

Radek Výrut

VÝPOČET MINKOWSKÉHO SUMY VE 2D A 3D

Abstrakt

Tento článek obsahuje postupy pro výpočet Minkowského sumy dvou množin v rovině a pro výpočet Minkowského sumy konvexních mnohostěnů a množin ohraničených nerovností $f(X) \geq 0$ v prostoru.

Klíčová slova

Minkowského suma, výpočet

1 Úvod

Definice 1.1 *Nechť A a B jsou dvě bodové množiny v E^n . Minkowského suma množin A a B je bodová množina*

$$\bigcup_{b \in B} A^b,$$

kde A^b je množina A posunutá o vektor b , tedy množina: $A^b = \{a + b \mid a \in A\}$. Minkowského sumu množin A a B značíme $A \oplus B$.

Minkowského sumu množin A a B lze též ekvivalentně určit jako: $A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

Další vlastnosti Minkowského sumy včetně důkazů a výčtu aplikací lze najít v [5].

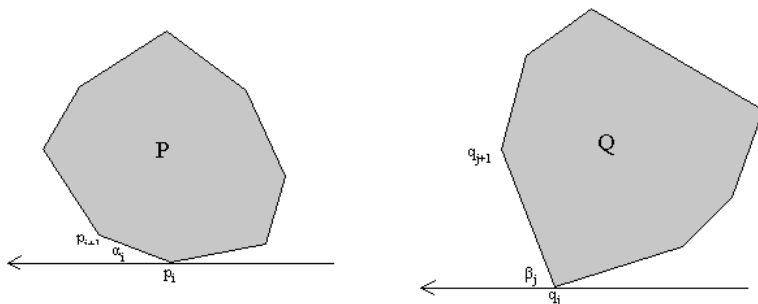
2 Výpočet Minkowského sumy v rovině

První postup využívá uzavřenosti Minkowského sumy na konvexních množinách. Výslednou Minkowského sumu určíme jako konvexní obal množiny bodů, které vzniknou sečtením všech vrcholů jednoho mnohoúhelníka se všemi vrcholy druhého.

Další postup využívá skutečnosti, že hranici Minkowského sumy dvou konvexních mnohoúhelníků tvoří jen úsečky rovnoběžné s hranicemi sčítaných mnohoúhelníků. Hlavní problém tedy spočívá v nalezení pořadí těchto hran. Princip popisuje následující algoritmus:

Algoritmus 1 *P a Q jsou dva konvexní mnohoúhelníky, které mají m (resp. n) vrcholy. Vrcholy $P \oplus Q$ jsou součty vrcholů P a Q .*

1. Zvolíme směr a určíme maximální vrchol mnohoúhelníka P v tomto směru (vrchol, který je nejdále od počátku v daném směru) a označíme jej $p(1)$, dále označíme ve směru hodinových ručiček vrcholy $p(2) \dots p(m)$. Vrcholy mnohoúhelníka Q označíme stejným způsobem $q(1) \dots q(n)$.
2. Vrcholy $P \oplus Q$ označíme $z(i)$.
3. $z(1) = p(1) + q(1)$.
4. Nechť $z(k) = p(i) + q(j)$, pak následující vrchol $z(k+1)$ určíme takto:
 - (a) Zkonstruuujeme dvě rovnoběžné přímky a a b body $p(i)$ a $q(j)$. Označíme $\alpha(i)$ úhel mezi přímkou a a hranou $p(i)p(i+1)$, $\beta(j)$, pak úhel mezi b a hranou $q(j)q(j+1)$. Konstrukci přímek a a b a úhlů α_i a β_j znázorňuje obrázek 1.



Obrázek 1: Rovinný algoritmus výpočtu $P \oplus Q$

VÝPOČET MINKOWSKÉHO SUMY VE 2D A 3D

$$(b) \ z(k+1) = \begin{cases} p(i+1) + q(j) & \text{pokud } \alpha(i) < \beta(j) \\ p(i) + q(j+1) & \text{pokud } \alpha(i) > \beta(j) \\ p(i+1) + q(j+1) & \text{pokud } \alpha(i) = \beta(j) \end{cases}$$

5. Opakujeme krok 4 pokud jsme nepoužili všechny vrcholy z P a Q .

Výpočet Minkowského sumy množin, které jsou konvexní, ale nejsou mnohoúhelníky se může řešit dvěma postupy. První spočívá v aproximaci dané konvexní množiny konvexním mnohoúhelníkem (např. kružnici aproximujeme pravidelným n -úhelníkem). Chyba výsledku je zde přímoúměrná chybě aproximace původní množiny mnohoúhelníkem. A na tyto množiny aplikujeme některý z předchozích postupů pro výpočet Minkowského sumy.

Druhá možnost je popsána v [3]. Tento postup je určen pro dvě jednoduše souvislé množiny ohraničené hraniční křivkou. Pro výpočet Minkowského sumy se využívá konvoluce těchto hraničních křivek, ze které se odstraní smyčky. Konvoluční křivku zde definují následujícím způsobem: Necht' jsou C_1 a C_2 dvě rovinné křivky jejich konvoluční křivka, označovaná $C_1 \star C_2$, je definována aplikováním vektorového součtu jen na páry bodů, které mají stejný směr tečny. Tedy: $C_1 \star C_2 = \{a + b \mid a \in C_1, b \in C_2, T_1 \parallel T_2\}$, kde T_i tečný vektor příslušné křivky v daném bodě.

Tuto druhou možnost lze tedy použít i pro množiny, které nejsou konvexní, ale splňují podmínku, že jsou jednoduše souvislé a ohraničené křivkou.

Poslední postup je určen pro množiny, které jsou popsány nerovnostmi $f(X) \geq 0$. Necht' $G_3 = G_1 \oplus G_2$, dále necht' G_1 je dáno nerovnostmi $f_1(X) \geq 0$ a G_2 nerovnostmi $f_2(X) \geq 0$, kde $X \in \mathbf{R}^2$. Naším cílem je nalezení $f_3(X) \geq 0$, která popisuje množinu G_3 . Postup hledání $f_3(X)$ lze zapsat v následujících bodech:

1. G_1 a G_2 reprezentujeme v různých prostorech, G_1 v $\mathbf{R}_1^2$ se souřadnicovými osami x_1, y_1 a G_2 v $\mathbf{R}_2^2$ se souřadnicovými osami x_2, y_2 .
2. Určíme množinu $G_3^{\parallel} = G_1 \times G_2$, tedy $G_3^{\parallel} \subset \mathbf{R}^4 = \mathbf{R}_1^2 \times \mathbf{R}_2^2$.
3. $\mathbf{R}_0^2$ má souřadnicové osy x_0, y_0 . Definujeme zobrazení $\mathcal{T} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ pravidlem, je-li $X_1 \in \mathbf{R}_1^2$ a $X_2 \in \mathbf{R}_2^2$, tedy $X_1 = (x_1, y_1)$ a $X_2 = (x_2, y_2)$ pak $\mathcal{T}(X_1, X_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
4. Obraz $G_3^{\parallel}$ v zobrazení $\mathcal{T}$ je $G_1 \oplus G_2$.

Nyní si podrobněji popíšeme postup v bodě **3**.

Víme, že $G_3^{\downarrow} = G_1 \times G_2 = (G_1 \times \mathbf{R}_2^2) \cup (\mathbf{R}_1^2 \times G_2)$. Jelikož G_1 je definováno pomocí $f_1(X)$, tak $G_1 \times \mathbf{R}_2^2$ je definováno pomocí $F_1(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_1, y_1)$, obdobně je $\mathbf{R}_1^2 \times G_2$ definováno vztahem $F_2(x_1, y_1, x_2, y_2) = f(x_2, y_2)$. $G_3^{\downarrow}$ lze tedy určit pomocí $F_3 = F_1 + F_2 - \sqrt{F_1^2 - F_2^2}$. F_3 je nezáporné právě tehdy, jsou-li $F_1 \geq 0$ i $F_2 \geq 0$, tedy F_3 popisuje $G_3^{\downarrow}$. Nyní známe F_3 popisující $G_3^{\downarrow}$ a pomocí ní odvodíme funkci f_3 popisující G_3 . Víme, že $G_3 = \mathcal{T}(G_3^{\downarrow})$, bod X_0 náleží G_3 tehdy a jen tehdy, když vzor $\mathcal{T}^{-1}(X_0)$ bodu X_0 v zobrazení $\mathcal{T}$ patří do $G_3^{\downarrow}$. Funkční hodnota funkce F_3 je pro body z množiny $G_3^{\downarrow}$ nezáporná, pak bod X_0 leží v G_3 tehdy a jen tehdy pokud je

$$\max\{F_3(X_1, X_2) : \mathcal{T}(X_1, X_2) = X_0\} \geq 0,$$

funkci f_3 lze získat následujícím předpisem

$$f_3 = \max\{F_3(X_1, X_2) : \mathcal{T}(X_1, X_2) = X_0\}.$$

Nechť $X_0 = \mathcal{T}(X_1; X_2)$, $X_0 = (x_0, y_0)$, $X_1 = (x_1, y_1)$ a $X_2 = (x_2, y_2)$ pak vzhledem k definici zobrazení $\mathcal{T}$ platí $x_2 = x_0 - x_1$ a $y_2 = y_0 - y_1$. Definujme funkci $\overline{F}_3$ na $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}_0^2 \times \mathbf{R}_1^2$ pravidlem $\overline{F}_3(x_0, y_0, x_1, y_1) = F_3(x_1, y_1, x_0 - x_1, y_0 - y_1)$. Využijeme-li definovaného vztahu, můžeme přepsat formulaci funkce f_3 do následující podoby

$$f_3 = \max\{\overline{F}_3(x_0, y_0, x_1, y_1) : (x_1, y_1) \in \mathbf{R}_1^2\}.$$

Nutnou podmínkou pro existenci maxima funkce je nulovost jejích parciálních derivací. Funkci f_3 získáme řešením soustavy

$$\frac{\partial \overline{F}_3}{\partial x_1}(x_0, y_0, x_1, y_1) = 0$$

$$\frac{\partial \overline{F}_3}{\partial y_1}(x_0, y_0, x_1, y_1) = 0$$

Tímto postupem získáme funkci $f_3(X)$, která popisuje $G_3 = G_1 \oplus G_2$.

Minkowského sumu rovinných množin, na které nelze uplatnit některý z předchozích postupů, řešíme dekompozicí těchto množin na sjednocení disjunktních konvexních množin. Jelikož Minkowského suma sjednocení je sjednocení dílčích Minkowského sum, umíme jednotlivé dílčí sumy určit některým z předešlých způsobů a výslednou Minkowského sumu určíme jako jejich sjednocení.

3 Výpočet Minkowského sumy v prostoru

Stejně jako v rovině můžeme využít uzavřenosti Minkowského sumy na konvexních množinách. Výslednou Minkowského sumu určíme jako konvexní obal množiny bodů, které vzniknou sečtením všech vrcholů jednoho mnohostěnu se všemi vrcholy druhého.

Bohužel v prostoru narozdíl od roviny neplatí, že hranice Minkowského sumy tvoří jen vhodně "poskládané" hranice sčítaných množin, z tohoto důvodu zde neexistuje analogie algoritmu popsáného v rovině případě.

Další možností pro konvexní mnohostěny jsou postupy využívající tzv. *slope diagram*, které jsou popsány v [5].

Pro množiny, které jsou popsány nerovností $f(X) \geq 0$ lze použít postup ukázaný pro rovinné množiny s tím rozdílem, že množiny zobrazujeme v prostoru $\mathbf{R}^3$ a na závěr nemáme soustavu dvou rovnic, ale tří rovnic, ještě se provede parciální derivace podle z_1 .

Výpočet Minkowského sumy nekonvexních množin v prostoru řešíme jako v rovině dekompozicí na sjednocení konvexních množin, pro které umíme vypočítat Minkowského sumu.

4 Závěr

V článku byly popsány postupy pro výpočet Minkowského sumy v rovině a prostoru. Hlavní uplatnění Minkowského sumy jsou úlohy plánování pohybu robota, plnění kontejneru, tvorba střihových plánů a mnoho dalších.

Literatura

- [1] H. Bekker, J. B. T. M. Roerdink: *An Efficient Algorithm to Calculate the Minkowski Sum of Convex 3D Polyhedra*. <http://www.cs.rug.nl/~roe/publications/-ccs3.html>, Groningen, 1999.
- [2] E. Flato, D. Halperin, P. K. Agarwal: *Polygon Decomposition for Efficient Construction of Minkowski Sum*. <http://www.math.ac.il/~flato>, 1999.

- [3] I. K. Lee, M. S. Kim, G. Elber: *The Minkowski Sum of 2D Curved Objects*. Israel-Korea Bi-National Conference on New Themes in Computerized Geometrical Modeling, 1998, s. 155–164, únor 1998, Tel-Aviv Univ., 1998
- [4] A. Pasko, O. Okunev, V. Savchenko: *Minkowski sums of point sets defined by inequalities*.
- [5] R. Výrut *Minkowského suma a její aplikace*. Diplomová práce, Katedra matematiky, FAV, ZČU, 2002
- [6] Y. Wu, J. J. Shah, J. K. Davidson: *Improvements to algorithms for computing the Minkowski sum of 3-polytopes*. J CAD 35 (2003), s.1181-1192.