

Čísla s nejednoznačnou reprezentací v Penneyho soustavě

Pavel Heller

Theoretical **I**nformatics **GR**oup
Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze

20. studentská konference VŠTEZ
25.-27.6.2012

Základní definice

Uvažujeme obecnou soustavu $(\beta, \mathcal{A})$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$

Reprezentace čísla z v dané $(\beta, \mathcal{A})$ soustavě: posloupnost cifer $(a_k)_{k=-\infty}^n$,
že

$$z = \sum_{k=-\infty}^n a_k \beta^k,$$

zapíšeme

$$z = a_n \cdots a_0 \bullet_{\beta} a_{-1} a_{-2} \cdots.$$

Speciální případy reprezentací:

- posléze periodická $z = a_n \cdots a_0 \bullet_{\beta} a_{-1} \cdots a_p (a_{p-1} \cdots a_{p-l})^{\omega}$
- celočíselná $z = a_n \cdots a_0 \bullet_{\beta}$

Gaussova celá, Gaussova racionální čísla

Množina Gaussových celých čísel $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\},$

Gaussových racionálních čísel $\mathbb{Q}[i] = \{p + iq \in \mathbb{C} : p, q \in \mathbb{Q}\}.$

Základní definice

Uvažujeme obecnou soustavu $(\beta, \mathcal{A})$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$

Reprezentace čísla z v dané $(\beta, \mathcal{A})$ soustavě: posloupnost cifer $(a_k)_{k=-\infty}^n$, že

$$z = \sum_{k=-\infty}^n a_k \beta^k,$$

zapíšeme

$$z = a_n \cdots a_0 \bullet_{\beta} a_{-1} a_{-2} \cdots.$$

Speciální případy reprezentací:

- posléze periodická $z = a_n \cdots a_0 \bullet_{\beta} a_{-1} \cdots a_p (a_{p-1} \cdots a_{p-l})^{\omega}$
- celočíselná $z = a_n \cdots a_0 \bullet_{\beta}$

Gaussova celá, Gaussova racionální čísla

Množina Gaussových celých čísel $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\},$
Gaussových racionálních čísel $\mathbb{Q}[i] = \{p + iq \in \mathbb{C} : p, q \in \mathbb{Q}\}.$

Základní definice

Uvažujeme obecnou soustavu $(\beta, \mathcal{A})$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$

Reprezentace čísla z v dané $(\beta, \mathcal{A})$ soustavě: posloupnost cifer $(a_k)_{k=-\infty}^n$, že

$$z = \sum_{k=-\infty}^n a_k \beta^k,$$

zapíšeme

$$z = a_n \cdots a_0 \bullet_{\beta} a_{-1} a_{-2} \cdots.$$

Speciální případy reprezentací:

- posléze periodická $z = a_n \cdots a_0 \bullet_{\beta} a_{-1} \cdots a_p (a_{p-1} \cdots a_{p-l})^{\omega}$
- celočíselná $z = a_n \cdots a_0 \bullet_{\beta}$

Gaussova celá, Gaussova racionální čísla

Množina Gaussových celých čísel $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}\},$
Gaussových racionálních čísel $\mathbb{Q}[i] = \{p + iq \in \mathbb{C} : p, q \in \mathbb{Q}\}.$

Základ $\beta = i - 1$, množina cifer $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Každé

- komplexní číslo má reprezentaci,
- Gaussovo racionální číslo má posléze periodickou reprezentaci,
- Gaussovo celé číslo má celočíselnou reprezentaci.

"Délka zápisu" čísla souvisí s jeho absolutní hodnotou:

Pokud $z = a_n a_{n-1} \cdots a_0 \bullet_{\beta} a_{-1} \cdots$, pak

$$\log_{\sqrt{2}} |z| - 1,2086 \leq n \leq \log_{\sqrt{2}} |z| + 5,7654,$$

$$\lfloor \log_{\sqrt{2}} |z| \rfloor - 1 \leq n \leq \lfloor \log_{\sqrt{2}} |z| \rfloor + 6.$$

Základ $\beta = i - 1$, množina cifer $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Každé

- komplexní číslo má reprezentaci,
- Gaussovo racionální číslo má posléze periodickou reprezentaci,
- Gaussovo celé číslo má celočíselnou reprezentaci.

"Délka zápisu" čísla souvisí s jeho absolutní hodnotou:

Pokud $z = a_n a_{n-1} \cdots a_0 \bullet_\beta a_{-1} \cdots$, pak

$$\log_{\sqrt{2}} |z| - 1,2086 \leq n \leq \log_{\sqrt{2}} |z| + 5,7654,$$

$$\lfloor \log_{\sqrt{2}} |z| \rfloor - 1 \leq n \leq \lfloor \log_{\sqrt{2}} |z| \rfloor + 6.$$

Základ $\beta = i - 1$, množina cifer $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Každé

- komplexní číslo má reprezentaci,
- Gaussovo racionální číslo má posléze periodickou reprezentaci,
- Gaussovo celé číslo má celočíselnou reprezentaci.

"Délka zápisu" čísla souvisí s jeho absolutní hodnotou:

Pokud $z = a_n a_{n-1} \cdots a_0 \bullet_\beta a_{-1} \cdots$, pak

$$\log_{\sqrt{2}} |z| - 1,2086 \leq n \leq \log_{\sqrt{2}} |z| + 5,7654,$$

$$\lfloor \log_{\sqrt{2}} |z| \rfloor - 1 \leq n \leq \lfloor \log_{\sqrt{2}} |z| \rfloor + 6.$$

Základ $\beta = i - 1$, množina cifer $\mathcal{A} = \{0, 1\}$

Každé

- komplexní číslo má reprezentaci,
- Gaussovo racionální číslo má posléze periodickou reprezentaci,
- Gaussovo celé číslo má celočíselnou reprezentaci.

"Délka zápisu" čísla souvisí s jeho absolutní hodnotou:

Pokud $z = a_n a_{n-1} \cdots a_0 \bullet_{\beta} a_{-1} \cdots$, pak

$$\log_{\sqrt{2}} |z| - 1,2086 \leq n \leq \log_{\sqrt{2}} |z| + 5,7654,$$

$$\lfloor \log_{\sqrt{2}} |z| \rfloor - 1 \leq n \leq \lfloor \log_{\sqrt{2}} |z| \rfloor + 6.$$

Hledání reprezentace $z \in \mathbb{Z}[i]$

Mějme $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$. Platí $z = b(i - 1) + (a + b)$, tedy

$$z = (b)(a + b) \bullet_{\beta}.$$

Upravíme do abecedy $\{0,1\}$ využitím vztahu

$$0 = 122 \bullet_{\beta}.$$

Příklad:

$$2 + 3i = 1011 \bullet_{\beta}$$

Hledání reprezentace $z \in \mathbb{Z}[i]$

Mějme $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$. Platí $z = b(i - 1) + (a + b)$, tedy

$$z = (b)(a + b) \bullet_{\beta}.$$

Upravíme do abecedy $\{0,1\}$ využitím vztahu

$$0 = 122 \bullet_{\beta}.$$

Příklad:

$$2 + 3i = 1011 \bullet_{\beta}$$

Hledání reprezentace $z \in \mathbb{Z}[i]$

Mějme $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$. Platí $z = b(i - 1) + (a + b)$, tedy

$$z = (b)(a + b) \bullet_{\beta}.$$

Upravíme do abecedy $\{0,1\}$ využitím vztahu

$$0 = 122 \bullet_{\beta}.$$

Příklad:

$$2 + 3i = 1011 \bullet_{\beta}$$

Sčítání v Penneyho soustavě

Sečteme cifry a opět upravíme pomocí

$$0 = 122 \bullet_{\beta} .$$

Příklad:

$$101 \bullet_{\beta} + 111 \bullet_{\beta} = 111110 \bullet_{\beta}$$

Lze chápat jako práci s přenosy, a tu lze zapsat pomocí sčítacího automatu.

Sčítání v Penneyho soustavě

Sečteme cifry a opět upravíme pomocí

$$0 = 122 \bullet_{\beta} .$$

Příklad:

$$101 \bullet_{\beta} + 111 \bullet_{\beta} = 111110 \bullet_{\beta}$$

Lze chápat jako práci s přenosy, a tu lze zapsat pomocí sčítacího automatu.

Sčítání v Penneyho soustavě

Sečteme cifry a opět upravíme pomocí

$$0 = 122 \bullet_{\beta} .$$

Příklad:

$$101 \bullet_{\beta} + 111 \bullet_{\beta} = 111110 \bullet_{\beta}$$

Lze chápat jako práci s přenosy, a tu lze zapsat pomocí sčítacího automatu.

Sčítání v Penneyho soustavě

Sečteme cifry a opět upravíme pomocí

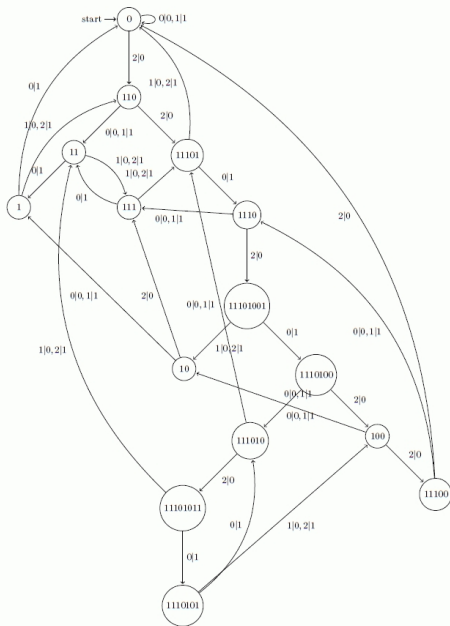
$$0 = 122 \bullet_{\beta} .$$

Příklad:

$$101 \bullet_{\beta} + 111 \bullet_{\beta} = 111110 \bullet_{\beta}$$

Lze chápat jako práci s přenosy, a tu lze zapsat pomocí sčítacího automatu.

Sčítací automat v Penneyho soustavě



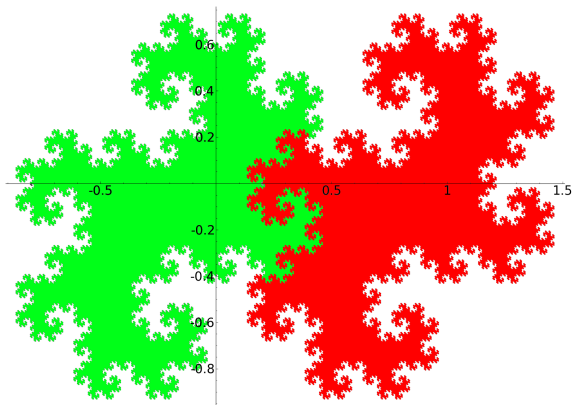
Čísla s více reprezentacemi

Zkoumáme situaci

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1}a_{-2}\cdots = b_n\cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1}b_{-2}\cdots,$$

kde

$$b_n\cdots b_0 \bullet_{\beta} \neq 0.$$



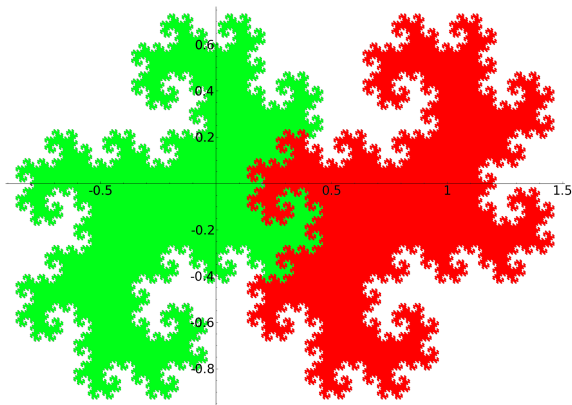
Čísla s více reprezentacemi

Zkoumáme situaci

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1}a_{-2}\cdots = b_n\cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1}b_{-2}\cdots,$$

kde

$$b_n\cdots b_0 \bullet_{\beta} \neq 0.$$



Čísla s více reprezentacemi

(idea z desítkové soustavy)

Platí

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1}a_{-2} \cdots = b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1}b_{-2} \cdots ,$$

právě když pro libovolné $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (a_{-1} \cdots a_{-k} \bullet_{\beta}) - (b_n \cdots b_0 b_{-1} \cdots b_{-k} \bullet_{\beta}) &= \\ &= (0 \bullet_{\beta} b_{-k-1} \cdots) - (0 \bullet_{\beta} a_{-k-1} \cdots) \end{aligned}$$

Zřejmě

$$R := (0 \bullet_{\beta} b_{-k-1} \cdots) - (0 \bullet_{\beta} a_{-k-1} \cdots) \in \mathbb{Z}[i] .$$

Přitom $|R|$ nebude velká, k zápisu R tak stačí 9 cifer,

$$R = r_8 r_7 \cdots r_0 \bullet_{\beta} .$$

Čísla s více reprezentacemi

(idea z desítkové soustavy)

Platí

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1} a_{-2} \cdots = b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1} b_{-2} \cdots ,$$

právě když pro libovolné $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (a_{-1} \cdots a_{-k} \bullet_{\beta}) - (b_n \cdots b_0 b_{-1} \cdots b_{-k} \bullet_{\beta}) &= \\ &= (0 \bullet_{\beta} b_{-k-1} \cdots) - (0 \bullet_{\beta} a_{-k-1} \cdots) \end{aligned}$$

Zřejmě

$$R := (0 \bullet_{\beta} b_{-k-1} \cdots) - (0 \bullet_{\beta} a_{-k-1} \cdots) \in \mathbb{Z}[i] .$$

Přitom $|R|$ nebude velká, k zápisu R tak stačí 9 cifer,

$$R = r_8 r_7 \cdots r_0 \bullet_{\beta} .$$

Čísla s více reprezentacemi

(idea z desítkové soustavy)

Platí

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1} a_{-2} \cdots = b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1} b_{-2} \cdots ,$$

právě když pro libovolné $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (a_{-1} \cdots a_{-k} \bullet_{\beta}) - (b_n \cdots b_0 b_{-1} \cdots b_{-k} \bullet_{\beta}) &= \\ &= (0 \bullet_{\beta} b_{-k-1} \cdots) - (0 \bullet_{\beta} a_{-k-1} \cdots) \end{aligned}$$

Zřejmě

$$R := (0 \bullet_{\beta} b_{-k-1} \cdots) - (0 \bullet_{\beta} a_{-k-1} \cdots) \in \mathbb{Z}[i] .$$

Přitom $|R|$ nebude velká, k zápisu R tak stačí 9 cifer,

$$R = r_8 r_7 \cdots r_0 \bullet_{\beta} .$$

Čísla s více reprezentacemi

(idea z desítkové soustavy)

Platí

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1} a_{-2} \cdots = b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1} b_{-2} \cdots ,$$

právě když pro libovolné $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (a_{-1} \cdots a_{-k} \bullet_{\beta}) - (b_n \cdots b_0 b_{-1} \cdots b_{-k} \bullet_{\beta}) &= \\ &= (0 \bullet_{\beta} b_{-k-1} \cdots) - (0 \bullet_{\beta} a_{-k-1} \cdots) \end{aligned}$$

Zřejmě

$$R := (0 \bullet_{\beta} b_{-k-1} \cdots) - (0 \bullet_{\beta} a_{-k-1} \cdots) \in \mathbb{Z}[i] .$$

Přitom $|R|$ nebude velká, k zápisu R tak stačí 9 cifer,

$$R = r_8 r_7 \cdots r_0 \bullet_{\beta} .$$

Čísla s více reprezentacemi

Lze shrnout:

Platí

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1} a_{-2} \cdots = b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1} b_{-2} \cdots ,$$

právě když pro každé dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$ existuje $R = r_8 \cdots r_0 \bullet_{\beta}$, že

$$b_n \cdots b_0 b_{-1} \cdots b_{-k} \bullet_{\beta} = a_{-1} \cdots a_{-k} \bullet_{\beta} + r_8 \cdots r_0 \bullet_{\beta} .$$

Sčítejme pravou stranu automatem.

Lze BÚNO uvažovat R z množiny přenosů, nepotřebujeme hrany pro čtení '2'.

Čísla s více reprezentacemi

Lze shrnout:

Platí

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1} a_{-2} \cdots = b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1} b_{-2} \cdots ,$$

právě když pro každé dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$ existuje $R = r_8 \cdots r_0 \bullet_{\beta}$, že

$$b_n \cdots b_0 b_{-1} \cdots b_{-k} \bullet_{\beta} = a_{-1} \cdots a_{-k} \bullet_{\beta} + r_8 \cdots r_0 \bullet_{\beta} .$$

Sčítáme pravou stranu automatem.

Lze BÚNO uvažovat R z množiny přenosů, nepotřebujeme hrany pro čtení '2'.

Čísla s více reprezentacemi

Lze shrnout:

Platí

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1} a_{-2} \cdots = b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1} b_{-2} \cdots ,$$

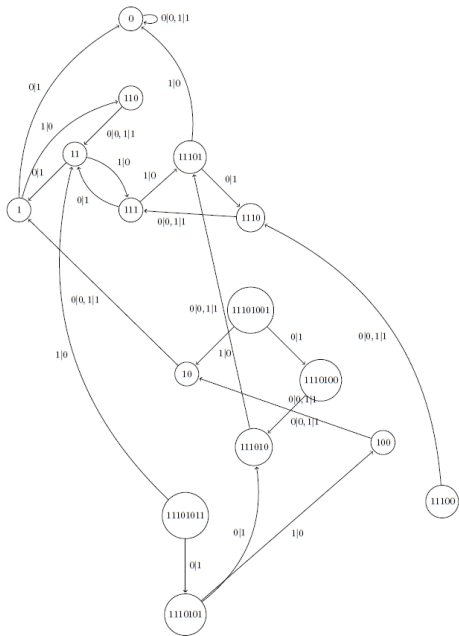
právě když pro každé dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$ existuje $R = r_8 \cdots r_0 \bullet_{\beta}$, že

$$b_n \cdots b_0 b_{-1} \cdots b_{-k} \bullet_{\beta} = a_{-1} \cdots a_{-k} \bullet_{\beta} + r_8 \cdots r_0 \bullet_{\beta} .$$

Sčítáme pravou stranu automatem.

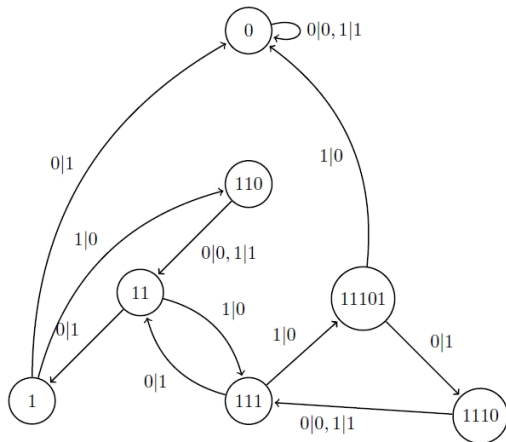
Lze BÚNO uvažovat R z množiny přenosů, nepotřebujeme hrany pro čtení '2'.

Sčítací automat bez hran pro čtení '2'



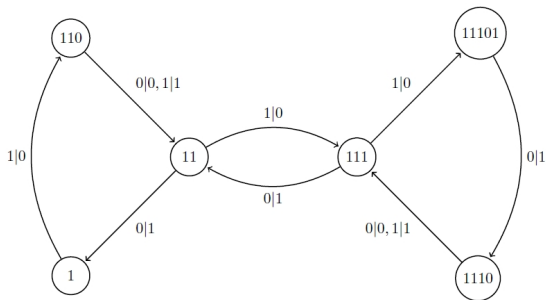
Číslo s více reprezentacemi

Lze se dále omezit jen na některé přenosy:



Čísla s více reprezentacemi

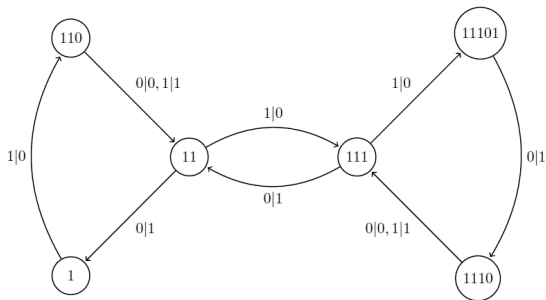
Protože chceme, aby se reprezentace lišily na předních místech, nezajímá nás ani nula. Zůstává tedy



"Automat" je stavěný na procházení reprezentací odzadu. Praktičtější bude otočit směr.

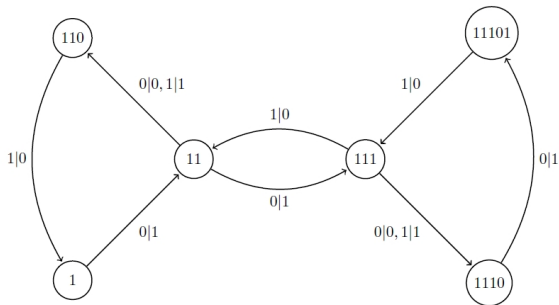
Čísla s více reprezentacemi

Protože chceme, aby se reprezentace lišily na předních místech, nezajímá nás ani nula. Zůstává tedy



"Automat" je stavěný na procházení reprezentací odzadu. Praktičtější bude otočit směr.

Čísla s více reprezentacemi

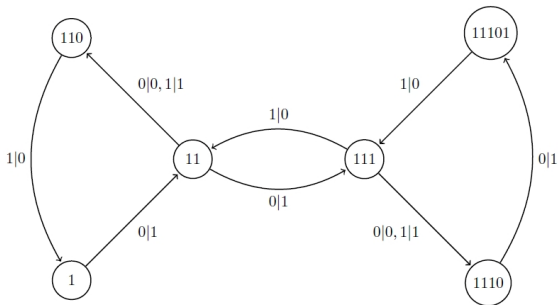


Tvrzení

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1} \cdots = b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1} \cdots,$$

kde $b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} \neq 0$ nastává pro nějaké posloupnosti cifer $(a_k)_{k=-\infty}^{-1}$, $(b_k)_{k=-\infty}^n$, právě když je posloupnost (a_k) přípustný vstup tohoto "automatu" a (b_k) jí odpovídající výstup.

Číslo s více reprezentacemi



Tvrzení

$$0 \bullet_{\beta} a_{-1} \cdots = b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} b_{-1} \cdots,$$

kde $b_n \cdots b_0 \bullet_{\beta} \neq 0$ nastává pro nějaké posloupnosti cifer $(a_k)_{k=-\infty}^{-1}$, $(b_k)_{k=-\infty}^n$, právě když je posloupnost (a_k) přípustný vstup tohoto "automatu" a (b_k) jí odpovídající výstup.

- pro číslo zadané posléze periodickou reprezentací umíme rozhodnout, má-li alternativní zápisy a najít je (viz příklad)
- není číslo, které by mělo více než 3 různé reprezentace
- 3 různé reprezentace mají právě čísla končící periodicky na $(001)^{\omega}$, nebo $(011)^{\omega}$
- není číslo, které by mělo jak posléze periodickou, tak aperiodickou reprezentaci
- různé posléze periodické reprezentace stejného čísla mají vždy stejnou délku periody
- Gaussova celá čísla mají právě jednu reprezentaci

- pro číslo zadané posléze periodickou reprezentací umíme rozhodnout, má-li alternativní zápisy a najít je (viz příklad)
- není číslo, které by mělo více než 3 různé reprezentace
- 3 různé reprezentace mají právě čísla končící periodicky na $(001)^\omega$, nebo $(011)^\omega$
- není číslo, které by mělo jak posléze periodickou, tak aperiodickou reprezentaci
- různé posléze periodické reprezentace stejného čísla mají vždy stejnou délku periody
- Gaussova celá čísla mají právě jednu reprezentaci

- pro číslo zadané posléze periodickou reprezentací umíme rozhodnout, má-li alternativní zápisy a najít je (viz příklad)
- není číslo, které by mělo více než 3 různé reprezentace
- 3 různé reprezentace mají právě čísla končící periodicky na $(001)^{\omega}$, nebo $(011)^{\omega}$
- není číslo, které by mělo jak posléze periodickou, tak aperiodickou reprezentaci
- různé posléze periodické reprezentace stejného čísla mají vždy stejnou délku periody
- Gaussova celá čísla mají právě jednu reprezentaci

- pro číslo zadané posléze periodickou reprezentací umíme rozhodnout, má-li alternativní zápisy a najít je (viz příklad)
- není číslo, které by mělo více než 3 různé reprezentace
- 3 různé reprezentace mají právě čísla končící periodicky na $(001)^{\omega}$, nebo $(011)^{\omega}$
- není číslo, které by mělo jak posléze periodickou, tak aperiodickou reprezentaci
- různé posléze periodické reprezentace stejného čísla mají vždy stejnou délku periody
- Gaussova celá čísla mají právě jednu reprezentaci

- pro číslo zadané posléze periodickou reprezentací umíme rozhodnout, má-li alternativní zápisy a najít je (viz příklad)
- není číslo, které by mělo více než 3 různé reprezentace
- 3 různé reprezentace mají právě čísla končící periodicky na $(001)^{\omega}$, nebo $(011)^{\omega}$
- není číslo, které by mělo jak posléze periodickou, tak aperiodickou reprezentaci
- různé posléze periodické reprezentace stejného čísla mají vždy stejnou délku periody
- Gaussova celá čísla mají právě jednu reprezentaci

- pro číslo zadané posléze periodickou reprezentací umíme rozhodnout, má-li alternativní zápisy a najít je (viz příklad)
- není číslo, které by mělo více než 3 různé reprezentace
- 3 různé reprezentace mají právě čísla končící periodicky na $(001)^{\omega}$, nebo $(011)^{\omega}$
- není číslo, které by mělo jak posléze periodickou, tak aperiodickou reprezentaci
- různé posléze periodické reprezentace stejného čísla mají vždy stejnou délku periody
- Gaussova celá čísla mají právě jednu reprezentaci

Děkuji za pozornost.

- M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*, volume 90 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2002.

Ke stejným výsledkům velmi podobným přístupem došel W.J. Gilbert:
<http://www.math.uwaterloo.ca/~wgilbert/Research/FractalPapers.html>,
speciálně

- W.J. Gilbert, *Complex Numbers with three radix expansions*, Can. J. Math. 34 (1982), 1335-1348.