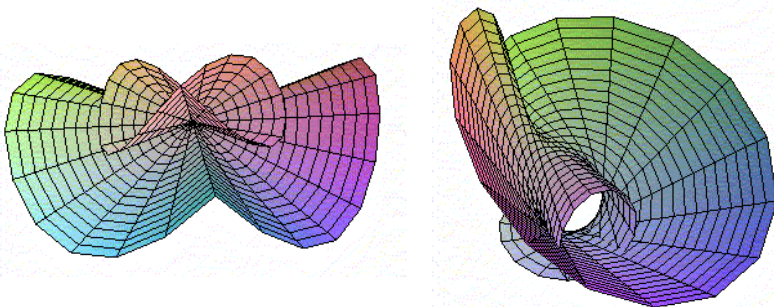
$$x(u, v) = -ausin 2\pi v \cos 2\pi v + b(1 - u)\sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = ausin 2\pi v$$

$$y(u, v) = acos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -au \sin 2\pi v \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = au \sin^2 2\pi v + b(1 - u)\cos 2\pi v$$



Obrázok 1: Dvojosové rotačné plochy sférického typu -priamkové kónické

Skupina IIA3 – priamkové plochy hyperbolické

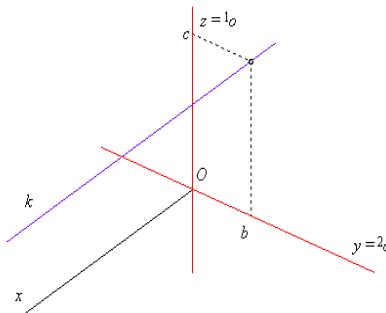
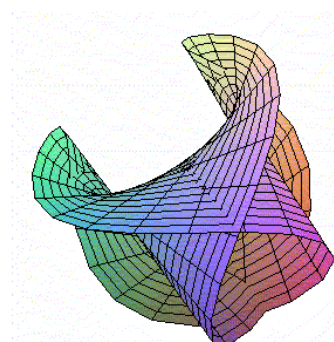
Riadiaca priamka k je mimobežná s oboma osami rotácie, a nech je rovnobežná so súradnicovou osou x .

Parametrické rovnice plôch (obr. 2) pre $(u, v) \in [0, 1]^2$ sú

$$x(u, v) = a u \cos^2 2\pi v + b \sin 2\pi v \cos 2\pi v + c \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = a u \sin 2\pi v + b \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -a u \sin 2\pi v \cos 2\pi v + b \sin^2 2\pi v + c \cos 2\pi v$$



Obrázok 2: Dvojosová rotačná plocha sférického typu-priamková hyperbolická

Skupina IIA4 - Priamkové plochy zložené – 1 (obr. 3)

Riadiaca priamka k je rovnobežná s jednou osou rotácie a pretína druhú os.

Nech k leží v rovine v rovine y z a nech:

a) k je rovnobežná s 1o

$$|{}^1o k| = a,$$

$$k \cap {}^2o = {}^2V = (0, a, 0, 1)$$

plocha neobsahuje kružnice,
má 2 roviny súmernosti;

b) k je rovnobežná s 2o

$$|{}^2o k| = a,$$

$$k \cap {}^1o = {}^1V = (0, 0, a, 1)$$

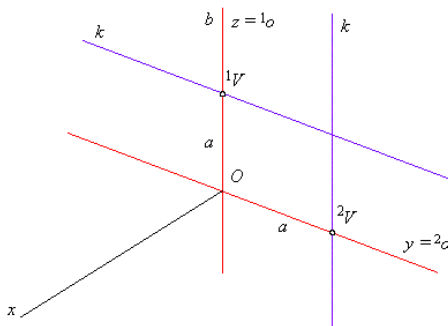
plocha obsahuje jediná
kružnicu, dráhu pohybu bodu
 1V , má jednu rovinu
súmernosti.

k je rovnobežná s 1o , pretína 2o

$$x(u, v) = -a \sin 2\pi v \cos 2\pi v + b \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = a \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = a \sin^2 2\pi v + b \cos 2\pi v$$

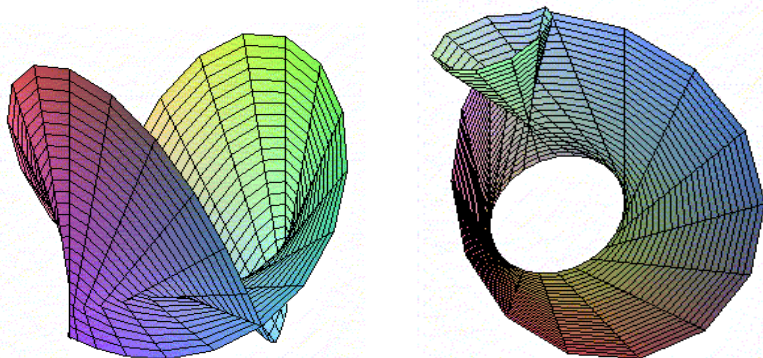


k pretína 1o , je rovnobežná s 2o

$$x(u, v) = -b \sin 2\pi v \cos 2\pi v + a \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = b \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = b \sin^2 2\pi v - a \cos 2\pi v$$



Obrázok 3: Dvojosové rotačné plochy sférického typu -priamkové zložené - 1

Skupina IIA4 - Priamkové plochy zložené – 2 (Obr. 4)

Riadiaca priamka k je rovnobežná s jednou osou rotácie a mimobežná s druhou osou. Nech priamka k pretína os x ,

$$k \cap x = V = (a, 0, 0, 1)$$

a nech:

a) k je rovnobežná s 1o

$$|{}^1o k| = a,$$

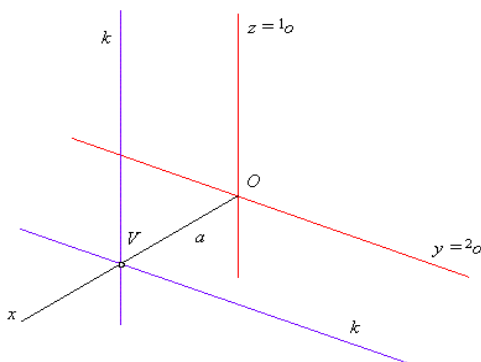
plocha má jedinú rovinu súmernosti;

b) k je rovnobežná s 2o

$$|{}^2o k| = a,$$

plocha má 2 roviny súmernosti.

Plochy neobsahujú žiadnu kružnicu.



k je rovnobežná s 1o , mimobežná s 2o k je mimobežná s 1o , rovnobežná s 2o

$$x(u, v) = a \cos^2 2\pi v + b \sin 2\pi v$$

$$x(u, v) = a \cos^2 2\pi v - b \sin 2\pi v \cos 2\pi v$$

$$y(u, v) = a \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = a \sin 2\pi v + b \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -a \sin 2\pi v \cos 2\pi v + b \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -a \sin 2\pi v \cos 2\pi v + b \sin^2 2\pi v$$

Skupina IIA4 - Priamkové plochy zložené – 3 (Obr. 5)

Riadiaca priamka k je rôznobežná s jednou osou rotácie a mimobežná s druhou osou. Nech je k je rovnobežná s osou x , a nech:

DVOJOSOVÉ ROTAČNÉ PLOCHY II

a) k je rôznobežná s 1o
a mimobežná s 2o ,

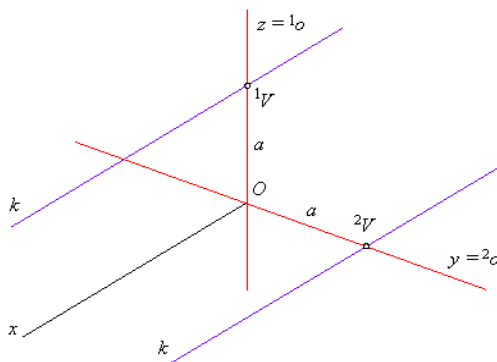
$$k \cap ^1o = ^1V = (0, 0, a, 1)$$

plocha obsahuje jedinú
kružnicu, trajektóriu
pohybu bodu 1V a má
dve roviny súmernosti;

b) k je rôznobežná s 2o
a mimobežná s 1o

$$k \cap ^2o = ^2V = (0, a, 0, 1)$$

plocha neobsahuje
kružnice, má jedinú
rovinu súmernosti.



k pretína 1o , je mimobežná s 2o

$$x(u, v) = bu \cos^2 2\pi v + a \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = bu \sin 2\pi v$$

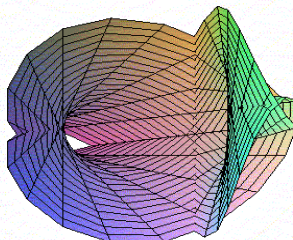
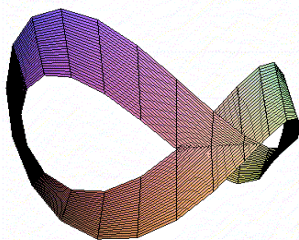
$$z(u, v) = -bu \sin 2\pi v \cos 2\pi v + a \cos 2\pi v$$

k je mimobežná s 1o , pretína 2o

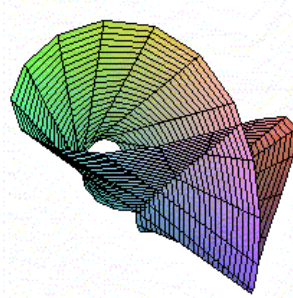
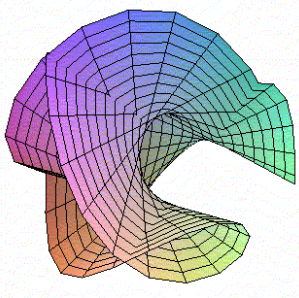
$$x(u, v) = bu \cos^2 2\pi v - a \sin 2\pi v \cos 2\pi v$$

$$y(u, v) = bu \sin 2\pi v + a \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -bu \sin 2\pi v \cos 2\pi v + a \sin^2 2\pi v$$



Obrázok 4: Dvojsové rotačné plochy sférického typu -priamkové zloženie - 2



Obrázok 5: Dvojsové rotačné plochy sférického typu -priamkové zloženie - 3

Skupina IB1 - Cyklické plochy toroidálne

Riadiaca kružnica $k(S, r)$ leží v rovine osí otáčania, v súradnicovej rovine yz , pričom jej vektorová rovnica je $\mathbf{r}(u) = (0, a + r \cos 2\pi u, r \sin 2\pi u, 1)$, $u \in [0, 1]$. Parametrické rovnice plochy (obr. 6a.) na oblasti $[0, 1]^2$ majú tvar

$$x(u, v) = -(a + r \cos 2\pi u) \sin 2\pi v \cos 2\pi v + r \sin 2\pi u \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \sin^2 2\pi v + r \sin 2\pi u \cos 2\pi v$$

Skupina IIB2 – Cyklické plochy všeobecné

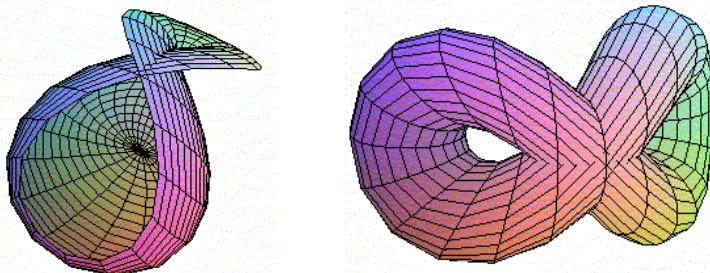
Riadiaca kružnica $k(S, r)$ leží v súradnicovej rovine xy , pričom jej vektorová rovnica je $\mathbf{r}(u) = (a + r \cos 2\pi u, r \sin 2\pi u, 0, 1)$, $u \in [0, 1]$.

Parametrické rovnice plochy (obr. 6b.) na oblasti $[0, 1]^2$ majú tvar

$$x(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \cos^2 2\pi v - r \sin 2\pi u \sin 2\pi v \cos 2\pi v$$

$$y(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \sin 2\pi v + r \sin 2\pi u \cos 2\pi v$$

$$z(u, v) = -(a + r \cos 2\pi u) \sin 2\pi v \cos 2\pi v + r \sin 2\pi u \sin^2 2\pi v$$



Obrázok 6: Cyklická plocha: a) toroidálna b) všeobecná

3 Dvojsové rotačné plochy Eulerovho typu

Dvojsová rotácia určená mimobežnými osami 1o / 2o je všeobecnou Eulerovou rotáciou. Umiestnime os 1o do súradnicovej osi z , os 2o do priamky rovnobežnej so súradnicovou osou x .

Parametrické rovnice dvojsovej rotačnej plochy Eulerovho typu na oblasti $\Omega \subset R^2$ majú tvar

$$x(u, v) = x(u) \cos 2\pi v - y(u) \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = x(u) \sin 2\pi v \cos 2\pi v + y(u) \cos^2 2\pi v - z(u) \sin 2\pi v + d(1 - \cos 2\pi v)$$

$$z(u, v) = x(u) \sin^2 2\pi v + y(u) \sin 2\pi v \cos 2\pi v + z(u) \cos 2\pi v - d \sin 2\pi v$$

Skupina IIIA2 – Priamkové plochy kónické

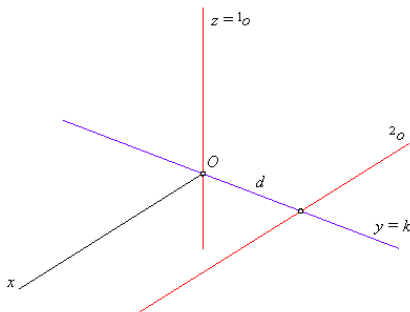
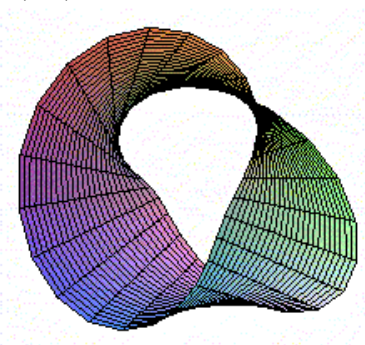
Riadiaca priamka k je rôznobežná s oboma osami rotácie (je priechkou mimobežiek 1o / 2o), nech leží v osi y .

Plocha je typu Möbiiovho listu (obr. 7) a jej parametrické rovnice majú na $[0, 1]^2$ tvar

$$x(u, v) = -a \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = a u \cos^2 2\pi v + d(1 - \cos 2\pi v)$$

$$z(u, v) = a \sin 2\pi v \cos 2\pi v - d \sin 2\pi v$$



Obrázok 7: Dvojosová rotačná plocha Eulerovho typu -priamková kónická

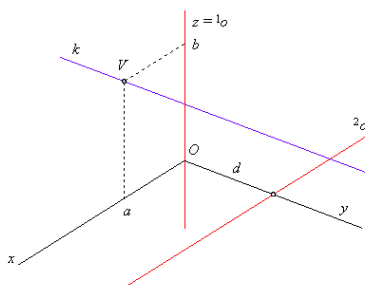
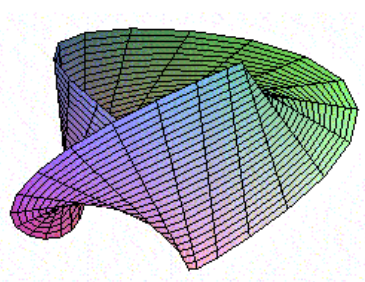
Skupina IIIA3 – priamkové plochy hyperbolické

Riadiaca priamka k je mimobežná s oboma osami rotácie a nech je rovnobežná s osou y . Parametrické rovnice plochy (obr. 8) majú na oblasti $[0, 1]^2$ tvar

$$x(u, v) = a \cos 2\pi v - c \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = a \sin 2\pi v \cos 2\pi v + c u \cos^2 2\pi v - b \sin 2\pi v + d(1 - \cos 2\pi v)$$

$$z(u, v) = a \sin^2 2\pi v + c \sin 2\pi v \cos 2\pi v + b \cos 2\pi v - d \sin 2\pi v$$



Obrázok 8: Dvojosová rotačná plocha Eulerovho typu -priamková hyperbolická

Skupina IIIB2 – Cyklické plochy všeobecné

a) Riadiaca kružnica $k(S, r)$ leží v súradnicovej rovine xz , a jej rovica je

$$\mathbf{r}(u) = (a + r \cos 2\pi u, 0, r \sin 2\pi u, 1) \text{ pre } u \in [0, 1].$$

Parametrické rovnice plochy (obr. 9 vľavo) majú na oblasti $[0, 1]^2$ tvar

$$x(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \cos 2\pi v$$

$$y(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \sin 2\pi v \cos 2\pi v - r \sin 2\pi u \sin 2\pi v + d(1 - \cos 2\pi v)$$

$$z(u, v) = (a + r \cos 2\pi u) \sin^2 2\pi v + r \sin 2\pi u \cos 2\pi v - d \sin 2\pi v$$

b) Riadiaca kružnica $k(S, r)$ leží v súradnicovej rovine xy , pričom jej rovnica je $\mathbf{r}(u) = (r \cos 2\pi u, a + r \sin 2\pi u, 0, 1)$ pre $u \in [0, 1]$.

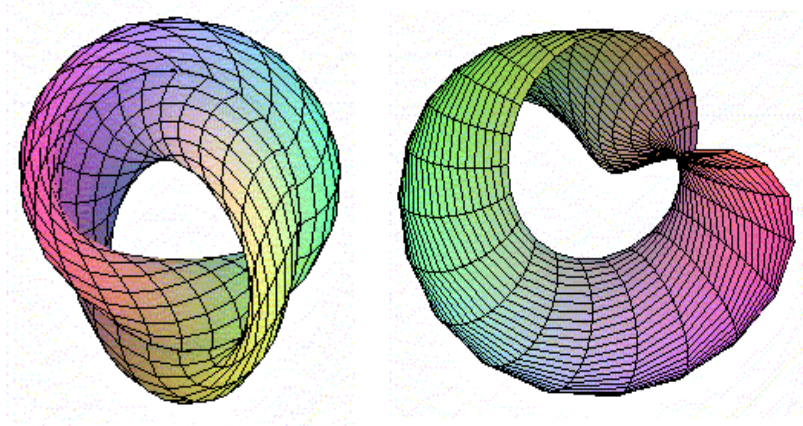
Parametrické rovnice plochy (obr. 9 vpravo) majú na oblasti $[0, 1]^2$ tvar

$$x(u, v) = r \cos 2\pi u \cos 2\pi v - (a + r \sin 2\pi u) \sin 2\pi v$$

$$y(u, v) = r \cos 2\pi u \sin 2\pi v \cos 2\pi v + (a + r \sin 2\pi u) \cos^2 2\pi v + d(1 - \cos 2\pi v)$$

$$z(u, v) = r \cos 2\pi u \sin^2 2\pi v + (a + r \sin 2\pi u) \sin 2\pi v \cos 2\pi v - d \sin 2\pi v$$

Počet kružnicových trajektórií - parametrických v -kriviek oboch plôch závisí od počtu spoločných bodov riadiacej kružnice k a osi rotácie 1o .



Obrázok 9: Dvojosové rotačné plochy Eulerovho typu-cyklické

Literatúra

- [1] D. Velichová: *Dvojosové rotačné plochy*, Sborník 24. Konferencie o geometrii a počítačové grafice, TU Ostrava, Barborka 2004, ČR, ISBN 80-248-0581-2, str. 230 – 235.
- [2] D. Velichová: *Euler angles*, Proceedings of the 3rd International Conference on Applied Mathematics APLIMAT 2004, Sjf STU Bratislava 2004, SR, SBN 80-227-1995-1, pp. 191-198.
- [3] D. Velichová: *Two-axial surfaces of revolution*, Proceedings of the 8th International Scientific Conference Mechanical Engineering 2004, Sjf STU, Bratislava 2004, SR, CD, ISBN 80-227-2105-0, str. S2-60 - S2-65.