

Řešitelnost nelokálních okrajových úloh

20. matematická konference studentů VŠTEZ

Yulia Tigay

Vedoucí práce: doc. Ing. Gabriela Holubová, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

26.6.2012

- 1 Úvod
- 2 Tříbodová okrajová úloha
- 3 Tříbodová okrajová úloha s tlumením
- 4 Čtyřbodová okrajová úloha
- 5 Nelokální okrajové úlohy Fučíkova typu
- 6 Závěr

Třibodová okrajová úloha

Uvažujme následující třibodovou okrajovou úlohu:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(\eta), \end{cases} \quad (1)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\eta \in (0, \pi)$.

- 1 Dvojici $(\eta, \lambda) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$ nazveme *vlastní dvojicí*, jestliže úloha (1) má netriviální řešení $u(t)$.
- 2 $\lambda = \lambda(\eta)$ standardně nazýváme *vlastním číslem*.
- 3 Nenulové násobky $u(t)$ nazýváme *vlastními funkcemi* okrajové úlohy (1).

$$\lambda_{2n} = \left(\frac{2n\pi}{\pi - \eta} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

nebo

$$\lambda_{2k-1} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\eta + \pi} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Odpovídající systémy vlastních funkcí jsou:

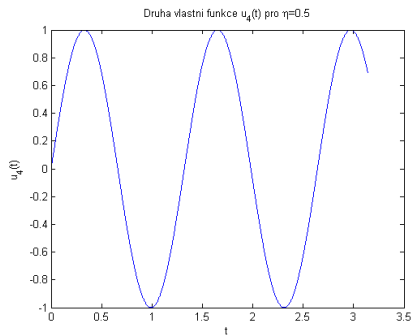
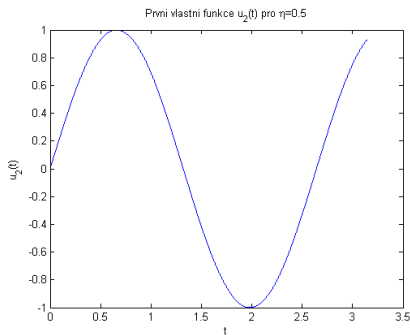
$$u_{2n}(t) = \sin \left(\frac{2n\pi t}{\pi - \eta} \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

nebo

$$u_{2k-1}(t) = \sin \left(\frac{(2k-1)\pi t}{\eta + \pi} \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

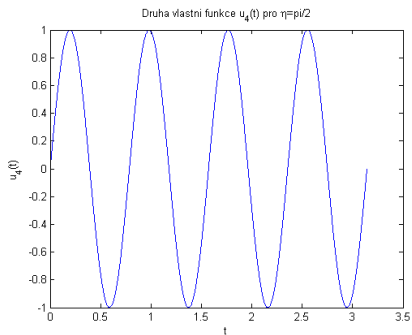
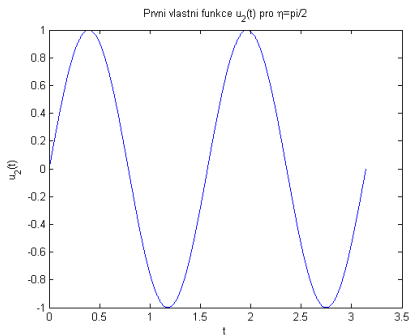
Grafické znázornění vlastních funkcí pro případ (4)

První dvě vlastní funkce pro $\eta = 0.5$



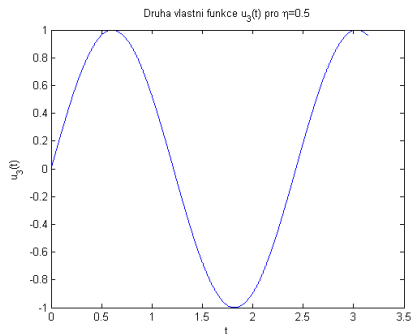
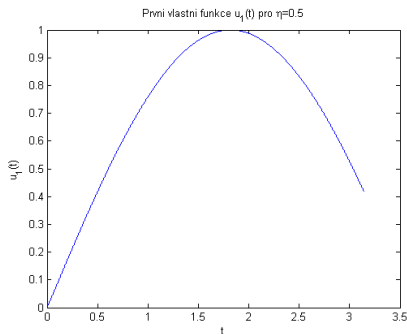
Grafické znázornění vlastních funkcí pro případ (4)

První dvě vlastní funkce pro $\eta = \frac{\pi}{2}$



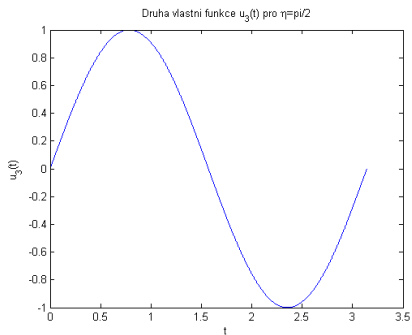
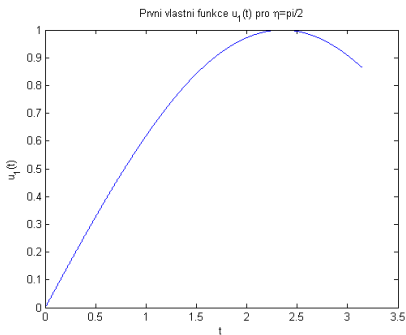
Grafické znázornění vlastních funkcí pro případ (5)

První dvě vlastní funkce pro $\eta = 0.5$



Grafické znázornění vlastních funkcí pro případ (5)

První dvě vlastní funkce pro $\eta = \frac{\pi}{2}$



Podrobnější struktura vlastních dvojic a vlastních funkcí

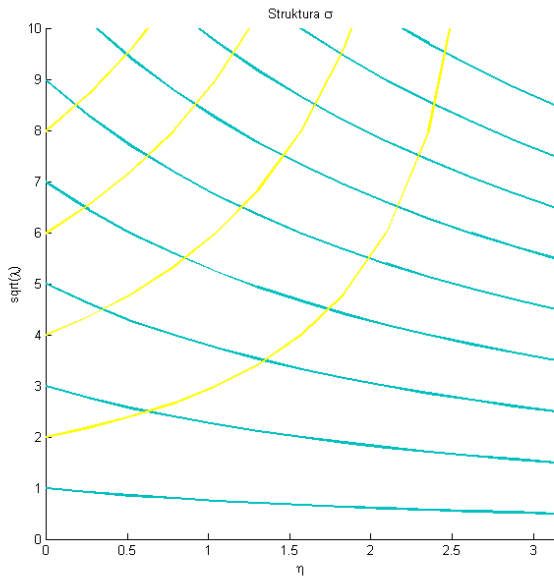
Uvažujeme vlastní dvojici $(\eta, \lambda) \in \langle 0, \pi \rangle \times \mathbb{R}$. Množinu všech vlastních dvojic značíme σ .

$$\sigma = C_{2n} \cup C_{2k-1}, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

$$C_{2n} = \left\{ (\eta, \lambda) : \lambda = \left(\frac{2n\pi}{\pi - \eta} \right)^2 \right\},$$

$$C_{2k-1} = \left\{ (\eta, \lambda) : \lambda = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta} \right)^2 \right\}.$$

Struktura množiny σ



Limitní případy třibodové úlohy na $(0, \pi)$

Necht' $\eta \rightarrow 0$. Potom okrajová úloha bude ve tvaru:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Dostáváme tedy standardní Dirichletovu úlohu se známými vlastními čísly a vlastními funkcemi:

$$\lambda_n = n^2, \quad u_n(t) = \sin nt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Limitní případy tříbodové úlohy na $(0, \pi)$

Necht' $\eta \rightarrow \pi$. Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě plyne:

$$u \in C(\langle 0, \pi \rangle) \cap C^1(0, \pi) \wedge u(\pi) = u(\eta) \implies \exists \xi \in (\eta, \pi) : u'(\xi) = 0.$$

Tedy okrajová úloha se zredukuje na Dirichletovu-Neumannovu úlohu:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \\ u'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Vlastní čísla a vlastní funkce jsou dobře známé a to následující:

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2, \quad u_k(t) = \sin \left(\frac{(2k-1)t}{2} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Třibodová okrajová úloha s tlumením

Výchozí třibodová okrajová úloha s tlumením má tvar:

$$\begin{cases} u''(t) + 2bu'(t) + \lambda u(t) = 0, \\ u(0) = 0, \\ u(\pi) = u(\eta), \end{cases} \quad (8)$$

kde $t \in (0, \pi)$, $\eta \in (0, \pi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $b > 0$.

Hlubším zkoumáním se nám povedlo ukázat platnost dvou tvrzení:

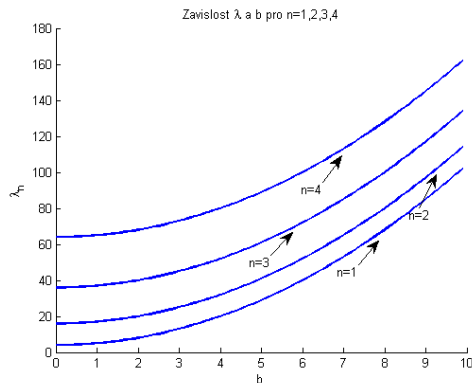
- 1 pro hodnoty $\lambda \leq 0$ existuje pouze triviální řešení třibodové úlohy s tlumením.
- 2 případná vlastní čísla má smysl hledat pouze na množině $\mathbb{R}^+$.

Volba konkrétní hodnoty η

Dále volíme konkrétní hodnotu $\eta = \frac{\pi}{2}$. Odpovídající vlastní čísla a vlastní funkce jsou:

$$\lambda_n = 4n^2 + b^2, \quad u_n(t) = e^{-bt} \sin 2nt, \quad b > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Závislost vlastních čísel λ_n na tlumení b .



Dvě transformace tříbodové úlohy s tlumením (1/2)

Nová závislá proměnná: $u(t) \longrightarrow \omega(t)$.

Vycházíme z okrajové úlohy (8). Vynásobíme-li rovnici v (8) členem e^{bt} , dostaneme:

$$u'' e^{bt} + 2be^{bt}u' + \lambda e^{bt}u = 0.$$

Dále zavedeme nové označení $e^{bt}u =: \omega$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \omega''(t) + (\lambda - b^2)\omega(t) & = & 0, \quad t \in (0, \pi), \\ \omega(0) & = & 0, \\ \omega(\pi) & = & \frac{e^{b\pi}}{e^{b\eta}}\omega(\eta), \end{array} \right. \quad (9)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\eta \in (0, \pi)$.

Dvě transformace tříbodové úlohy s tlumením (2/2)

Nová nezávislá proměnná: $u(t) \longrightarrow u(x)$.

Vycházíme opět z úlohy (8). Zavedeme-li novou nezávislou proměnnou:

$$x = \int_0^t e^{\int_{\pi/2}^s (-2b)d\xi} ds =: \int_0^t \sigma(s),$$

získáme novou tříbodovou okrajovou úlohu bez tlumení ve tvaru:

$$\begin{cases} u''(x) + \frac{-\lambda}{(e^{b\pi} - 2bx)^2} u(x) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = 0, \\ u(\bar{\pi}) = u(\bar{\eta}), \end{cases} \quad (10)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\eta \in (0, \pi)$, $\bar{\pi} = \int_0^\pi \sigma(s)ds$, $\bar{\eta} = \int_0^\eta \sigma(s)ds$.

Výchozí čtyřbodová okrajová úloha má tvar:

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\xi), \\ u'(\pi) = u'(\eta), \end{cases} \quad (11)$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in (0, \pi)$, $\eta \in (0, \pi)$.

- 1 Trojici $(\xi, \eta, \lambda) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times \mathbb{R}$ nazýváme *vlastní trojicí*, jestliže úloha (11) má netriviální řešení $u(t)$.
- 2 $\lambda = \lambda(\xi, \eta)$ nazýváme *vlastním číslem*.
- 3 Nenulové násobky $u(t)$ nazýváme *vlastními funkcemi* okrajové úlohy (11).

$$\lambda_{2n} = \left(\frac{2\pi n}{\pi - \eta} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

nebo

$$\lambda_{2k-1} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta - \xi} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

nebo

$$\lambda_{2l} = \left(\frac{2\pi l}{\xi} \right)^2, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

A jim odpovídající systémy vlastních funkcí

$$\textcircled{1} \quad u_0(t) = 1,$$

$$\textcircled{2} \quad u_{2n}(t) = \cos \sqrt{\lambda_{2n}} \left(t - \frac{\xi}{2} \right),$$

$$\textcircled{3} \quad u_{2l}(t) = \sin \sqrt{\lambda_{2l}} \left(t - \frac{\pi + \eta}{2} \right),$$

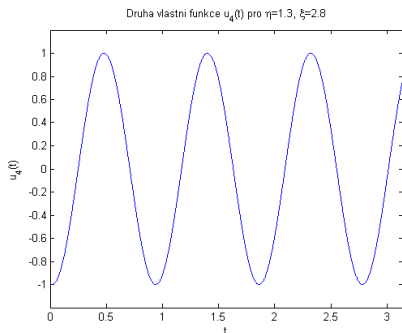
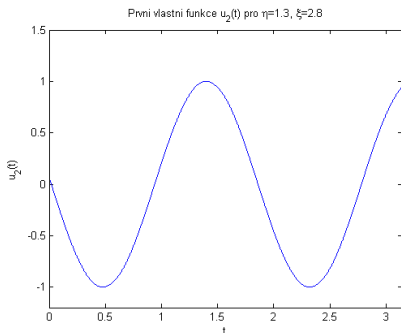
$$\textcircled{4} \quad u_{2k-1}(t) = \cos \sqrt{\lambda_{2k-1}} \left(t - \frac{\xi}{2} \right).$$

Grafické znázornění výsledků

Uvažujme 2. případ, tj. $u_{2n}(t) = \cos \sqrt{\lambda_{2n}} \left(t - \frac{\xi}{2} \right)$.

Necht'

$$\eta = 1.3 < \xi = 2.8$$

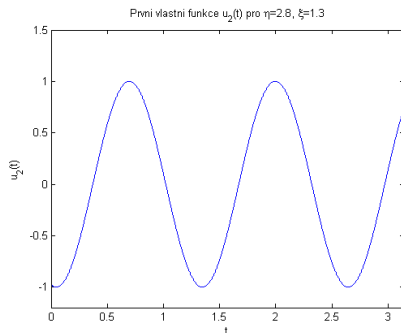
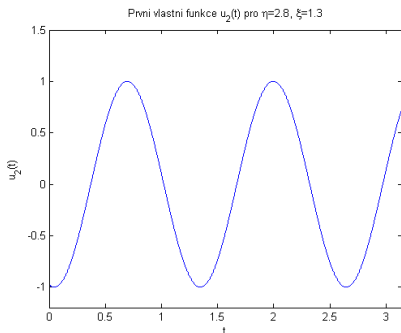


Grafické znázornění výsledků

Uvažujme 3. případ, tj. $u_{2l}(t) = \sin \sqrt{\lambda_{2l}} \left(t - \frac{\pi + \eta}{2} \right)$.

Necht'

$$\xi = 1.3 < \eta = 2.8,$$

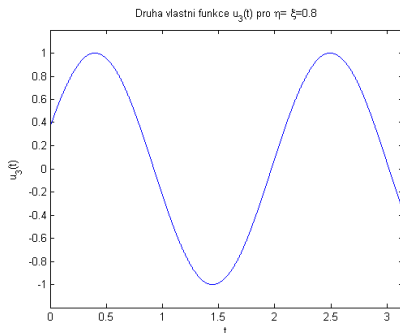
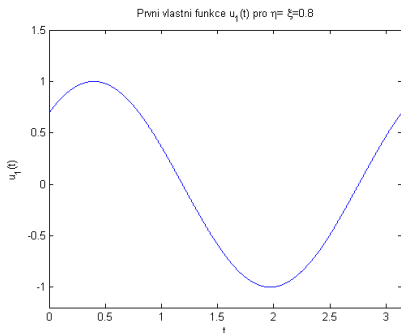


Grafické znázornění výsledků

Uvažujme 4. případ, tj. $u_{2k-1}(t) = \cos \sqrt{\lambda_{2k-1}} \left(t - \frac{\xi}{2} \right)$.

Necht'

$$\xi = 0.8 = \eta = 0.8,$$



Podrobnější struktura vlastních trojic a vlastních funkcí

Uvažujeme vlastní trojici $(\eta, \xi, \lambda) \in \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \times \mathbb{R}$. Množinu všech vlastních trojic značíme σ .

$$\sigma = C_{2n} \cup C_{2k-1} \cup C_{2l}, \quad n, k, l \in \mathbb{N},$$

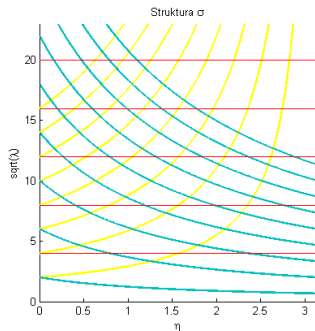
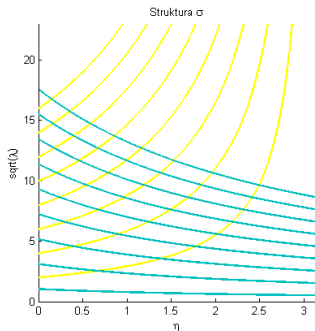
$$C_{2n} = \left\{ (\xi, \eta, \lambda) : \lambda = \left(\frac{2n\pi}{\pi - \eta} \right)^2 \right\},$$

$$C_{2k-1} = \left\{ (\xi, \eta, \lambda) : \lambda = \left(\frac{(2k-1)\pi}{\pi + \eta - \xi} \right)^2 \right\},$$

$$C_{2l} = \left\{ (\xi, \eta, \lambda) : \lambda = \left(\frac{2l\pi}{\xi} \right)^2 \right\}.$$

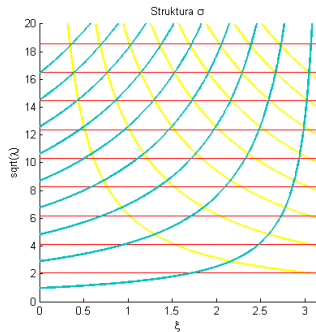
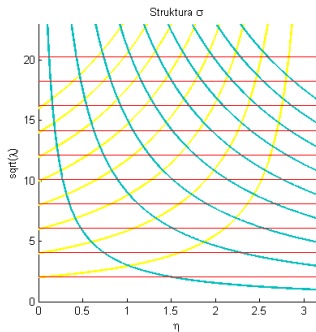
Struktura množiny σ

Uvažujme nyní hodnoty parametru $\xi = 0.1$ a $\xi = \frac{\pi}{2}$



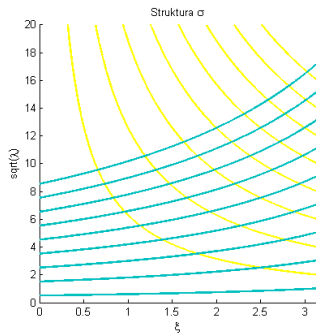
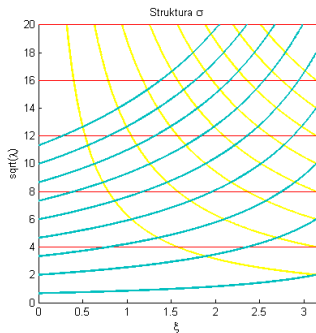
Struktura množiny σ

$$\xi = 3.1 \text{ a } \eta = 0.1$$



Struktura množiny σ

$$\eta = \frac{\pi}{2} \text{ a } \eta = 3.1$$



Limitní případy čtyřbodové úlohy na $(0, \pi)$

Budeme se zabývat limitními případy: $\xi \longrightarrow 0$, $\xi \longrightarrow \pi$, $\eta \longrightarrow 0$ a $\eta \longrightarrow \pi$.

Z Lagrangeovy věty o střední hodnotě plyne:

$$u \in C(\langle 0, \pi \rangle) \cap C^1(0, \pi) \wedge u(0) = u(\xi) \implies \exists \mu = 0 : u'(\mu) = 0.$$

Pro $\xi \longrightarrow 0$ tedy dostaneme podmínku $u'(0) = 0$.

Podobně dostáváme:

$$u'(\eta) = u'(\pi) \implies \exists \nu = 0 : u''(\nu) = 0.$$

$$\eta \longrightarrow \pi \implies u''(\pi) = 0.$$

1. $\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (0, \pi), \\ u'(0) = 0, \\ u'(\pi) = u'(0) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Standardní Neumannova okrajová úloha

Vlastní čísla a vlastní funkce jsou známe a to následující:

$$\lambda_n = n^2, \quad u_n(t) = \cos nt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\xi \rightarrow \pi, \eta \rightarrow 0 \implies$ periodická úloha

$$(\lambda_n = 4n^2, \quad u_n(t) = \cos 2nt, \quad v_n(t) = \sin 2nt, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

$\xi \rightarrow \pi, \eta \rightarrow \pi \implies$ Dirichletova úloha

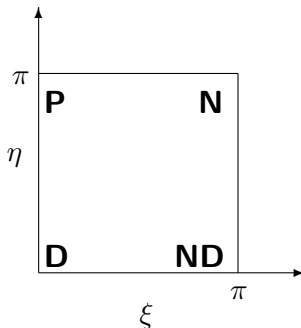
$$(\lambda_n = n^2, \quad u_n(t) = \sin nt, \quad n \in \mathbb{N}).$$

$\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow \pi \implies$ Dirichletova-Neumannova úloha

$$\left(\lambda_n = \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2, \quad u_n(t) = \cos \left(\frac{2n-1}{2} t \right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right).$$

Oblast parametrů ξ a η

Celou výše prozkoumanou situaci lze znázornit následovně:



Výchozí tříbodová okrajová úloha Fučíkova typu bude ve tvaru:

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha u^+(t) - \beta u^-(t) &= 0, & t \in (0, \pi), \\ u(0) &= 0, \\ u(\pi) &= u(\eta), & \eta \in (0, \pi), \end{cases} \quad (16)$$

kde $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- 1 *Řešením* rozumíme funkci $u \in C^2(0, \pi) \cap C(\langle 0, \pi \rangle)$.
- 2 Bod $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pro který existuje netriviální řešení $u(t)$ nazýváme *Fučíkovo vlastní číslo*.
- 3 Odpovídající netriviální řešení $u(t)$ a všechny jeho kladné násobky nazýváme *Fučíkovy vlastní funkce* dané úlohy.

Definujme následující operátory:

$$Lu := L^{P\eta}u := L^{DN}u := -u'',$$

kde $\eta \in (0, \pi)$ a platí:

$$D(L) := \{u \in C^2(0, \pi) \cap C(\langle 0, \pi \rangle) : u(0) = 0, u(\pi) = u(\eta)\},$$

$$D(L^{P\eta}) := \{u \in C^2(0, \pi) \cap C(\langle 0, \pi \rangle) : u(\pi) = u(\eta), u'(\pi) = u'(\eta)\},$$

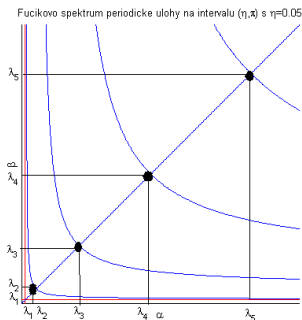
$$D(L^{DN}) := \left\{ u \in C^2(0, \pi) \cap C(\langle 0, \pi \rangle) : u(0) = 0, u'\left(\frac{\pi + \eta}{2}\right) = 0 \right\}.$$

$L^{P\eta}$ na intervalu (η, π)

Řešení bude periodické na intervalu (η, π) , pokud na něm bude mít stejný počet kladných a záporných půlvln:

$$\frac{k}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{\sqrt{\beta}} = \frac{\pi - \eta}{\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Řešení, které je periodické na (η, π) můžeme libovolně posunout, abychom zajistili splnění podmínky na začátku intervalu $u(0) = 0$.

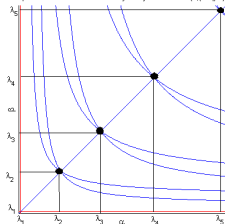


L^{DN} na intervalu $(0, \frac{\pi+\eta}{2})$

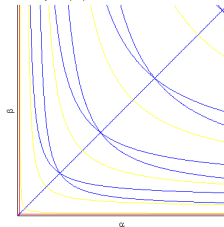
- $\frac{k}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi + \eta}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$
- $\frac{k}{\sqrt{\alpha}} + \frac{(k+1)}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\pi + \eta}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$
- $\frac{(k+1)}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{2\sqrt{\beta}} = \frac{\pi + \eta}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$
- $\frac{k}{\sqrt{\alpha}} + \frac{k}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{2\sqrt{\beta}} = \frac{\pi + \eta}{2\pi}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

Fučíkovy větve

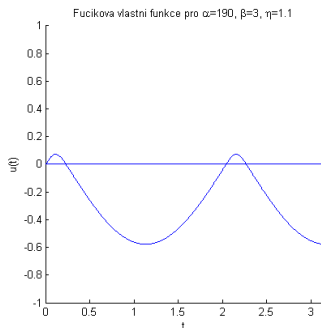
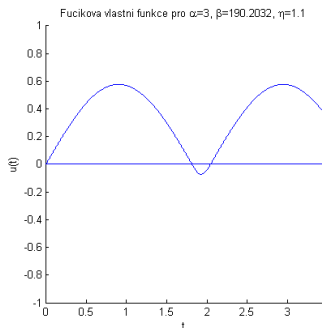
Fučikovo spektrum Dirichlet-Neumannovy úlohy na intervalu $(0, (\pi+\eta)/2)$ s $\eta=0.05$



Fučikovy větve pro periodickou a Dirichlet-Neumannovu úlohu

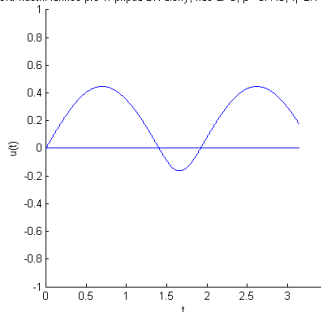


Netriviální řešení v případě periodické úlohy na (η, π)

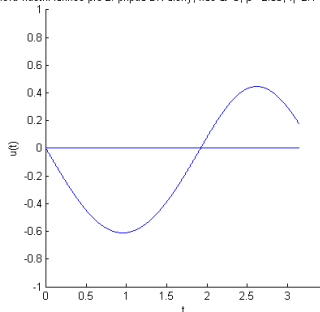


Netriviální řešení v případě DN úlohy na $(0, \frac{\eta+\pi}{2})$

Fucikova vlastní funkce pro 1. případ DN úlohy, kde $\alpha=5$, $\beta=37.45$, $\eta=2.1 \Rightarrow (\pi+\eta)/2=2.6$

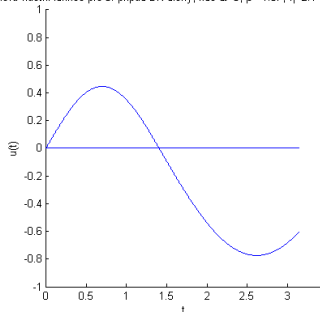


Fucikova vlastní funkce pro 2. případ DN úlohy, kde $\alpha=5$, $\beta=2.68$, $\eta=2.1 \Rightarrow (\pi+\eta)/2=2.6$

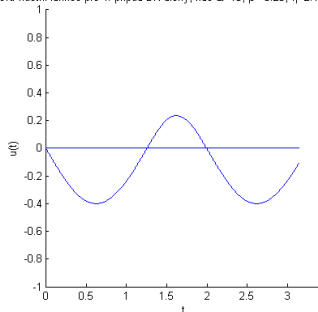


Netriviální řešení v případě DN úlohy na $(0, \frac{\eta+\pi}{2})$

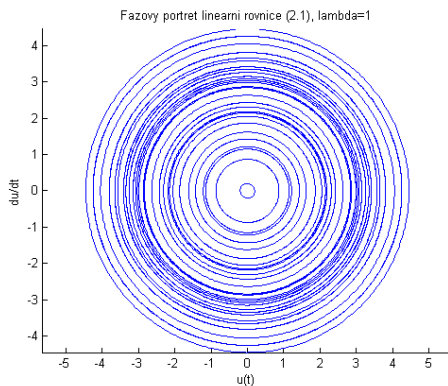
Fucikova vlastní funkce pro 3. případ DN úlohy, kde $\alpha=5$, $\beta=1.67$, $\eta=2.1 \Rightarrow (\pi+\eta)/2=2.6$



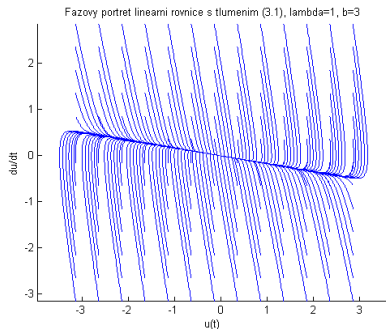
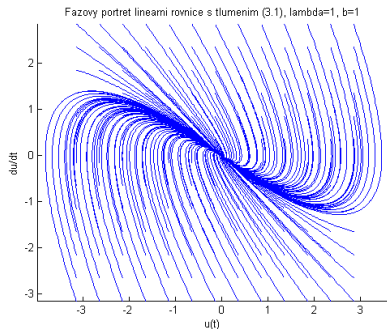
Fucikova vlastní funkce pro 4. případ DN úlohy, kde $\alpha=18$, $\beta=6.28$, $\eta=2.1 \Rightarrow (\pi+\eta)/2=2.6$



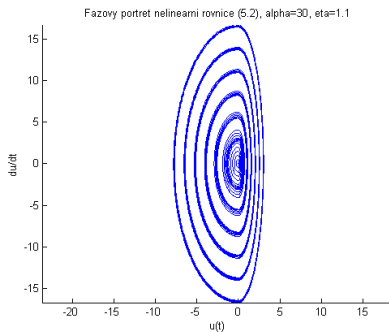
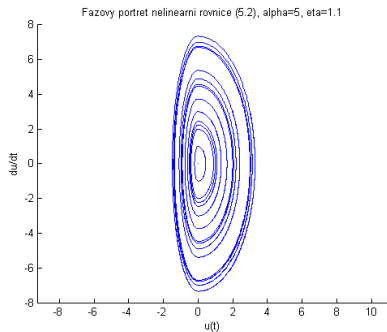
Fázový portrét pro lineární rovnici v (1)



Fázový portrét pro lineární rovnici v (8) s $b=1$ a $b=3$



Fázový portrét pro nelineární rovnici v (16) s $\alpha = 5$ a $\alpha = 30$



- Nalezli jsme všechny systémy vlastních čísel a vlastních funkcí třibodové a čtyřbodové okrajové úlohy.
- Pro třibodovou úlohu s tlumícím členem se nám podařilo ukázat, že vlastní čísla existují pouze na množině $\mathbb{R}^+$.
- Dále byla úloha s tlumením formulována v obecném případě a byla použita věta o jednoznačnosti na základě článků Kiguradzeho a Lomtadidzeho. Ukázali jsme, že dostáváme podle očekávání stejné výsledky.
- Naznačili jsme dvě transformace, které naznačují, jak se dá tlumící člen eliminovat avšak za určitou cenu.
- Dále jsme se zabývali třibodovou úlohou Fučíkova typu. Ukázali jsme analytické předpisy pro Fučíkovy větve a názorně jsme ukázali příslušné vlastní funkce.

Děkuji za pozornost.