

Analýza modelu sdruženého transportu tepla a podzemní vody v pórovitém prostředí

Lukáš Krupička*

Abstrakt

Tato práce se zabývá analýzou modelu sdruženého transportu tepla a podzemní vody v nehomogenním pórovitém prostředí. Model je popsán dvěma evolučními diferenciálními rovnicemi s odpovídajícími počátečními a okrajovými podmínkami. Numerické řešení je založeno na semi-implicitní časové diskretizaci, která vede na soustavu nelineárních okrajových úloh s neznámým rozložením teploty a tlakové výšky. Pro popsany problém je v práci dokázána existence řešení po časové diskretizaci.

1 Model

Studovaný model popisující transport tepla a vody v částečně nasyceném pórovitém prostředí je založen na následujících předpokladech:

- pohyb vody v zemině je popsán Darcyho zákonem;
- nedochází k hysterezi;
- vypařování je zanedbatelné;
- porézní médium je nedeformovatelné.

1.1 Základní bilanční vztahy

Sdružený transport tepla a proudění vody je popsán následujícími bilančními vztahy: *rovnice kontinuity*:

$$\frac{\partial \mathcal{M}(\vartheta, h)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_w(\vartheta, h, \nabla h); \quad (1)$$

*Katedra matematiky, Fakulta stavební, České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 7, Praha 6, lukas.krupicka@fsv.cvut.cz

rovnice vyjadřující zákon zachování energie:

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\vartheta, h)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_\vartheta(\vartheta, h, \nabla \vartheta) - C_w \nabla \vartheta \mathbf{J}_w(\vartheta, h, \nabla h). \quad (2)$$

Neznámé stavové veličiny v rovnicích (1)–(2) jsou teplota ϑ a tlaková výška h . $\mathcal{H}$ a $\mathcal{M}$ reprezentují množství vnitřní energie, respektive množství vody na 1 m³ vzorku porézního média. C_w je tepelná kapacita vody. $\mathbf{J}_\vartheta$ představuje tok tepla a $\mathbf{J}_w$ tok vody.

1.2 Konstitutivní vztahy

Pro popis toku vody $\mathbf{J}_w$ uijeme Darcy-Buckinghamův zákon:

$$\mathbf{J}_w(\vartheta, h, \nabla h) = -k(\vartheta, h) \nabla(h + z). \quad (3)$$

Tok tepla $\mathbf{J}_\vartheta$ je zde popsán Fourierovým zákonem:

$$\mathbf{J}_\vartheta(\vartheta, h, \nabla \vartheta) = -\lambda(\vartheta, h) \nabla \vartheta. \quad (4)$$

Parametry k a λ vyskytující se v rovnicích (3)–(4) jsou spojitě funkce závisející na teplotě ϑ a tlakové výšce h .

Časové změny množství tepla $\mathcal{H}$ a množství vody $\mathcal{M}$ lze vyjádřit

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} := \frac{\partial}{\partial t} [\rho_s C_s \vartheta + \rho_w C_w \theta_w \vartheta], \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} := \frac{\partial \theta_w}{\partial t}. \quad (6)$$

Zde ρ_s je objemová hmotnost skeletu, C_s je tepelná kapacita skeletu, ρ_w je objemová hmotnost vody a θ_w značí objemovou vlhkost.

1.3 Počáteční a okrajové podmínky

K popisu modelu je ještě třeba doplnit počáteční a okrajové podmínky pro neznámé h a ϑ .

Na části hranice studované oblasti, kterou označíme Γ_D , uvažujeme tzv. Dirichletovy okrajové podmínky:

$$h = h_D, \quad (7)$$

$$\vartheta = \vartheta_D. \quad (8)$$

Výtok vody přes zbývající část hranice, kterou označíme Γ_N , je popsán Newtonovým zákonem:

$$\mathbf{J}_w(\vartheta, h, \nabla h) \cdot \mathbf{n} = \beta_c(h - h_\infty), \quad (9)$$

kde pravá strana představuje množství vody, které odečte přes hranici Γ_N do okolního prostředí s tlakem h_∞ . Ve vztahu se ještě vyskytuje empirický parametr β_c . Pro výtok tepla přes část hranice Γ_N uvažujeme okrajovou podmínku ve tvaru

$$\mathbf{J}_\vartheta(\vartheta, h, \nabla \vartheta) \cdot \mathbf{n} = \alpha_c(\vartheta - \vartheta_\infty), \quad (10)$$

kde analogicky α_c je empirický koeficient a ϑ_∞ je teplota okolí.

Počáteční podmínky uvažujeme ve tvaru:

$$\vartheta(0) = \vartheta_0, \quad h(0) = h_0. \quad (11)$$

Zde ϑ_0 a h_0 představují počáteční rozložení teploty ϑ a tlakové výšky h na počátku zkoumaného časového intervalu.

2 Formulace úlohy

Uvažujeme počátečně-okrajovou úlohu pro sdružený transport tepla a vlhkosti v dvojrozměrné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$, kterou rozdělíme na dvě, nepřekrývající se části Γ_D a Γ_N , $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$. Necht' $T > 0$ představuje časový horizont. Uvažujeme časoprostorový válec $Q_T = \Omega \times (0, T)$, část hranice časoprostorového válce s Dirichletovými okrajovými podmínkami $\Gamma_{DT} = \Gamma_D \times (0, T)$ a část hranice s Neumannovými okrajovými podmínkami $\Gamma_{NT} = \Gamma_N \times (0, T)$.

Studovaný matematický model je popsán následující soustavou rovnic:

bilanční rovnice:

$$\frac{\partial \theta_w(z, u)}{\partial t} = \nabla \cdot (k(z, \vartheta, u) \nabla u) \quad \text{v } Q_T, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} [\rho_s C_s + \rho_w C_w \theta_w(z, u)] \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \nabla \cdot (\lambda(z, \vartheta, u) \nabla \vartheta) \\ &\quad + C_w k(z, \vartheta, u) \nabla \vartheta \cdot \nabla u \quad \text{v } Q_T; \end{aligned} \quad (13)$$

Dirichletovy okrajové podmínky:

$$u = u_D \quad \text{na } \Gamma_{DT}, \quad (14)$$

$$\vartheta = \vartheta_D \quad \text{na } \Gamma_{DT}; \quad (15)$$

Neumannovy okrajové podmínky:

$$-k(z, \vartheta, u) \nabla u \cdot \mathbf{n} = \beta_c(u - u_\infty) \quad \text{na } \Gamma_{NT}, \quad (16)$$

$$-\lambda(\vartheta) \nabla \vartheta \cdot \mathbf{n} = \alpha_c(\vartheta - \vartheta_\infty) \quad \text{na } \Gamma_{NT}; \quad (17)$$

počáteční podmínky:

$$u(0) = u_0 \quad \text{and} \quad \vartheta(0) = \vartheta_0 \quad \text{v } \Omega. \quad (18)$$

Neznámé veličiny jsou celková tlaková výška $u = h + z$ (z značí vertikální souřadnici) a teplota ϑ .

3 Existence řešení

3.1 Použité značení v textu

V textu budeme pracovat s obecnou kladnou konstantou c , která není pevně specifikována a může se na různých místech lišit. Pro libovolné $r \in [1, +\infty]$, $L^r(\Omega)$ značí Lebesgueův prostor s normou $\|\cdot\|_{L^r(\Omega)}$ a $W^{k,p}(\Omega)$, $k \geq 0$, $p \in [1, +\infty]$, značí Sobolevův prostor s normou $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Necht'

$$E := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}); \text{ supp } u \cap \Gamma_D = \emptyset\}$$

a $V^{k,p}$ je uzávěrem E v normě $W^{k,p}(\Omega)$. Dále $\langle \cdot, \cdot \rangle$ značí dualitu mezi $V^{1,2}$ a $(V^{1,2})^*$.

3.2 Předpoklady pro fyzikální parametry

$\mathbb{A}_1$ Parametry $\rho_s, C_s, \rho_w, C_w, \alpha_c, \beta_c$ jsou reálné, kladné konstanty.

$\mathbb{A}_2$ Tepelná vodivost λ a hydraulická vodivost k jsou spojité funkce svých proměnných a dále předpokládáme existenci takových kladných konstant $\lambda_1, \lambda_2, k_1$ a k_2 , že

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda(z, \xi, \zeta) \leq \lambda_2 < +\infty \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}, \quad \forall z, \quad (19)$$

$$0 < k_1 \leq k(z, \xi, \zeta) \leq k_2 < +\infty \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}, \quad \forall z. \quad (20)$$

$\mathbb{A}_3$ Funkce $\theta_w := \theta_w(z, \cdot)$ (pro libovolné z) je kladná, rostoucí, spojitá a omezená funkce na $\mathbb{R}$.

$\mathbb{A}_4$ $[u_D, \vartheta_D] \in W^{1,2}(\Omega)^2$, $[u_\infty, \vartheta_\infty] \in C(\overline{\Omega})^2$ a $[u_0 - u_D, \vartheta_0 - \vartheta_D] \in (V^{1,2})^2$.

3.3 Řešení diskretizované úlohy

Rozdělme časový interval $[0; T]$ na N podintervalů o délce Δt tak, že $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N$. Pokud máme celé číslo n takové, že $0 \leq n \leq N$, potom budeme funkci $\varphi(\mathbf{x}, t_n)$ zkráceně značit φ_n . Časová diskretizace matematického modelu je provedena semi-implicitně:

$$\frac{\theta_w(z, u_{n+1}) - \theta_w(z, u_n)}{\Delta t} = \nabla \cdot (k(z, \vartheta_n, u_n) \nabla u_{n+1}), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} [\rho_s C_s + \rho_w C_w \theta_w(z, u_n)] \frac{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n}{\Delta t} &= \nabla \cdot (\lambda(z, \vartheta_n, u_n) \nabla \vartheta_{n+1}) \\ &\quad - C_w k(z, \vartheta_n, u_n) \nabla u_{n+1} \cdot \nabla \vartheta_{n+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Předpokládáme, že funkce ϑ_n a u_n známe a budeme dokazovat existenci řešení pro neznámé ϑ_{n+1} a u_{n+1} .

Pro zjednodušení zápisu označme $[v, \tau] := [u_{n+1}, \vartheta_{n+1}]$ a

$$\tilde{k}(\mathbf{x}) := k(z, \vartheta_n(\mathbf{x}), u_n(\mathbf{x})), \quad (23)$$

$$\tilde{\lambda}(\mathbf{x}) := \lambda(z, \vartheta_n(\mathbf{x}), u_n(\mathbf{x})). \quad (24)$$

Dále zavedeme následující funkce:

$$a(\mathbf{x}, v) = \frac{1}{\Delta t} \theta_w(z, v), \quad (25)$$

$$c(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t} [\rho_s C_s + \rho_w C_w \theta_w(z, u_n(\mathbf{x}))], \quad (26)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, \nabla v) = C_w \tilde{k}(\mathbf{x}) \nabla v, \quad (27)$$

$$f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t} \theta_w(z, u_n(\mathbf{x})), \quad (28)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta t} [\rho_s C_s + \rho_w C_w \theta_w(z, u_n(\mathbf{x}))] \vartheta_n(\mathbf{x}). \quad (29)$$

Řešíme tedy postupně pro $n = 0, \dots, N-1$ soustavu diferenciálních rovnic s neznámými $[v, \tau]$

$$-\nabla \cdot (\tilde{\kappa}(\mathbf{x}) \nabla v) + a(\mathbf{x}, v) = f_1(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega, \quad (30)$$

$$-\nabla \cdot (\tilde{\lambda}(\mathbf{x}) \nabla \tau) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, \nabla v) \cdot \nabla \tau + c(\mathbf{x}) \tau = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega, \quad (31)$$

s okrajovými podmínkami

$$v = u_{D,n+1} \quad \text{na } \Gamma_D, \quad (32)$$

$$\tau = \vartheta_{D,n+1} \quad \text{na } \Gamma_D, \quad (33)$$

$$-\tilde{\kappa}(\mathbf{x}) \nabla v \cdot \mathbf{n} = \beta_c (v - u_{\infty,n+1}) \quad \text{na } \Gamma_N, \quad (34)$$

$$-\tilde{\lambda}(\mathbf{x}) \nabla \tau \cdot \mathbf{n} = \alpha_c (\tau - \vartheta_{\infty,n+1}) \quad \text{na } \Gamma_N. \quad (35)$$

Definice Dvojici $[v, \tau] \in [u_{D,n+1}, \vartheta_{D,n+1}] + V^{1,p^*} \times V^{1,2}$, pro nějaké $p^* > 2$, nazveme *variačním řešením* úlohy (30)–(35) pokud platí

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) \nabla v \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a(\mathbf{x}, v) \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \beta_c v \phi \, dS \\ = \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}) \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \beta_c u_{\infty,n+1} \phi \, dS \end{aligned} \quad (36)$$

a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\lambda}(\mathbf{x}) \nabla \tau \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x}, \nabla v) \cdot \nabla \tau \, \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} c(\mathbf{x}) \tau \, \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \alpha_c \tau \psi \, dS \\ = \int_{\Omega} f_2(\mathbf{x}) \psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \alpha_c \tau_{\infty, n+1} \psi \, dS \end{aligned} \quad (37)$$

pro všechna $\phi \in V^{1,2}$ a $\psi \in V^{1,2}$.

Věta 3.1 *Předpokládejme, že známe $[u_n, \vartheta_n] \in [u_D, \vartheta_D] + V^{1,2} \times V^{1,2}$ a že předpoklady $\mathbb{A}_1$ – $\mathbb{A}_4$ jsou splněny. Potom existuje konstanta c_0 taková, že pokud $c \geq c_0$, existuje variační řešení úlohy (30)–(35).*

DŮKAZ: Pro zjednodušení důkazu (a bez újmy na obecnosti) předpokládejme, že $[u_D, \vartheta_D] \equiv [0, 0]$.

Definujme operátor $\mathcal{T} : V^{1,2} \rightarrow (V^{1,2})^*$

$$\langle \mathcal{T}(v), \phi \rangle = \int_{\Omega} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) \nabla v \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a(\mathbf{x}, v) \, \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \beta_c v \, \phi \, dS \quad (38)$$

a funkcionál $f \in (V^{1,2})^*$

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}) \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \beta_c u_{\infty, n+1} \phi \, dS \quad (39)$$

pro všechna $\phi \in V^{1,2}$.

Vlastnosti operátoru $\mathcal{T}$: V následujících lemmatech uvedeme některé důležité vlastnosti operátoru $\mathcal{T}$.

Lemma 3.2 *Operátor $\mathcal{T} : V^{1,2} \rightarrow (V^{1,2})^*$ je omezený.*

DŮKAZ: Operátor $\mathcal{T} : V^{1,2} \rightarrow (V^{1,2})^*$ je omezený, pokud obrazem libovolné omezené podmnožiny z $V^{1,2}$ je omezená podmnožina v $(V^{1,2})^*$.

Zvolme $v \in V^{1,2}$. Potom

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{T}(v), \phi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) \nabla v \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a(\mathbf{x}, v) \, \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \beta_c v \, \phi \, dS \right| \\ &\leq c_{\kappa} \int_{\Omega} |\nabla v| \cdot |\nabla \phi| \, d\mathbf{x} + c_a \int_{\Omega} |\phi| \, d\mathbf{x} + \beta_c \int_{\Gamma_N} |v| |\phi| \, dS. \end{aligned} \quad (40)$$

Jednotlivé integrály odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti a užitím věty o stopách [10]

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v| |\nabla \phi| \, d\mathbf{x} &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &\leq \|v\|_{V^{1,2}} \|\phi\|_{V^{1,2}}, \end{aligned} \quad (41)$$

dále

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\phi| \, d\mathbf{x} &= \|\phi\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq c_2 \|\phi\|_{V^{1,2}}, \end{aligned} \quad (42)$$

a konečně

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_N} |v| |\phi| \, dS &\leq \left(\int_{\Gamma_N} |v|^2 \, dS \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_N} |\phi|^2 \, dS \right)^{1/2} \\ &\leq \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|v\|_{V^{1,2}} \|\phi\|_{V^{1,2}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Pomocí (40)–(43) odhadneme normu

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(v)\|_{(V^{1,2})^*} &:= \sup_{\phi \in V^{1,2}} \frac{|\langle \mathcal{T}(v), \phi \rangle|}{\|\phi\|_{V^{1,2}}} \\ &\leq \frac{(c_{\kappa} \|v\|_{V^{1,2}} + c_a c_2 + c_3 \|v\|_{V^{1,2}}) \cdot \|\phi\|_{V^{1,2}}}{\|\phi\|_{V^{1,2}}} \\ &\leq c_4 \|v\|_{V^{1,2}} + c_5. \end{aligned} \quad (44)$$

Z nerovnosti (44) již snadno vyplývá omezenost operátoru $\mathcal{T}$. $\square$

Lemma 3.3 *Operátor $\mathcal{T} : V^{1,2} \rightarrow (V^{1,2})^*$ je zeslabeně spojitý.*

DŮKAZ: Operátor $\mathcal{T} : V^{1,2} \rightarrow (V^{1,2})^*$ je zeslabeně spojitý, pokud pro libovolné $v \in V^{1,2}$ a libovolnou posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků prostoru $V^{1,2}$ takovou, že

$$v_n \rightarrow v \quad \text{v } V^{1,2}, \quad (45)$$

platí

$$\mathcal{T}(v_n) \rightharpoonup \mathcal{T}(v) \quad \text{v } (V^{1,2})^*. \quad (46)$$

Jelikož $(V^{1,2})^*$ je reflexivní, *slabá* a *slabá** konvergence splývají [9], tudíž k platnosti (46) stačí dokázat

$$\langle \mathcal{T}(v_n) - \mathcal{T}(v), \phi \rangle \rightarrow 0 \text{ pro každé } \phi \in V^{1,2}. \quad (47)$$

Necht' je tedy dána posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků prostoru $V^{1,2}$ a $v \in V^{1,2}$ takové, že platí (45). Dále, z definice funkcionálu $\langle \mathcal{T}(v), \cdot \rangle$ dostáváme

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{T}(v_n) - \mathcal{T}(v), \phi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) \nabla(v_n - v) \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} (a(\mathbf{x}, v_n) - a(\mathbf{x}, v)) \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \beta_c(v_n - v) \phi \, dS \right|. \end{aligned} \quad (48)$$

Jednotlivé integrály odhadneme následovně:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) |\nabla(v_n - v)| |\nabla \phi| \, d\mathbf{x} &\leq c_{\kappa} \int_{\Omega} |\nabla(v_n - v)| |\nabla \phi| \, d\mathbf{x} \\ &\leq c_{\kappa} \|v_n - v\|_{V^{1,2}} \|\phi\|_{V^{1,2}}, \end{aligned} \quad (49)$$

dále

$$\int_{\Omega} |(a(\mathbf{x}, v_n) - a(\mathbf{x}, v))| |\phi| \, d\mathbf{x} \leq \| (a(\mathbf{x}, v_n) - a(\mathbf{x}, v)) \|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \quad (50)$$

a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_N} |v_n - v| |\phi| \, dS &\leq \left(\int_{\Gamma_N} |v_n - v|^2 \, dS \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_N} |\phi|^2 \, dS \right)^{1/2} \\ &\leq c \|v_n - v\|_{V^{1,2}} \|\phi\|_{L^2(\Gamma_N)}. \end{aligned} \quad (51)$$

Poznamenejme, že ze spojitosti funkce $a := a(\mathbf{x}, \xi)$ plyne tzv. *Carathéodoryho vlastnost* [3], tj. $a(\cdot, \xi)$ je měřitelná pro každé $\xi \in \mathbb{R}$ na Ω (chápaná jako funkce proměnné $\mathbf{x}$) a funkce $a(\mathbf{x}, \cdot)$ (chápaná jako funkce proměnné ξ) je spojitá na $\mathbb{R}$ pro skoro všechna $\mathbf{x} \in \Omega$. Z předpokladu $\mathbb{A}_3$ plyne omezenost funkce a . Důsledkem [3, Věta 12.10] snadno nahlédneme, že

$$\| (a(\mathbf{x}, v_n) - a(\mathbf{x}, v)) \|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (52)$$

pro $v_n \rightarrow v$ v $V^{1,2}$. Nyní z (48)–(51) již snadno dostáváme (47). $\square$

Lemma 3.4 *Operátor $\mathcal{T} : V^{1,2} \rightarrow (V^{1,2})^*$ je monotónní.*

DŮKAZ: Operátor $\mathcal{T} : V^{1,2} \rightarrow (V^{1,2})^*$ je monotónní, pokud

$$\langle \mathcal{T}(u) - \mathcal{T}(v), u - v \rangle \geq 0$$

pro všechna $u, v \in V^{1,2}$. Tato nerovnost však ihned vyplývá ze vztahu

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}(u) - \mathcal{T}(v), u - v \rangle &= \int_{\Omega} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) |\nabla(u - v)|^2 d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} [a(\mathbf{x}, u) - a(\mathbf{x}, v)] (u - v) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \beta_c |u - v|^2 dS, \end{aligned} \quad (53)$$

kde stačí využít monotonie funkce $a(\mathbf{x}, \cdot)$ (pro všechna $\mathbf{x} \in \Omega$). $\square$

Lemma 3.5 *Operátor $\mathcal{T} : V^{1,2} \rightarrow (V^{1,2})^*$ je koercivní.*

DŮKAZ: Operátor $\mathcal{T} : V^{1,2} \rightarrow (V^{1,2})^*$ je koercivní, pokud

$$\lim_{\|v\|_{V^{1,2}} \rightarrow \infty} \frac{\langle \mathcal{T}(v), v \rangle}{\|v\|_{V^{1,2}}} = \infty. \quad (54)$$

Pro $v \in V^{1,2}$ uvažujme

$$\langle \mathcal{T}(v), v \rangle = \int_{\Omega} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) |\nabla v|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a(\mathbf{x}, v) v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \beta_c v^2 dS. \quad (55)$$

Z Friedrichsovy nerovnosti [10] a předpokladu $\mathbb{A}_2$ vyplývá existence takové konstanty $c > 0$, že

$$c\|v\|_{V^{1,2}}^2 \leq \int_{\Omega} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) |\nabla v|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \beta_c v^2 dS. \quad (56)$$

Nyní odhadneme (zdola) druhý člen v (55). Nejprve uvedeme následující nerovnost

$$\left(\xi a + \frac{1}{\xi} b \right)^2 \geq 0,$$

která platí pro libovolné reálné $a, b, \xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$. Odtud ihned dostáváme

$$(\xi a)^2 + 2ab + \frac{b^2}{\xi^2} \geq 0$$

a dále

$$ab \geq -\frac{a^2}{2}\xi^2 - \frac{b^2}{2}\frac{1}{\xi^2}.$$

Nyní již snadno odhadneme

$$\int_{\Omega} a(\mathbf{x}, v) v d\mathbf{x} \geq \int_{\Omega} -\frac{a(\mathbf{x}, v)^2}{2} \xi^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} -\frac{v^2}{2} \frac{1}{\xi^2} d\mathbf{x}.$$

Díky omezenosti funkce $a(\mathbf{x}, v)$ dostáváme

$$\int_{\Omega} a(\mathbf{x}, v) v \, d\mathbf{x} \geq -\frac{1}{2\xi^2} \int_{\Omega} v^2 \, d\mathbf{x} - C(\xi)$$

a užitím nerovnosti

$$-\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq -c(\Omega)\|u\|_{V^{1,2}(\Omega)}^2$$

získáme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(\mathbf{x}, v) v \, d\mathbf{x} &\geq -\frac{1}{2\xi^2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - C(\xi) \\ &\geq -\frac{c}{2\xi^2} \|v\|_{V^{1,2}(\Omega)}^2 - C(\xi). \end{aligned} \quad (57)$$

Uvážením vztahů (56) a (57) dostaneme pro “dostatečně” velké ξ

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{\kappa}(\mathbf{x}) |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} a(\mathbf{x}, v) v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} \beta_c v^2 \, dS \\ \geq c_1 \|v\|_{V^{1,2}(\Omega)}^2 - \frac{c_2}{\xi^2} \|v\|_{V^{1,2}(\Omega)}^2 - C(\xi) \\ \geq c \|v\|_{V^{1,2}(\Omega)}^2 - C(\xi). \end{aligned} \quad (58)$$

Nyní již snadno získáme koercivitu operátoru $\mathcal{T}$, neboť

$$\lim_{\|v\|_{V^{1,2}} \rightarrow \infty} \frac{\langle \mathcal{T}(v), v \rangle}{\|v\|_{V^{1,2}}} = \lim_{\|v\|_{V^{1,2}} \rightarrow \infty} \frac{c\|v\|_{V^{1,2}}^2 - c(\xi)}{\|v\|_{V^{1,2}}} = +\infty.$$

Tím je důkaz hotov. $\square$

Věta 3.6 (Browder, [3]) *Necht' operátor $\mathcal{T} : V^{1,2} \rightarrow (V^{1,2})^*$ splňuje následující podmínky:*

- (a) $\mathcal{T}$ je omezený;
- (b) $\mathcal{T}$ je zeslabeně spojitý;
- (c) $\mathcal{T}$ je monotónní;
- (d) $\mathcal{T}$ je koercivní.

Potom rovnice

$$\mathcal{T}(v) = f \quad (59)$$

má pro každé $f \in (V^{1,2})^*$ alespoň jedno řešení $v \in V^{1,2}$.

Užitím Věty 3.6 a vlastností operátoru $\mathcal{T}$ dostáváme tzv. *slabé řešení* $v \in V^{1,2}$ úlohy (36). Nyní vyslovíme větu o regularitě řešení problému (36), která je důsledkem [4, Theorem 4].

Věta 3.7 *Necht' $v \in V^{1,2}$ je slabé řešení problému (36) a $f \in (V^{1,q})^*$, pro nějaké $q \in (1, 2)$. Potom existuje $p^* > 2$ takové, že $v \in V^{1,p^*}$.*

Jelikož funkce θ_w je omezená a $u_{\infty,n+1}$ je spojitá, je zřejmě $f \in (V^{1,q})^*$ pro nějaké $q \in (1, 2)$. Důsledkem Věty 3.7 je slabé řešení problému (36) obsaženo v prostoru V^{1,p^*} pro nějaké $p^* > 2$.

Necht' nyní $v \in V^{1,p^*}$ je řešení úlohy (36). Dále uvažujme lineární diferenciální rovnici (pro neznámou funkci τ)

$$-\nabla \cdot (\tilde{\lambda}(\mathbf{x}) \nabla \tau) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, \nabla v) \cdot \nabla \tau + c(\mathbf{x}) \tau = f_2(\mathbf{x}) \quad \text{v } \Omega \quad (60)$$

s okrajovými podmínkami

$$\tau = 0 \quad \text{na } \Gamma_D, \quad (61)$$

$$-\tilde{\lambda}(\mathbf{x}) \nabla \tau \cdot \mathbf{n} = \alpha_c(\tau - \vartheta_{\infty,n+1}) \quad \text{na } \Gamma_N. \quad (62)$$

Pro koeficienty a pravou stranu rovnice (60) platí

$$\tilde{\lambda} \in L^\infty(\Omega), \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}, \nabla v) \in L^{p^*}(\Omega)^2, \quad c \in L^\infty(\Omega), \quad f_2 \in L^2(\Omega). \quad (63)$$

Úloha (60)–(63) je speciální (lineární) případ obecnější úlohy řešené v monografii [11]. Na základě výsledků uvedených v [11, Chapter 2], lze ukázat, že za předpokladů $\mathbb{A}_1$ – $\mathbb{A}_4$ a $c \geq c_0^{-1}$, existuje slabé řešení $\tau \in V^{1,2}$ problému (60)–(63), tj. $\tau \in V^{1,2}$, pro něž platí (37). Poznamenejme dále, že Dirichletova či Neumannova úloha pro rovnici (60) je řešena též v knize [8].

Tím je důkaz Věty 3.1 hotov. $\square$.

Důsledek 3.8 *V předložené práci jsme dokázali (viz Věta 3.1), že pro dané $[u_k, \vartheta_k] \in [u_D, \vartheta_D] + (V^{1,2})^2$ existuje $[u_{k+1}, \vartheta_{k+1}] \in [u_D, \vartheta_D] + V^{1,p^*} \times V^{1,2} \subset [u_D, \vartheta_D] + (V^{1,2})^2$. Jelikož předpokládáme $[u_0, \vartheta_0] \in [u_D, \vartheta_D] + (V^{1,2})^2$, dostáváme indukci $[u_n, \vartheta_n] \in [u_D, \vartheta_D] + (V^{1,2})^2$ postupně pro každé $n = 1, \dots, N$.*

**Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT
č. SGS12/001/OHK1/1T/11.**

¹Bez splnění této podmínky není úloha obecně koercivní.

Reference

- [1] J. Dalík, J. Daněček and J. Vala, Numerical Solution of the Kiessl Model, *Applications of Mathematics* 45 (2000) 3–17.
- [2] M.L. Deangelis and E.F. Wood, A detailed model to simulate heat and moisture transport in a frozen soil. *Hydrology, Water Resources and Ecology in Headwaters*, IAHS Publ. no. 248, 1998.
- [3] S. Fučík and A. Kufner, *Nonlinear Differential Equations. Studies in Applied Mechanics 2*. Amsterdam-New York, Elsevier Scientific Publ. Co. 1980.
- [4] T. Gallouët, A. Monier. On the regularity of Solutions to Elliptic Equations. *Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 19*, Roma (1999), 471–488.
- [5] H. H. Gerke and M. T. Van Genuchten, A dual-porosity model for simulating the preferential movement of water and solutes in structured porous media. *Water Resources Research* (2)**29** (1993), 305–319.
- [6] H. H. Gerke and M. T. Van Genuchten, Evaluation of a first-order water transfer term for variably saturated dual-porosity flow models. *Water Resources Research* (4)**29** (1993), 1225–1238.
- [7] K. Hansson, J. Šimůnek, M. Mizoguchi, Water flow and heat transport in frozen soil: numerical solution and freeze-thaw applications. *Vadose Zone Journal* 3:693–704
- [8] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Uraltseva, *Linear and quasilinear equations of elliptic type*, Nauka, Moscow, 1964, English translation: Academic Press, New York (1968).
- [9] J. Lukeš, *Zápisky z funkcionální analýzy*, Praha : Karolinum, 1998.
- [10] K. Rektorys, *Variační metody v inženýrských problémech a v problémech matematické fyziky*, Academia, Praha 1999.
- [11] T. Roubíček, *Nonlinear Partial Differential Equations With Applications*. Birkhäuser, 2005.
- [12] M.T.H. van Genuchten, Calculating the Unsaturated Hydraulic Conductivity with a New, Closed Form Analytical Model, Research Report 78-WR-08, Water Resources Program, Department of Civil Engineering, Princeton University, Princeton, 1978.