Komise JČMF pro matematiku na VŠTEZ
Fakulta stavební ČVUT v Praze

SBORNÍK

příspěvků

z

30. konference o matematice na VŠTEZ

a

16. konference studentů na VŠTEZ

15. – 17. září 2008

Lázně Bohdaneč

Vydavatel: Jednota českých matematiků a fyziků
Praha 2008
Editor: Stanislav Olivík

ISBN: 978-80-7015-002-3

Předmluva

Vážení účastníci 30. konference o matematice na vysokých školách technických, ekonomických a zemědělských, děkujeme vám za váš zájem o konferenci, kterou zorganizovala Komise JČMF pro matematiku na vysokých školách technických, ekonomických a zemědělských spolu s katedrou matematiky Fakulty stavební ČVUT Praha.

Počátek činnosti Komise spadá do roku 1962, kdy byla schválena Ústřední komise JČMF. Komise vždy usilovala o rozvoj modernizace matematiky se zřetelem k potřebám její výuky. Za nejúčinnější formu plnění tohoto programu Komise zvolila pořádání konferencí o matematice na VŠTEZ.

Často se na konferencích, které byly vždy místem setkání učitelů matematiky na technikách, diskutovaly závažné koncepční problémy, které se týkaly výuky matematiky. Témata byla velmi různorodá, v některých obdobích k nim patřily i „jednoduchost, unifikace a uniformita“, ale i témata, která naopak vedla k diskusím o jedinečnosti, výjimečnosti matematiky a nemožnosti vtlačit ji do jediné ulity jednotných osnov. Stranou nezůstávala ani prezentace vědecké práce učitelů na VŠTEZ a aplikací matematiky v technických oborech.

Sílu Komise a jejích konferencí vidíme v dlouhodobé tradici, v široké bázi pro práci nadšených kolegů kateder matematiky, v zázemí JČMF a v možnosti působit jako dlouhodobá a důvěryhodná platforma pro diskuse o problematice výuky matematických předmětů na školách VŠTEZ, ale také ve spolupráci se středními školami.

Komise nepřerušila kontakty se slovenskými kolegy, což dokazuje nejen tato 30. konference, ale i 28. konference v Rožňavě v roce 2004, a 22. a 25. konference v Trnavě v roce 1992 a 1998 a také příští 31. konference, která se bude konat na Slovensku.

Věříme, že 30. konference byla pro vás přínosem jak po stránce odborné, tak společenské. Předkládáme vám sborník referátů, které jsme od vás obdrželi, a které vám připomenou atmosféru konference.

Ještě jednou děkujeme všem sponzorům a příznivcům našich konferencí. Děkujeme všem účastníkům za pozitivní aktivity na konferenci. Těšíme se na setkání s vámi na 31. konferenci o matematice na VŠTEZ.

V Praze, 20.10.2008

Milada Kočandrlová
Michal Beneš

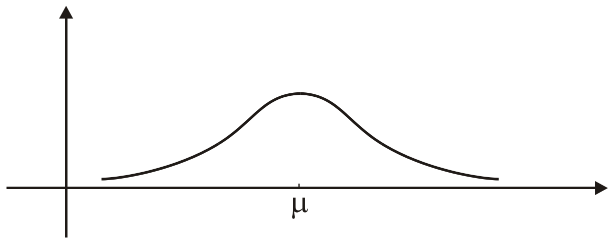
Obsah

Příspěvky

PÁR SLOV O REFORME ŠKOLSTVA

Vojtech Bálint

Motto: Gaussova krivka



Reforma školstva (ďalej RŠ) sa týka samozrejme všetkých predmetov na všetkých stupňoch škôl. Neubránim sa však pohľadu matematika, ktorý učí na technike. Koniec koncov – naša konferencia to má v názve. Keď som rozmýšľal o RŠ a najmä keď som prichádzal s ňou do styku počas jej prípravy, tak ma väčšinou napadali slová, ktoré sa obvykle nezverejňujú. Nakoniec som sa ale predsa len rozhodol oboznámiť toto fórum s tým, čo sa dialo za oponou. Pretože podobne ako v Čechách, aj u nás sa všetko podstatné odohrávalo za oponou.

Keďže som známy tým, že sa nebojím vysloviť svoj názor, Slovenská matematická spoločnosť (SMS) ma koncom novembra 2007 poverila, aby som sa do tejto práce zapojil ako predseda predmetovej komisie. Navzdory mojim protestom ma považovali za vhodnú osobu a keďže mám už dosť nepriateľov, tak som si povedal, že tých pár naviac, ktorých si určite zadovážim, mi už veľmi neublíži. Takže som to prijal a začali sa diať veci.

3. decembra 2007 som dostal pozvánku do Častej-Píly. Z pozvánky som sa okrem miesta konania dozvedel len to, že zasadnutie bude v dňoch 5.-6.decembra a že reč bude o RŠ. Takže 5. decembra kúsok po 9-tej riaditeľ Štátneho pedagogického ústavu (ŠPÚ) Július Hauser otvoril rokovanie a niektorí vybraní predstavitelia začali vyprávať; najmä Miron Zelina, ktorý vie o všetkom všetko. Podstatou ich vyprávania bolo, že vraj vytvorili nejaké *bloky predmetov* a že RŠ je potrebná, aj keď nevedeli povedať že prečo, a odvolávali sa na materiály, ktoré sme vraj dostali. Vrchol však prišiel na poludnie, keď rokovanie prerušili s tým, že bude obed a že od 13:00 začne zasadnutie jednotlivých predmetových komisií a že o 16:00 predsedovia komisií odovzdajú vyplnené a podpísané tlačivá, ktoré nám rozdali. Na týchto tlačivách bolo množstvo bodov najmä o tom že, ktoré časti učiva vynecháme a prečo. V predmete matematika by to bolo 12 tlačív – za každý ročník ZŠ aj SŠ jedno.

Okrem mňa ako predsedu, ktorý nič vopred nevedel, tam bol za matematiku doc. Vlado Rosa. Je to veľmi skúsený človek, dlhé roky bol vrchným školským inšpektorom, a on našťastie niečo vedel. A bol tam ešte jeden čerstvý sedemdesiatnik, Ľudovít Bálint (zhoda mien je náhodná, tam sme sa videli prvýkrát), ktorý na ŠPÚ roky pracoval na osnovách a iných veciach. Takže od nich som sa počas obeda dozvedel, že plánovaný počet povinných hodín matematiky (M) v rámci Štátneho vzdelávacieho programu (ŠVP) je 7x4+2x3 = 34 na ZŠ a 4+3+0+0=7 na Gymnáziách, pričom doterajší počet hodín M na ZŠ bol 7x5+2x4=43 a na G bol 4+4+4+3=15.

Asi je každému jasné, že nič sme nevyplnili a nič sme nepodpísali.

Pri začatí rokovania o 16:00 sa ihneď prihlásila Beata Brestenská, predsedníčka komisie za informatiku a na veľké prekvapenie začala svoje vystúpenie takto: „Som prekvapená, že kam som to spadla, do jedného vreca s matematikou. Veď matematici stále plačú, že majú málo hodín a pritom majú mizerné výsledky.“ Dúfal som v spojenectvo aj (a možno predovšetkým) s informatikmi, ale bez ohľadu na tento úvod som oznámil, že komisia za matematiku nesúhlasí s pridelenou časovou dotáciou a že na takúto dotáciu nikto z nás nepripraví osnovy a že podpíšem len to, že nikto z nás nič nepodpíše, ale že ak bude dotácia aspoň čiastočne zmenená, tak osnovy pripravíme, ale samozrejme, nie pre 12 ročníkov za kratučké 3 hodiny. Odpoveď Mirona Zelinu bola, že „Takto si spoluprácu nepredstavujeme! Neprišli sme sa sem hádať!“ A viac som sa k mikrofónu nedostal...

Druhý deň predpoludním mal prísť minister školstva Ján Mikolaj. Riaditeľ ŠPÚ vyhlásil, že „Pán minister chce mať pripravený materiál večer o 17-tej na stole a on, riaditeľ Július Hauser zaručuje, že minister ho tam bude mať, takže všetci nech doplníme čo treba.“ Takže na druhý deň, 6. decembra sme podali písomné stanovisko komisie za matematiku presne tak, ako deň predtým: na tento počet hodín matematiky nikto osnovy nepripraví.

Už večer 6. decembra, ihneď po návrate do Žiliny som napísal list s podrobnými informáciami niekoľkým osobám z matematickej komunity, o ktorých som si myslel, že by mohli mať vplyv na ďalšie dianie, aby sme to ďalšie dianie zmenili.

A teraz pohľad matematika z techniky – pretože celý život učím matematiku na technike a nie je mi ľahostajné, akú kvalitu budú mať naše produkty, teda inžinieri. Uvedomil som si, že pri takejto časovej dotácii matematiky na ZŠ a gymnáziách **najviac utrpia vysoké školy technické**! Tých niekoľko naozaj dobrých gymnázií (mám na mysli dobrých z hľadiska matematiky) si určite dá nejakú matematiku v rámci voliteľných hodín, ale dobré produkty týchto gymnázií pokryjú len dopyt FMFI UK Bratislava, prípadne čiastočne PF UPJŠ Košice a UMB Banská Bystrica; stredne dobré produkty tých gymnázií čiastočne pokryjú dopyt učiteľských smerov na spomínaných školách, ale pre techniky už nezostane asi ani kus gymnazistu. Najmä vo svetle, že úbytok stredne nadaných záujemcov o matematiku zaznamenáme už na ZŠ v dôsledku značného poklesu hodín. A s týmto som sa ihneď obrátil na dekanku mojej fakulty a na rektora ŽU, aby intervenovali u ministra školstva, ktorý predtým než sa stal ministrom, tak učil na ŽU. Samozrejme tak urobili a výsledok tejto zákulisnej hry sa dostavil: minister ihneď pridal matematiku do 3. ročníka gymnázia a niečo málo aj na ZŠ. Chceli sme síce viac, ale aj toto bolo lepšie ako nič, pretože rôznorodosť názorov priamo v matematickej komunite neumožňovala boj za viac hodín. Začali teda pracovať odborné komisie na osnovách, pričom použili hodinovú dotáciu 7x4+2x3 = 34 na ZŠ a 4+3+2+0=9 na Gymnáziách. Fyzicky sme sa stretli 19. marca 2008 na ŠPÚ, a ako to už na Slovensku od čias Mečiara býva zvykom, *našli sme niečo na stole*. Bol to papier s novými hodinovými dotáciami predmetov, ale nikto sa k ich autorstvu nepriznal! Matematika 3 hod týždenne, a to v každom ročníku ZŠ (okrem posledných dvoch), teda asi 40%-né krátenie oproti terajšiemu stavu. Ešte ináč: doteraz bolo 57 hodín matematiky za 1-12 ročník, po návrhu z 19. marca bude 38 hodín. Alebo ešte jasnejšie: úbytok 19 hodín znamená, že ubudne viac ako celá stredná škola, takže maturant s vedomosťami ZŠ sa prihlási napr. na SvF a bude chcieť stať sa stavebným inžinierom... Najprv síce len bakalárom, ale potom inžinierom. Takže osnovy, čo sme pripravili na pridelenú časovú dotáciu, sme mohli vyhodiť.

Potom som ešte napísal ministrovi list, ktorého podstatou bolo toto:

Chápem, že jazykové znalosti mládeže treba zlepšiť a chápem aj to, že cesta k tomu vedie cez zvýšený počet hodín povinnej výučby tých jazykov. Ale nechápem, že cesta k zvýšeniu matematických kompetencií (po ktorých celá vláda unisono volá) vedie naopak cez zníženie počtu povinných vyučovacích hodín v ŠVP. A že **takto pekne vedľa seba to v lepšom prípade vyzerá ako ignorancia nejakého úradníka, ale v horšom prípade ako úmyselné poškodenie vzdelanostnej úrovne mládeže na Slovensku.** Potom som však už od prípravy RŠ odišiel. Nebol som odvolaný, odišiel som. Predseda SMS Roman Nedela síce napísal otvorený list ministrovi a aj na mňa sa obrátili redaktorky dvoch novín, ale to bolo strašne málo oproti tomu, aký priestor dostali v rádiu, v tlači a v televízii stvoritelia nezmyslu s názvom RŠ.

Úžasná slabosť a servilnosť matematickej komunity sa ukázala v plnej nahote. Našli sa mnohí, ktorí tvrdili, že naozaj netreba toľko hodín venovať matematike, *keby ju učitelia dobre učili*. Množina učiteľov je veľká, ťažko bude v nej všetko vynikajúce – pozrite si Gaussovu krivku. Isté však je, že nedá sa bojovať, ak vo vlastných radoch nemáte podporu. Po prechode na štruktúrované štúdium na technikách viac ako predtým zápasíme s nedostatočnou kvalitou maturantov, ktorí nedokážu zvládnuť matematiku, lebo aj keď sme zmenšili jej obsah na bakalárskom štúdiu, hodinová dotácia sa znížila oveľa viac, nie proporcionálne. A to ešte nespomínam úžasný pokles (matematickej) kvality maturantov. Toto všetko je známe. A asi nie je neznáme ani to, že inžinieri na technikách občas vyhlasovali a vyhlasujú, že „potrebnú matematiku si odučíme sami". Keby matematici tvorili cech, tak by principiálne vyhlásili, že „Žiadny inžinier to učiť nebude, lebo na toto nemá kvalifikáciu." Všimnite si, prosím, že nemôžete si otvoriť kanceláriu, kde budete overovať pravosť listín – *notári* Vám to neumožnia, je to ich džob. Nemôžete si otvoriť *lekáreň* z podobných dôvodov. Ale *matematiku* asi môže učiť každý. Našli sa totiž mnohí z našich radov, ktorí tvrdili, že „Veď XY je inžinier a je výborný matematik, jemu to nemôžeme zakázať" – proste, poukážu na nejaký kontrapríklad a tým ste boj prehrali. Pripomínam v tejto súvislosti slová profesora Piťhu na konferencii vlani v Hradci Králové: „Argumentace, při níž se odmítne problém poukazem na protipříklad, je v **podobných** debatách nejen logicky a věcně, ale hlavně morálně vadná."

J. Sedláček, profesor sociológie na Karlovej univerzite v Prahe: „Matematika mi v prvom rade dala mentálnu disciplínu. Človek sa musel sústrediť. K tomu systematickosť a analytickosť. Predmety tohto typu nemožno zvládnuť chaotickým prístupom. **Musí sa ísť pekne krok za krokom. Všetko má svoj poriadok a svoju logiku.** A konečne – je tu možnosť overiť si správnosť postupu."

To „krok za krokom" je **<u>čas, ktorý potrebujú študenti</u>** a po ktorom my matematici pištíme, ale toto nikto nechce chápať.

*

Dovoľte uviesť ešte zopár drobných myšlienok – nie všetky sú z mojej hlavy, ale je ťažké vypátrať zdroj.

To, čo robí matematiku krásnou, je v spôsobe, akým rieši problémy a v trvalej platnosti jej tvrdení. Učebnice matematiky sa po revolúciách ani voľbách prepisovať nemusia. Dôsledok: v iných predmetoch sa starý poznatok **nahradí** novým, ale v matematike sa obsah len zväčšuje ... A je ťažké zo stavby zvanej *matematika* niečo vynechať, ak nechceme, aby stavba spadla. Súhlasím, že niečo vynechať treba (a odborné komisie na tom už pracovali), ale je treba dobre si premyslieť toto mikádo.

Papier, čo má každý, je bezcenný. Napr. *rodný list* treba len na to, aby Vás brali na vedomie (a potom ešte pri vybavovaní dôchodku). *Maturitné vysvedčenie* – ak ho má každý, tak k ničomu nie je. *Diplom* z vysokej školy bude mať asi takú istú váhu, ak ho budú mať takmer všetci.

„Poskytnúť čo najväčšiemu počtu ľudí čo najvyššie vzdelanie“ má dve vážne chyby:

1. Poskytnúť môžeme vzdelávanie, nie vzdelanie – vzdelať **sa** musí každý sám

2. Ak veľa ľudí bude mať univerzitu, tak si treba pozrieť gaussov graf, ktorý jasne hovorí o priemernej kvalite *majiteľov* vysokoškolských diplomov.

Učenie **sa**. Dôraz je na tom slovku „**sa**“, lebo naučiť **sa** veci musí každý sám. Učenie **sa** je zvláštny druh práce, pri ktorom obvykle veľmi dlho nie je vidno žiadny výsledok, takže je to psychicky neraz strašne ubíjajúca činnosť. Na rozdiel od kopy piesku, ktorú treba premiestniť lopatou: po jednej lopate je vidno výsledok snaženia a po každej lopate sa ten výsledok zlepšuje. Alebo na rozdiel od kopania kanálu krompáčom: každé jedno kopnutie zanecháva výsledok.

Myslenie. Je to proces, keď človek loví v skrytých záhyboch svojho mozgu nejaké informácie a pokúša sa vytvárať nejaké logické spojenia. Myslieť teda môže len ten, kto si do tých záhybov niečo uložil, ináč sa nedá odtiaľ nič vyloviť. Každému je jasné, že ak chce z rybníka vyloviť ryby, najprv sa musí rybník zarybniť! Ale je tu jeden zásadný rozdiel: kým rybník Vám môže zarybniť aj niekto iný, do svojej hlavy musí dostať informácie každý **sám**. V tomto svetle úplne absurdne vyzerajú populistické heslá o tom, že: „Už sa nebude treba učiť, nebude treba memorovať, ale naučíme deti tvorivo myslieť.“ Také heslá sa mládeži samozrejme páčia – veď hovoria o tom, že pracovať netreba. Ale Pytagoras, Euklides, Lagrange a mnohí ďalší sa idú udusiť od rehotu, keď počujú, že nikto sa už ich vety nebude učiť, lebo každý bude schopný si ich sám tvorivo vymyslieť. Dovolím si tu pripomenúť aj názor Václava Klausa mladšieho, riaditeľa jedného veľmi úspešného súkromného gymnázia v Prahe, ktorý jasne sformuloval, že anglické slovíčka sa musíte nadrieť, lebo ich nevymyslíte a podobne buď viete kedy žil Karol IV a kto bol jeho otec a kto jeho syn, alebo to neviete – ale vymyslieť sa Vám to nepodarí.

Stres na skúške je výhovorka nepripravených. Obvykle len hlupák nemá pred skúškou strach, ale ten v okamžiku začiatku produkcie musí spadnúť. Celý život je totiž o strese: **produkuj tu a teraz!** Napr. sadni za volant a nielen že nenabúraj, ale ešte koriguj aj chyby iných! Alebo: choď na pódium, vezmi husle a hraj; tu a teraz!

Už na 27. konferencii VŠTEZ v Hejnicích som hovoril a napísal, že „Prestaňme sa neustále prispôsobovať, prestaňme hľadať cesty, ako za x hodín odučiť to, na čo bolo ešte pred pár rokmi treba $2x$ hodín. My to totiž odučíme, ale študent si to neosvojí.“ Hovoril som tam aj o tom, že koľko trvalo nadpriemerne nadaným ľuďom (docentom a profesorom matematiky) to alebo ono pochopiť a nemôžeme to isté chcieť od priemerných, ba aj podpriemerných a za oveľa kratší čas.

V jednom článku v r. 2002 som veštil a na základe Gaussovej krivky som sa vyjadril o kvalite: „Nositeľom balíka peňazí sa vraj má stať študent. Možno som to pochopil nesprávne, ale v praxi to bude znamenať, že nastane neľútostný – a možno až bezohľadný – boj o študenta, univerzity sa budú predháňať vo vytvorení čo najoptimálnejšej ponuky pre študenta, čo bude znamenať enormný pokles požiadaviek na kvalitu študenta. Pretlmočené do obyčajnej a zrozumiteľnej slovenčiny: „Ak ešte nemáte vysokoškolský diplom, **prosíme** Vás, prihláste sa!“ Priam schizofrenicky budú pritom pôsobiť slová o kvalite. Ale budú to len slová.“

Mám vážne obavy, že tieto moje slová boli (bohužiaľ) viac ako prorocké a že sa až príliš rýchlo naplnili do poslednej bodky.

Listina ľudských **práv** a slobôd. Listina **práv** dieťaťa. Nie som proti, viem prečo vznikli. Fajn – a čo takto listina nejakých **povinností**? Pretože práva napr. učiteľa začínajú až tam, kde končia práva študenta.

Čo si má človek myslieť o predmete *Podnikateľská etika*? To niekto vážne verí tomu, že po absolvovaní tohto predmetu bude študent korektnejší? Ak si totiž za 18 rokov neosvojil určité pravidlá slušnosti, bude to už len horšie. Škola má poskytovať vzdelávanie a ak toto prebieha tak ako má, potom je študent automaticky *vychovávaný* k dodržiavaniu pravidiel, k poriadku, a nielen ku svojim právam.

Niečo pre fajnšmekrov: dobré je, že ešte stále **existujú ľudia mimo rezort školstva**, ktorým je kadečo z oblasti školstva jasné: dramatik Silvester Lavrík, hokejista Žigmund Pálffy, ... Zlé je, že týchto ľudí je málo.

Vo vývoji školstva sa dajú čísla s veľkou presnosťou predvídať – demografická krivka hovorí jasnou rečou ďaleko dopredu a Gaussova krivka je neúprosná. V tomto svetle priam bizarne pôsobí fakt, že všetky školy chcú byť väčšie a ešte väčšie.

Reforma je nezvratná a už vykonáva svoje zhubné dielo. Nemusíme však smútiť, lebo bolo už veľa „nezvratných a večných“ úkazov: Perzská ríša, Rímska ríša, Napoleonovo cisárstvo, Tretia ríša, Sovietske impérium aj priateľstvo s ním na večné časy, ...

Prajem Vám dobré nervy, keď sa v pedagogickom procese budete na školách stretávať s výsledkami školskej reformy a ďakujem Vám, ak ste to dočítali až sem.

KURZ MATEMATIKY V ANGLIČTINĚ

Daniela Bittnerová[1]

Abstrakt:
V rámci grantu FRVŠ připravujeme dvousemestrový kurz pro stávající učitele matematiky základních a středních škol, který bude zaměřen na problematiku výuky v cizím jazyce. Pro studenty budou připraveny distanční studijní opory. Kurz bude nabídnut i studentům a doktorandům technických fakult a studentům a doktorandům neučitelského studia matematiky. Na tento článek navazují příspěvky J. Přívratské a G. Plačkové.

1. ÚVOD

Katedra matematiky a didaktiky matematiky Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci se již mnoho let podílí na výuce matematiky v cizích jazycích, zejména v angličtině. Připravují se různé kurzy matematiky nejen pro cizince, ale i pro zájemce z řad českých studentů. Nyní připravujeme dvousemestrový kurz Vybrané předměty v angličtině, určený učitelům základních a středních škol, kteří se chtějí naučit základní matematickou anglickou terminologii, práci s anglickým odborným textem a výklad v tomto jazyce, aby po jeho absolvování mohli v tomto jazyce učit například cizince či nadané studenty. Kurz bude organizován kombinovanou formou. Kromě speciálních distančních textů vytváříme i vlastní e-learningový modul, jenž bude zájemcům o kurz plně k dispozici. Zvolili jsme již vytvořené a v současnosti stále více využívané prostředí Moodle, do něhož postupně vkládáme materiály pro studenty. Toto prostředí je oficiálním komunikačním prostředkem pro vzdělávání dospělých. Vzniklo na anglické Open University.

2. CÍLE A ČASOVÝ PLÁN

Kurz je zaměřen na následující přírodovědné předměty, které byly rozděleny do dvou semestrů:

1. semestr: Matematika (základy analýzy, algebry a aritmetiky)
Geometrie

2. semestr: Numerické metody nebo Pravděpodobnost a statistika
Fyzika

Témata předmětu Matematika:

Anglická odborná terminologie – čtení algebraických výrazů

Rovnice a nerovnice

Posloupnosti a řady

Funkce – definice, vlastnosti, elementární funkce a jejich transformace

Diferenciální počet

Integrální počet

[1] Katedra matematika a didaktiky matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci, email: daniela.bittnerova@tul.cz

3. ZPRACOVÁNÍ A PŘÍPRAVA KURZU

V první fázi zpracováváme jednotlivá témata v textové podobě včetně anglického odborného slovníčku (viz obr. 1 a obr. 3).

Vocabulary

<u>Basic terms</u>

addition	[∂ ′d n]	sčítání
to add	[æd]	sčítat, přidat
to add up		sečíst
algebra	[′æld br ∂]	algebra
algebraic	[′æld b ∂ k]	algebraický
algorithm	[′ælg ∂ r δ ∂ m]	algoritmus
algorithmic		algoritmický
application	[ɩ′æpl ′ke ∂ n]	aplikace, použití

Obr. 1: Ukázka ze slovníčku

Pak tyto texty a další materiály vkládáme do prostředí Moodle. Studentům budou přístupné i audiovizuální ukázky ze zahraničí (Univerzita Plymouth, Velká Británie). Na vytváření kurzu spolupracujeme s Katedrou cizích jazyků TUL.

4. ZAKONČENÍ

Kurz bude zakončen klasifikovaným zápočtem. K jeho získání bude nutné kromě aktivní účasti na výuce vypracovat referát na dané matematické téma – příprava několika výukových hodin na střední či základní škole a úspěšné zvládnutí dvou testů včetně anglické terminologie v každém semestru.

5. UKÁZKY TEXTŮ

Texty jsou zpracovány ve strukturované formě, která je přehlednější než tradiční lineární členění. Ukázky jsou zakončeny znakem ♥.

Definition

If *m* and *n* are positive integers, then

the [**floor** / **ceiling**] of m/n is the [largest integer that is / smallest] [less / greater] than or equal to m/n.

- (For example, the floor of 38/9 is 4 and the ceiling is 5.) ♥

Obr. 2: Ukázka strukturovaného textu

ARITHMETIC OPERATIONS

Addition

1	+	2	=	3
augend		addend (or addend)		sum

Subtraction

9	–	4	=	5
minuend		subtrahend		difference

Multiplication

2	.	5	=	12
multiplicand		multiplier		product

Division

64 : 9 = 7 and 1

dividend divisor quotient remainder

Závorky

Slovo "bracket" ve skutečnosti znamená hranatou závorku, ale v současné době se v matematice používá ve smyslu obecné závorky, tj. kulaté, hranaté i složené. ♥

Obr. 3: Ukázka výkladové části slovníčku

Example A.1. We show that $0 \cdot a = 0$.

$0 + 0 = 0$ ⊤ $\cdot a$ ⌊0 is identity element for addition⌉

$(0 + 0)\cdot a = 0\cdot a$. ⌊distributive law on the left⌉

$0\cdot a + 0\cdot a = 0\cdot a$. ⊤ $-\, 0\cdot a$ ⌊the same as adding the inverse of $0\cdot a$⌉

⌊$\underline{(0\cdot a + 0\cdot a) - 0\cdot a} = \underline{0\cdot a - 0\cdot a}$⌋ ⌊we work separately on the left-hand side and the RHS⌉

⌊$\underline{\text{LHS}}$: ⌊addition is associative⌉ $= 0\cdot a + (0\cdot a - 0\cdot a) = 0\cdot a + 0 =$ ⌊0 is identity⌉ $= \underline{0\cdot a}$.

$\underline{\text{RHS}}$⌋: $0\cdot a - 0\cdot a =$ ⌊adding of mutually opposite elements⌉ $= \underline{0}$⌋.

We conclude that $0 \cdot a = 0$. ♥

Obr. 4: Ukázka odborného textu

101	29	83
53	71	89
59	113	41

In the figure, there is a different magic square with primes.

- Investigate the sums in all lines.
- Find the magic constant.
- Find the sum of all numbers in the square.
    - Is it a prime?

♥

Obr. 5: Ukázka textu

6. Závěr

Kurz bude nabídnut nejen učitelům základních a středních škol, ale také studentům Technické univerzity v Liberci k systematické přípravě budoucích pedagogů pro odbornou výuku v angličtině, k přípravě studentů všech fakult pro výjezdy do zahraničí a k přípravě doktorandů pro mezinárodní konference. Distanční text a další doplňkové e-learningové pomůcky jsou vytvářeny průběžně. Předpokládáme, že časem budou na internetu přístupny nejen posluchačům naší univerzity, ale i všem zájemcům, kteří je nebudou využívat komerčně.

Literatura

[1] BITTNEROVÁ, D.: Práce s nadanými žáky a cizinci v angličtině. Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008. Srní. JČMF Plzeň, 2008. V tisku.

[2] PŘÍVRATSKÁ, J.: Výuka geometrie v angličtině. Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008. Srní. JČMF Plzeň, 2008. V tisku.

[3] PŘÍVRATSKÁ, J.: Geometrie a fyzika v angličtině. In. Tento sborník.

[4] PLAČKOVÁ, G.: Pravděpodobnost a statistika v angličtině. In. Tento sborník.

Poděkování

Práce vznikla rámci grantu FRVŠ č. 1544 „Příprava učitelů ZŠ a SŠ pro práci s nadanými žáky a cizinci v angličtině“.

MODEL OSOBNEJ DOPRAVY S VYUŽITÍM MULTIKOMODITNÝCH TOKOV[1]

Mária Branická[2], Milan Stacho[3]

Abstrakt:
V článku je popísaná možnosť modelovania systému osobnej dopravy pomocou multikomoditných tokov.

1. Model osobnej dopravy

Pre riešenie optimalizácie popíšeme statický model, v ktorom budem optimalizovať (minimalizovať) počet autobusov a súčasne určovať linky týchto autobusov.

Model je všeobecný, jeho základom je graf dopravnej siete $G=(V,E)$ (maximálna sieť) so zadanými požiadavkami na prepravu. V tomto článku používame vhodné vlastné označenie. Formulácia modelu je postavená na úlohe o multikomoditných tokoch, kde príslušnú účelovú funkciu definujeme viacerými spôsobmi. Túto úlohu riešime na jednoduchom modelovom príklade a to ako:

úlohy lineárneho programovania (LP),

úlohy celočíselného lineárneho programovania (ILP).

Definícia 1: Graf G je dvojica (V,E), kde V je ľubovoľná množina a E je relácia na tejto množine, t.j. $E \subseteq V \times V$. Prvky množiny V nazývame vrcholy alebo uzly a prvky množiny E hrany. Pod ohodnoteným grafom rozumieme trojicu (V, E, e_G), kde (V,E) je graf a funkcia $e_G : E \to R$ priraďuje hranám z E ohodnotenie, tzv. cenu hrany.

Predpokladáme, že je zadaná dopravná sieť vo forme ohodnoteného grafu $G = (V, E, e_G)$, v ktorom cena hrany reprezentuje vzdialenosť medzi uzlami. Ďalej predpokladáme, že na základe štatistického prieskumu alebo inou formou boli získané údaje o záujme o dopravu medzi jednotlivými uzlami. Tento záujem reprezentuje ohodnotený graf $H = (V, F, e_H)$ nad množinou vrcholov grafu cestnej siete.

2. Modelové riešenie optimalizácie dopravy

V ďalšom budeme riešiť úlohu, ako na základe špecifikácie záujmu a znalosti cestnej siete navrhnúť dopravné spojenia tak, aby ich počet a čas prepravy bol minimalizovaný, resp. ich naplnenosť bola maximalizovaná, resp. iné vhodne zvolené kritérium, za predpokladu, že získaný zoznam dopravných spojení dokáže uspokojiť všetky, resp. väčšinu dopytu po preprave medzi uzlami siete. V tomto prípade abstrahujeme od časovej závislosti záujmu o dopravu v priebehu dňa. Dá sa totiž predpokladať, že počas jednotlivých fáz dňa (ranná špička, atď.) sa záujem o prepravu z hľadiska zdroja a cieľa ciest nebude významne meniť, resp. jeho zmena minimálne

[1] Grantový projekt VEGA MŠ SR a SAV č. 1/0344/08,
[2] Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky, fakulta PEDAS, Žilinská Univerzita v Žiline, Univerzitná 1, 01026 Žilina, Slovenská republika, Maria.Branicka@fpedas.uniza.sk
[3] Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky, fakulta PEDAS, Žilinská Univerzita v Žiline, Univerzitná 1, 01026 Žilina, Slovenská republika, Milan.Stacho@fpedas.uniza.sk

ovplyvní získaný optimálny zoznam dopravných spojení. Deň sa v tomto prípade rozdelí na dostatočný počet intervalov tak, aby tento predpoklad bol dostatočne splnený.

Pokrytie záujmu o prepravu budeme reprezentovať formou multikomoditných tokov v dopravnej sieti. Presnejšie, ku každej dvojici uzlov s nenulovým záujmom, $c_H(i,j) > 0$ priradíme komoditu $x^{(i,j)}$. V tomto prípade pre každý uzol okrem *i* a *j* bude pre túto komoditu platiť Kirchhoffov zákon a navyše do uzla *i* bude vtekať $c_H(i,j)$ (to znamená, že v uzle *j* musí vytekať $c_H(i,j)$ z tejto komodity). Táto reprezentácia, tak ako bola popísaná, sa dá charakterizovať systémom nasledujúcich rovníc:

$$\sum_{(v,w)\in E} x_{v,w}^{(i,j)} - \sum_{(w,v)\in E} x_{w,v}^{(i,j)} = 0 \qquad v \neq i, j \tag{1a}$$

$$\sum_{(i,w)\in E} x_{i,w}^{(i,j)} - \sum_{(w,i)\in E} x_{w,i}^{(i,j)} = c_H(i,j) \tag{1b}$$

Riešenia uvedeného systému definujú množinu prípustných riešení optimalizačnej úlohy pre vhodne zvolenú účelovú funkciu. Napríklad, keď budem minimalizovať účelovú funkciu, ktorá bude vyjadrovať celkovú prepravu na všetkých hranách siete váženou cenou (napr. vzdialenosťou) hrán v sieti, tak úloha má jednoduché riešenie, kde pre každú komoditu $x^{(i,j)}$ je zvolená najkratšia cesta medzi (i,j) v zmysle zvolených cien. Inak v prípade zložitejších účelových funkcií sa úloha môže aj značne skomplikovať až tak, že nájdenie jej riešenia môže byť nezvládnuteľné v prijateľnom čase aj s použitím súčasnej špičkovej výpočtovej techniky už pre prípady malého počtu vrcholov siete. Preto sa v ďalšom budeme väčšinou venovať hľadaniu nejakého približného riešenia tejto úlohy, ktoré by bolo možné získať v prijateľnom čase pre väčšinu úloh a navyše bude dostatočne kvalitné pre naše potreby. Kvalitu získaného riešenia budeme taktiež analyzovať vzhľadom k optimálnej hodnote pre danú úlohu.

Pre ilustráciu popíšeme jeden z možných tvarov vyššie popísanej úlohy pre maximalizáciu naplnenosti dopravných spojení, kde jednotlivé spoje budú charakterizované ich maximálnou kapacitou *k* (predpokladám, že kapacita jednotlivých spojov je rovnaká). Uvedená úloha má tvar:

$$\min \sum_{(v,w)\in E} \left(k \cdot y_{v,w}\right)$$

kde

$$\sum_{(v,w)\in E} x_{v,w}^{(i,j)} - \sum_{(w,v)} x_{w,v}^{(i,j)} = 0 \qquad v \neq i, j \tag{2a}$$

$$\sum_{(i,w)\in E} x_{i,w}^{(i,j)} - \sum_{(w,i)\in E} x_{w,i}^{(i,j)} = c_H(i,j) \tag{2b}$$

$$\sum_{(i,j)} x_{v,w}^{(i.j)} - k \cdot y_{v,w} \leq 0 \tag{2c}$$

pričom $y_{v,w}$ je celočíselná premenná charakterizujúca počet spojov na danom úseku postačujúcich na pokrytie prepravovaného dopytu na danom úseku získaného ako riešenie systému (1) a *k* je maximálna kapacita spoja.

V ďalšom budeme predpokladať, že máme k dispozícii optimálne riešenie úlohy typu (1). Následne potrebujeme definovať, akým spôsobom budeme pokrývať dopyt na jednotlivých úsekoch siete pomocou spojov. Budeme predpokladať, že každý spoj má svoju maximálnu kapacitu a prepraví maximálne možné množstvo. Pre zjednodušenie predpokladáme, že kapacita spoja je rovnaká na každom úseku. Potom definujeme

$$y_{v,w} = \left\lceil \frac{\sum_{(i,j)} x_{v,w}^{(i,j)}}{k} \right\rceil$$

kde k je maximálna kapacita spoja (pozn.: voľba $y_{v,w}$ nie je náhodná, v prípade úlohy z predošlého odstavca presne zodpovedá premennej $y_{v,w}$).

Ďalej definujeme multigraf G_H na množine vrcholov V tak, že medzi dvoma vrcholmi (v,w) je presne $y_{v,w}$ hrán. Z tejto konštrukcie vyplýva, že ľubovoľné pokrytie grafu G_H cestami (resp. sledmi vhodných vlastností) definuje hľadanú množinu dopravných spojení zabezpečujúcich pokrytie dopytu. Tento problém sa dá definovať ako zobrazenie $f : E_H \to N$ s vlastnosťou, že množina vzorov $f^{-1}(i)$ pre zvolené $i \in N$ vytvára cestu, resp. sled, či iný zvolený typ grafu, t.j. podgraf G_H vytvorený z hrán $f^{-1}(i)$ je zvoleného typu. Potom veľkosť množiny obrazov $|f(E_H)|$ určuje počet potrebných dopravných spojení. Keďže tento parameter chceme minimalizovať, hľadaná úloha sa dá zapísať ako:

$$\min_{f : E_H \to N} |f(E_H)|$$

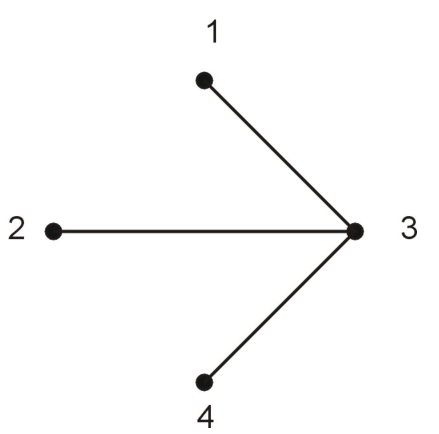
kde $f^{-1}(i)$ vytvára v G_H cestu, resp. sled $\quad i \in N$

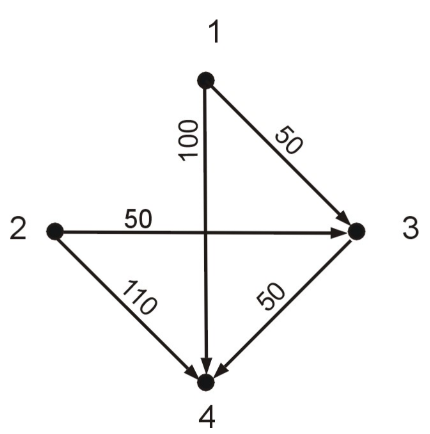
Pozn.: tento typ úlohy sa dá chápať ako hľadanie optimálneho hranového farbenia grafu, kde jednotlivé farby vytvárajú špecifickú štruktúru.

3. **Príklad 1**

Daný je graf dopravnej siete G (Obr. 1), maticou susednosti A a graf H (Obr. 2) požiadaviek na prepravu daný maticou susednosti B. Je potrebné určiť príslušné multikomoditné toky, ak:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 100 \\ 0 & 0 & 50 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$





Obr. 1 **Obr. 2**

Riešenie:

Budeme hľadať komodity $x^{(i,j)}$, $(i,j)\in E_G$, pre ktoré sú splnené rovnice (1), t.j. prvá séria rovníc (1a):

$$x_{2,3}^{(1,3)}-x_{3,2}^{(1,3)}=0,\quad x_{4,3}^{(1,3)}-x_{3,4}^{(1,3)}=0,\quad x_{1,3}^{(2,3)}-x_{3,1}^{(2,3)}=0$$

$$x_{4,3}^{(2,3)}-x_{3,4}^{(2,3)}=0,\quad x_{2,3}^{(1,4)}-x_{3,2}^{(1,4)}=0,$$

$$x_{3,1}^{(1,4)}+x_{3,2}^{(1,4)}+x_{3,4}^{(1,4)}-x_{1,3}^{(1,4)}-x_{2,3}^{(1,4)}-x_{4,3}^{(1,4)}=0,\quad x_{1,3}^{(2,4)}-x_{3,1}^{(2,4)}=0,$$

$$x_{3,1}^{(2,4)}+x_{3,2}^{(2,4)}+x_{3,4}^{(2,4)}-x_{1,3}^{(2,4)}-x_{2,3}^{(2,4)}-x_{4,3}^{(2,4)}=0,\quad x_{1,3}^{(3,4)}-x_{3,1}^{(3,4)}=0,$$

$$x_{2,3}^{(3,4)}-x_{3,2}^{(3,4)}=0$$

a druhá séria rovníc(1b):

$$x_{1,3}^{(1,3)}-x_{3,1}^{(1,3)}=50,\; x_{2,3}^{(2,3)}-x_{3,2}^{(2,3)}=50,\; x_{1,3}^{(1,4)}-x_{3,1}^{(1,4)}=100,\quad x_{2,3}^{(2,4)}-x_{3,2}^{(2,4)}=110,$$

$$x_{3,1}^{(3,4)}+x_{3,2}^{(3,4)}+x_{3,4}^{(3,4)}-x_{1,3}^{(3,4)}-x_{2,3}^{(3,4)}-x_{4,3}^{(3,4)}=50.$$

Hľadám také hodnoty $x_{v,w}^{(i,j)}$, pre ktoré

$$\sum_{(i,j)}\sum_{(v,w)\in E}x_{v,w}^{(i,j)}= x_{1,3}^{(1,3)}+x_{3,1}^{(1,3)}+x_{2,3}^{(1,3)}+x_{3,2}^{(1,3)}+x_{3,4}^{(1,3)}+x_{4,3}^{(1,3)}+$$

$$+x_{3,2}^{(2,3)}+x_{3,2}^{(2,3)}+x_{1,3}^{(2,3)}+x_{3,1}^{(2,3)}+x_{3,4}^{(2,3)}+x_{4,3}^{(2,3)}+$$

$$+x_{3,2}^{(1,4)}+x_{3,2}^{(1,4)}+x_{3,1}^{(1,4)}+x_{1,3}^{(1,4)}+x_{3,4}^{(1,4)}+x_{4,3}^{(1,4)}+$$

$$+x_{3,2}^{(3,4)}+x_{2,3}^{(3,4)}+x_{3,1}^{(3,4)}+x_{1,3}^{(3,4)}+x_{3,4}^{(3,4)}+x_{4,3}^{(3,4)}+$$

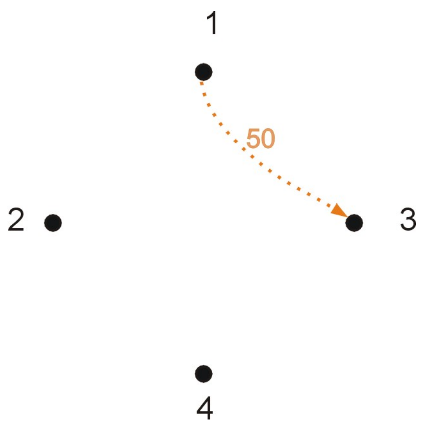
$$+x_{3,2}^{(3,4)}+x_{2,3}^{(3,4)}+x_{3,1}^{(3,4)}+x_{1,3}^{(3,4)}+x_{3,4}^{(3,4)}+x_{4,3}^{(3,4)}$$

je najmenšie.

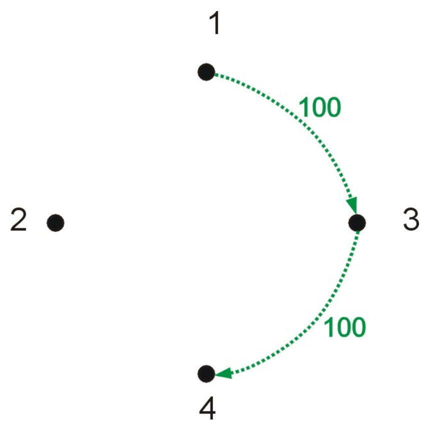
Riešením pomocou programu Maple sú komodity : $x^{(1,3)}$ (Obr. 3) , $x^{(1,4)}$ (Obr. 4), $x^{(2,3)}$ (Obr. 5), $x^{(2,4)}$ (Obr. 6), $x^{(3,4)}$ (Obr. 7), pre ktoré je:

$x_{1,3}^{(1,3)}=50$, $x_{2,3}^{(2,3)}=50$, $x_{1,3}^{(1,4)}=100$, $x_{2,3}^{(2,4)}=110$, $x_{3,4}^{(3,4)}=50$, $x_{3,4}^{(3,4)}$, $x_{3,4}^{(1,4)}=100$, $x_{3,4}^{(2,4)}=110$.

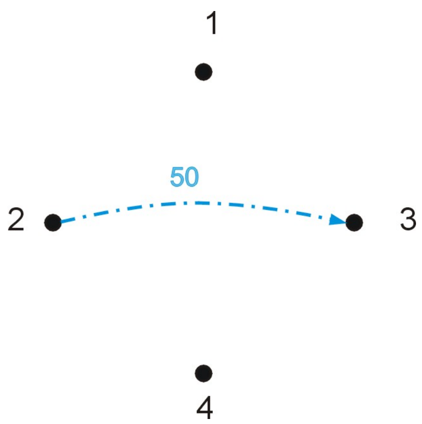
Riešenie je súhrne znázornené grafom podľa Obr. 8.



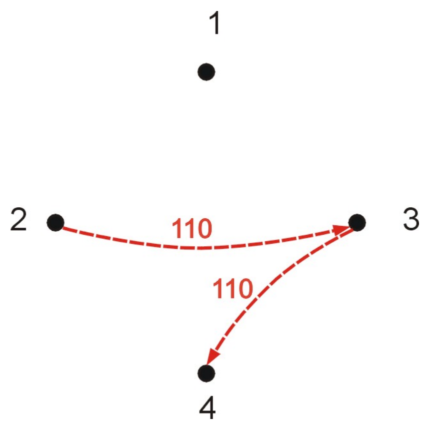
Obr. 3



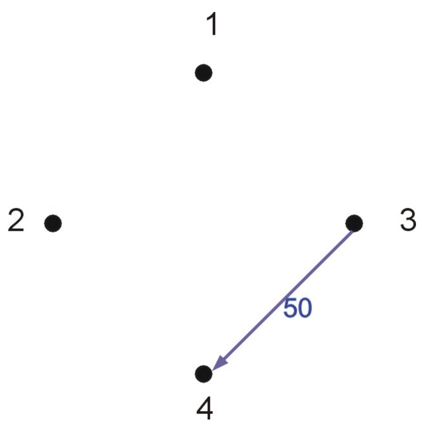
Obr. 4



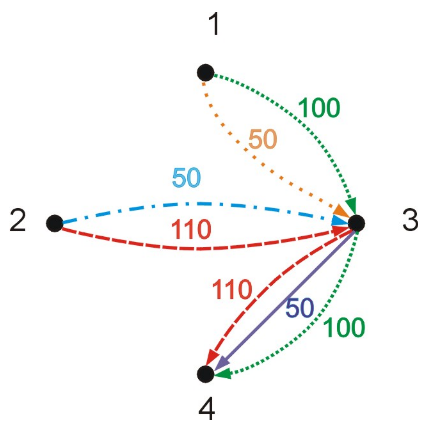
Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7



Obr. 8

4. **Príklad 2**

Daný je graf dopravnej siete G maticou susednosti A a graf H požiadaviek na prepravu daný maticou susednosti B. Nech

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}, \quad \text{a} \qquad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}0&0&0&140\\0&0&0&130\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Určíme minimálny počet vozidiel (autobusov) s kapacitou k=40 osôb potrebných na pokrytie požiadaviek pre prepravu, a to riešením úlohy rovníc (2) metódou LP a metódou ILP. Výsledky porovnáme.

Riešenie:

Najskôr zostrojíme rovnice a nerovnice podmienok:

Rovnice (2a) majú tvar:

$$x_{2,1}^{(1,4)} + x_{2,3}^{(1,4)} - x_{1,2}^{(1,4)} - x_{1,3}^{(1,4)} = 0\,,$$

$$x_{3,1}^{(1,4)} + x_{3,2}^{(1,4)} + x_{3,4}^{(1,4)} - x_{1,3}^{(1,4)} - x_{2,3}^{(1,4)} - x_{4,3}^{(1,4)} = 0$$

$$x_{1,2}^{(2,4)} + x_{1,3}^{(2,4)} - x_{2,1}^{(2,4)} - x_{3,1}^{(2,4)} = 0$$

$$x_{3,1}^{(2,4)} + x_{3,2}^{(2,4)} + x_{3,4}^{(2,4)} - x_{1,3}^{(2,4)} - x_{2,3}^{(2,4)} - x_{4,3}^{(2,4)} = 0$$

Rovnice (2b) majú tvar:

$$x_{1,2}^{(1,4)} + x_{1,3}^{(1,4)} - x_{2,1}^{(1,4)} - x_{3,1}^{(1,4)} = 140$$

$$x_{2,1}^{(2,4)} + x_{2,3}^{(2,4)} - x_{1,2}^{(2,4)} - x_{3,2}^{(2,4)} = 130$$

Nerovnice (2c) majú tvar:

$$x_{2,1}^{(1,4)} - x_{2,1}^{(2,4)} - 40y_{2,1} \le 0$$

$$x_{1,2}^{(1,4)} - x_{1,2}^{(2,4)} - 40y_{1,2} \le 0$$

$$x_{1,3}^{(1,4)} - x_{1,3}^{(2,4)} - 40y_{1,3} \le 0$$

$$x_{4,3}^{(1,4)} - x_{4,3}^{(2,4)} - 40y_{4,3} \le 0$$

$$x_{3,1}^{(1,4)} - x_{3,1}^{(2,4)} - 40y_{3,1} \le 0$$

$$x_{3,2}^{(1,4)} - x_{3,2}^{(2,4)} - 40y_{3,2} \le 0$$

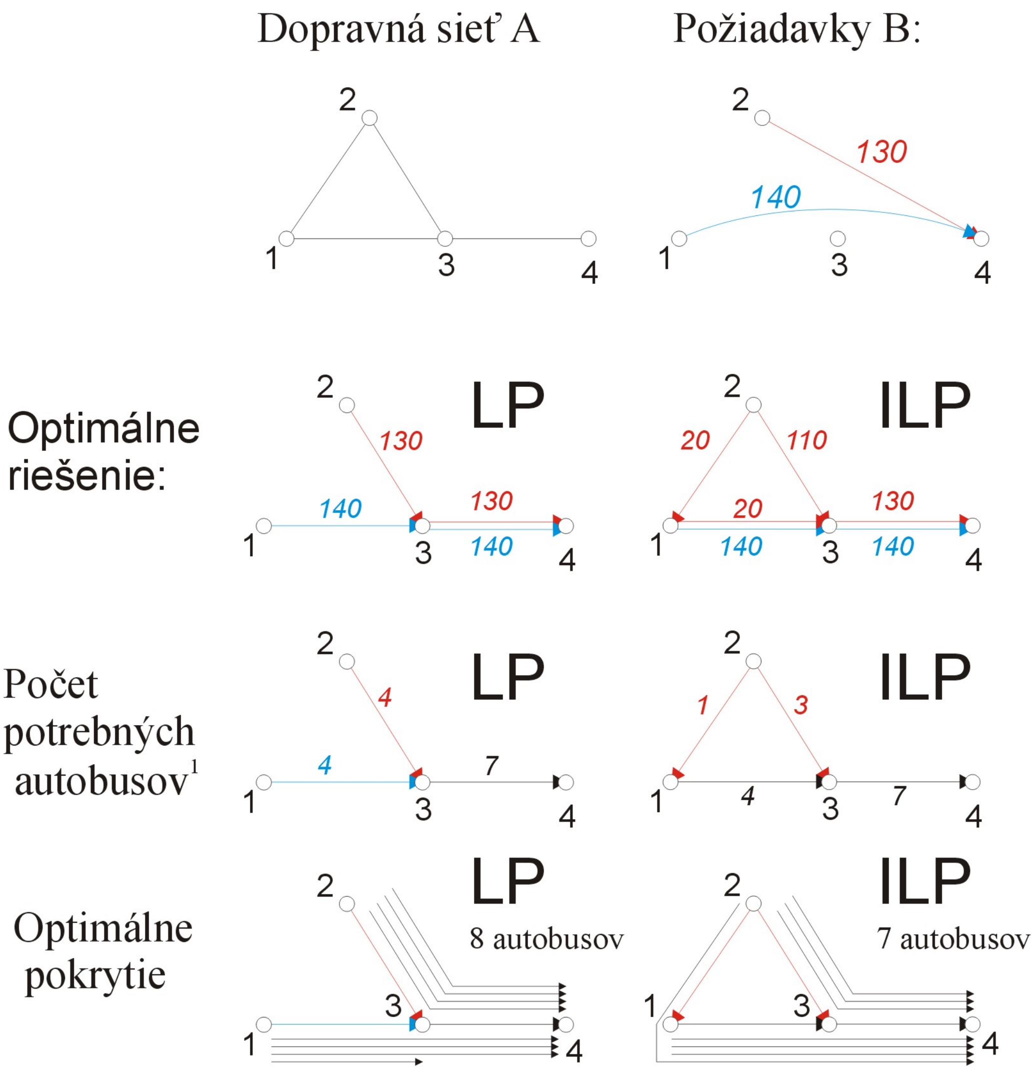
$$x_{2,3}^{(1,4)} - x_{2,3}^{(2,4)} - 40y_{2,3} \le 0$$

$$x_{3,4}^{(1,4)} - x_{3,4}^{(2,4)} - 40y_{3,4} \le 0$$

Účelová funkcia, ktorej minimum budeme hľadať má tvar:

$$F = 40y_{1,2} + 40y_{1,3} + 40y_{2,1} + 40y_{2,3} + 40y_{3,1} + 40y_{3,2} + 40y_{3,4} + 40y_{4,3}\,.$$

Výpočet pomocou programu Maple je znázornený na Obr. 9.



[1] kapacita autobusu -40 pasažierov

Obr. 9

5. Záver

Táto úloha je úlohou celočíselného lineárneho programovania. Z teórie optimalizácie je známe, že táto úloha je NP-ťažká. Ukážku správnosti formulovania optimalizácie sme uviedli na jednoduchšom príklade. V prípade väčšieho počtu uzlov grafu sa dá pomocou výpočtovej techniky hľadať riešenie, ktoré by bolo veľmi blízko optimálnemu riešeniu. Model optimalizácie, ktorý sme vypracovali, je flexibilný a pridanie dodatočných podmienok dáva nové výsledky, ktoré je možno posudzovať aj z hľadiska ďalších aspektov, napríklad s ekonomickými nákladmi na prepravu. Ďalšie možné zlepšovanie tohto modelu je v určovaní liniek, obmedzovaní kapacity jednotlivých liniek.

Literatúra

[1] PALÚCH, S.: *Teória grafov,* Žilinská univerzita v Žiline, 2001, ISBN 80-7100-874-5

[2] SUROVEC P.: *Tvorba systému mestskej hromadnej dopravy*, Žilinská univerzita v Žiline, 1999, 80-7100-586-X

[3] SUROVEC P., STACHO M.: *Dopravná obsluha kraja prímestskou autobusovou dopravou* 4. medzinárodná konferencia o verejnej osobnej doprave , zborník prednášok, Bratislava, Dom techniky ZSVTS, 2000. -S. 23-30, ISBN 80-233-0458-5.

[4] http://www.gnu.org/software/glpk

[5] STACHO M, *Optimalizácia cestnej prímestskej osobnej dopravy,* Dizertačná práca, Žilinská univerzita v Žiline, 2006

[6] SUROVEC, P. a kol: Socio-ekonomické dáta v prognóze a modelovaní dopravy pri napĺňaní ekonomickej funkcie regiónu. Grantový projekt VEGA MŠ SR a SAV č. 1/0344/08, Žilinská univerzita v Žiline, FPEDAS, 2008

TECHNICKÉ APLIKACE A MATEMATICKÉ MODELY VE VÝUCE MATEMATIKY

František Bubeník[1]

Abstrakt:
Příspěvek se zabývá problematikou zařazení technických aplikací ve výuce matematiky na FSv ČVUT Praha, efektivností a vhodností jejich výběru do výuky a do učebních textů.

1. Obecná charakteristika problematiky

Matematika na fakultě stavební, stejně jako na všech vysokých školách technického zaměření, patří mezi základní teoretické předměty v systému předmětů zařazených ve studijních programech a je to významný předmět v úvodu studia.

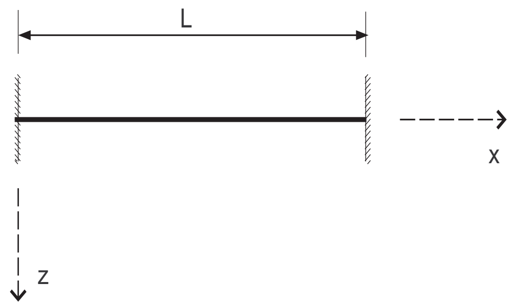
V základních kurzech matematiky je zařazen, mimo jiné, obvyklý základní kalkulus z různých partií matematiky. Na katedře matematiky stavební fakulty se už dlouhou dobu zabýváme otázkou jaké aplikační úlohy a v jaké míře je vhodné zařazovat do výuky základních kurzů matematiky. Na tuto otázku není jednoznačná odpověď.

Vzhledem k diverzifikaci středních škol přicházejí studenti na stavební fakultu s rozdílnou úrovní znalostí z matematiky. Základní kalkulus je v prvním semestru teprve průběžně probírán a studenti nemají ještě dostatečné znalosti ze studovaného oboru v profilových předmětech, tedy aplikační úlohy většinou v předmětu Matematika 1 zařazovány nejsou.

Ve druhém semestru je už vhodné zařazovat problémově orientované úlohy, aby se studenti mohli lépe orientovat v aplikovatelnosti probíraných partií matematiky. V předmětu Matematika 2 jsou probírány jako hlavní partie: integrální počet funkcí jedné reálné proměnné, funkce více proměnných a obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu. Tyto partie poskytují možnosti pro různé typy aplikačních úloh.

1.1. Vybrané aplikace

Na ukázku si uveďme jednu z aplikačních úloh např. na užití určitého integrálu, se kterou se studenti setkávají při vyšetřování průhybu nosníků. Uvažujme nosník délky *L*. Zatížení i průhyb jsou považovány za kladné směrem dolů, jak je znázorněno na obr. 1. Průhyb je znázorněn na obr. 2. Značení a orientace souřadnicových os, jak je uvedeno, je běžně užíváno v předmětech stavební mechaniky.



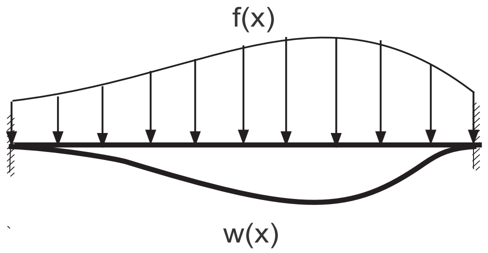
Obr. 1: Nosník na obou koncích vetknutý

[1] Katedra matematiky, FSv ČVUT Praha, Thákurova 7, Praha 6, bubenik@mat.fsv.cvut.cz

Mezi průhybem *w* a intenzitou spojitého zatížení *f* platí známý vztah,

$$EIw^{(4)}(x) = f(x), \; w(0) = 0, w(L) = 0, w^{'}(0) = 0, w^{'}(L) = 0,$$

který je detailně probírán v předmětech stavební mechaniky. Okrajové podmínky jsou vzhledem k zadání úlohy homogenní. Veličina *EI* je tzv. ohybová tuhost průřezu, tj. součin Youngova modulu pružnosti a momentu setrvačnosti průřezové plochy.



Obr. 2: Funkce popisující průhyb nosníku

Úloha je: ukázat, že pro každou funkci *u*, spojitou až do druhé derivace *u´´* a splňující dané okrajové podmínky na daném intervalu, platí rovnost

$$\int_0^L EIw^{''}(x)u^{''}(x)dx = \int_0^L f(x)u \;\; (x)dx.$$

Jde o jednoduché použití dvakrát integrace per partes. Rovnice je interpretována jako rovnost tzv. virtuální práce vnějších a vnitřních sil. Tato a další aplikace jsou zařazeny ve skriptech [1].

V citovaných skriptech jsou také uvedeny problémově orientované úlohy na obyčejné diferenciální rovnice. Ale do výuky je možné zařadit i jiné modelové úlohy vedoucí na vhodné typy diferenciálních rovnic, jako např.: Dráha přímočarého pohybu je popsána funkcí, např. v závislosti na kvadrátu času,

$$s(t) = \frac{1}{2}a(t)t^2 + v_0(t - t_0), t \geq t_0, t_0 > 0.$$

Úloha je: určit tuto funkci tak, pokud existuje, aby okamžitá rychlost v čase *t* byla rovna předepsané funkci *f* = *f(t)*. Tato úloha vede na lineární diferenciální rovnici 1. řádu s nekonstantními koeficienty

$$a^{'}(t)t^2 + 2a(t)t = 2(f(t) - v_0), \qquad a(t) = \frac{2}{t^2}\int f(t)dt - \frac{2v_0}{t},$$

jejímž řešením, určeným standardním postupem pro tento typ rovnic, je výše uvedená funkce *a* = *a(t)*. Volbou *f*, počátečních podmínek a v_0 je možné analyzovat různá řešení, včetně grafických výstupů, např. je možné dostat též dráhu volného pádu.

2. Závěr

Závěrem lze říci, že je užitečné zařazovat vybrané aplikace a problémově orientované úlohy do základních kurzů matematiky a to již od druhého semestru. Přitom s detailním technickým významem použitých pojmů se studenti seznámí v předmětech, jejichž náplní je příslušná problematika. Zařazené vybrané aplikace jsou ve skriptech [1].

Literatura

[1] BUBENÍK, F.: *Matematika 2.* Praha, Nakladatelství ČVUT, 2006, ISBN 80-01-03535-2.

BLENDED LEARNING VO VÝUKE GEOMETRIE V 1. ROČNÍKU BC ŠTÚDIA NA FPEDAS ŽU.

Viera Čmelková[1]

Abstrakt:

Skúsenosti a formy výučby predmetu Geometria v 1. ročníku Bc štúdia odborov cestná doprava, vodná doprava a poštové technológie na Fakulte prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov Žilinskej univerzity v Žiline s podporou elektronických systémov a zdrojov.

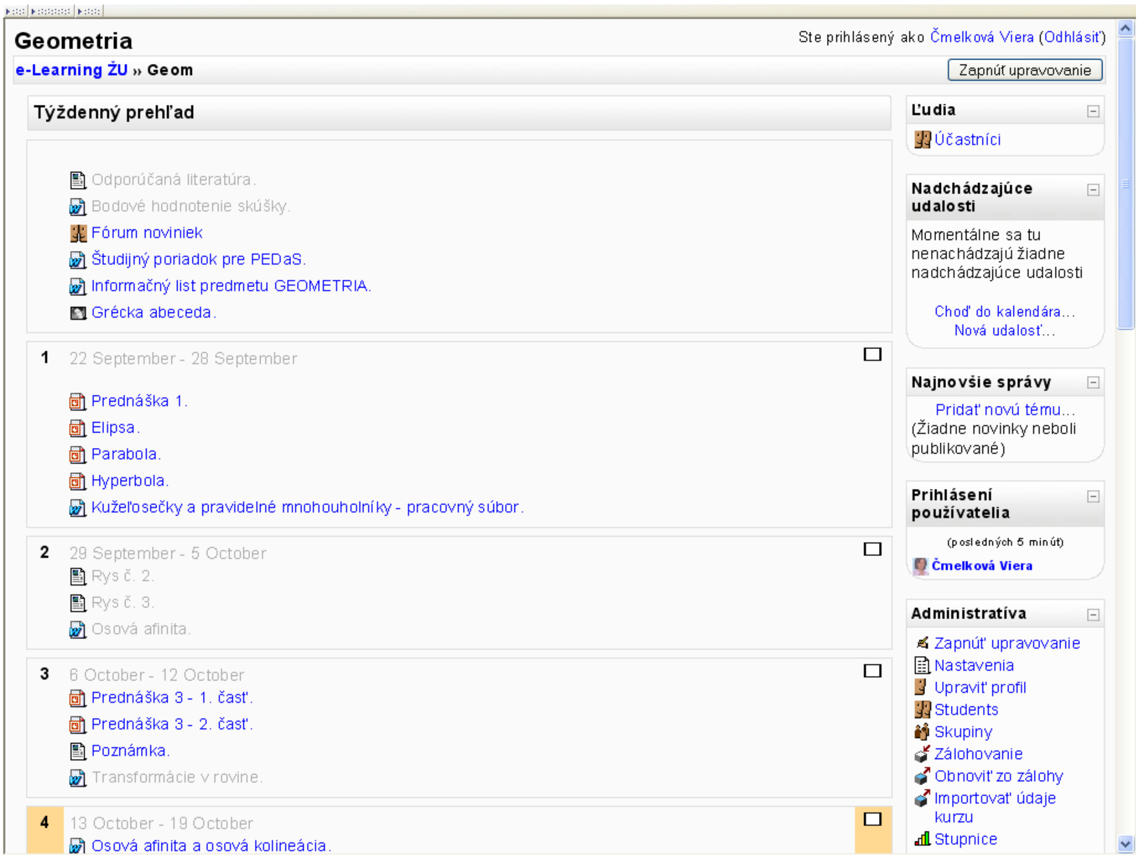
1. Úvod

Blended learning, ako je z názvu zrejmé, spája v sebe výhody osobného kontaktu so študentom s výhodami elektronickej podpory vzdelávania. Elektronické zdroje umožňujú študentom, tak isto ako aj študijná literatúra, kedykoľvek siahnuť po študijnom zdroji, prípadne sa dopredu pripraviť na prednášku, niektorým sa však e-zdroj zdá byť modernejší. V príspevku sa zameriavam na moje osobné skúsenosti s elektronickou podporou výučby, konkrétne u študentov 1. ročníka bakalárskeho štúdia odborov cestná doprava, vodná doprava a poštové technológie na Fakulte prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov Žilinskej univerzity v Žiline.

2. Školský e-learningový program, či vlastná web stránka?

Na e-komunikáciu so študentmi používam školský informačný systém VZDELÁVANIE, v rámci ktorého je implementovaný program MOODLE. Úvodná stránka kurzu Geometria je ilustrovaná na obr. 1. Oproti e-komunikácii so študentmi cez vlastnú web stránku tu vidím viacero výhod. Hlavná podľa mňa je v prepojení programu MOODLE so systémom VZDELÁVANIE (v ktorom sa prihlasujú na skúšky a sledujú svoje ohodnotenie) a v tom, že je to celoškolský systém, teda študenti majú rovnaké prostredie pre rôzne kurzy, nemusia si stále zvykať na iný vzhľad a inú organizáciu stránky. Moja práca je zjednodušená tiež, nemusím ovládať zložité programovacie jazyky a prostredia a využívam funkcie, ktoré tento program poskytuje. Najviac mi v práci napomáha funkcia „Záznamy o prihláseniach“, pomocou ktorej môžem u každého študenta sledovať jeho aktivitu, kedy naposledy pracoval v e-kurze, s ktorými zdrojmi pracoval, alebo sledovať štatistiky prihlásených študentov pre jednotlivé e-zdroje. Ďalšie výrazné plus vidím v interaktivite. Cez „Fórum noviniek“ je možné upozorniť študentov na nové e-zdroje, na termíny odovzdania rysov, resp. je možné komunikovať pomocou osobných správ, ktoré sa v prípade dlhšej neúčasti v e-kurze preposielajú na osobný e-mail, s konkrétnym študentom

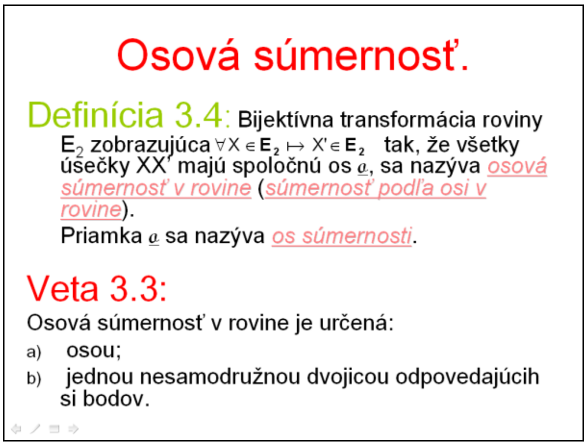
[1] Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky, Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov , Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 1, 010 26 Žilina, viera.cmelkova@fpedas.uniza.sk



Obr. 1: Úvodná stránka kurzu Geometria.

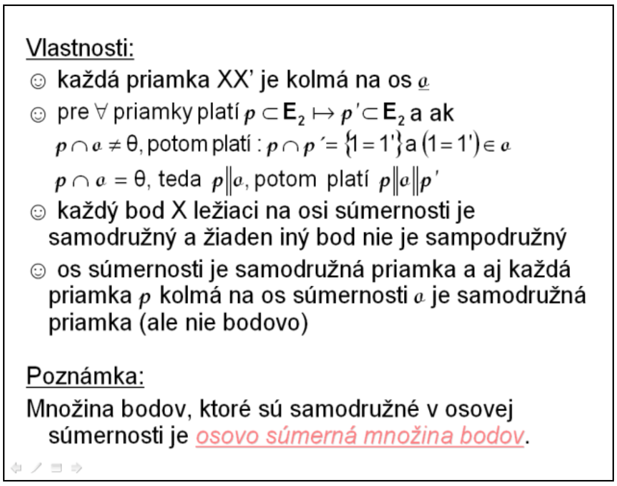
3. e-zdroj verzus skriptá

Ako už v úvode bolo naznačené, niekomu sa môže zdať, že nie je podstatný rozdiel medzi e-zdrojom a klasickými skriptami. To je pravda len v prípade neinteraktívneho e-zdroja, aj to len čiastočná. My na katedre zatiaľ, využívame najmä neinteraktívne e-zdroje, ale v dohľadnej dobe sa chystáme pripraviť aj interaktívne, ako sú animácie, resp. 3D applety.



Obr. 2: Osová súmernosť 1.

Ako vidno na obr. 1, väčšinu mojich e-zdrojov tvoria PPT prezentácie. Kladiem však veľký dôraz na účasť študentov na prednáškach. Mojou zaužívanou praxou je, že študenti prídu na prednášku s už vytlačenou PPT prezentáciou, ktorú potom na prednáške prezentujem. Príklad je na obr. 2 a 3. Je to časť prezentácie Zobrazenia v Euklidovej rovine. Je zrejmé,



Obr. 3: Osová súmernosť 2.

že v záujme zachovania dynamiky a pútavosti prednášky nie je možné dopodrobna v PPT prezentácii popisovať všetky vzťahy a súvislosti. Prezentácia je preto urobená len heslovito, ale ku každej definícii, vete, či vlastnostiam podávam vždy príklad či vysvetlenie na tabuľu. Tým, že študenti majú už dopredu prezentáciu vytlačenú sa predchádza pochybeniam pri opisovaní pojmov z tabule, šetrí sa čas a neotupuje sa ich pozornosť, len si dopisujú vysvetľujúce poznámky, resp. obrázky a príklady. Tu je výhoda oproti skriptám najmä v tom, že študenti nemajú zábrany dopisovať vlastné poznámky k hlavnému textu, lebo „skriptá sú vlastne kniha a do knihy sa nepíše“. Samozrejme nepodceňujem ani úlohu skrípt a učebného textu vo vyučovacom procese, a to hlavne v prvom ročníku, kedy ešte niektorí študenti nie sú naučení vybrať si z prednášky to podstatné, vo vyšších ročníkoch je zasa kladený dôraz na samostatnú prácu, čoho neoddeliteľnou súčasťou je aj samoštúdium literatúry. Pri výučbe sa my, pedagógovia, samozrejme snažíme vyberať príklady také „aby pekne vyšli“, čo napr. v matematike nie je problém, každý si z tabule opíše rovnaké zadanie.

Obr. 4: Zadania na prednášku.

V geometrii však nie je možné obkresliť si z tabule zadanie úplne presne, a potom študenti nemajú v zošite narysovaný obrázok taký, aký bol mojim zámerom, aby bol čo najnázornejší k danej téme. Ďalšou mojou dôležitou pomôckou pri výučbe sú preto zadania príkladov, ktoré umiestnim do kurzu Geometria, väčšinou vo formáte .doc, alebo .pdf, či .jpg, študenti si ich vytlačia a na prednáške rysujú všetci do rovnakého zadania, čím dosiahnem želaný cieľ, pozri obr. 4.

4. Záver

Zatiaľ je teda náš blended learning neinteraktívny, dalo by sa povedať „v plienkach“. Interaktívnym sa stáva až účasťou študentov na prednáškach, ale jednoznačne študentom i nám uľahčuje prácu a šetrí čas. Od zámeru doplniť paletu e-zdrojov o animácie a 3D applety očakávam najmä lepšiu názornosť daných tém, lepšie pochopenie vzťahov medzi jednotlivými objektmi a väčšiu interaktivitu.

Literatúra

[1] Vzdelávanie. [online]<http://vzdelavanie.uniza.sk/vzdelavanie/>

APLIKÁCIA PROGRAMOVÉHO PROSTREDIA MATLAB VO VÝUČBE PRÍRODOVEDNÝCH PREDMETOV

Erika Fechová[1]

Abstrakt:
Príspevok sa zaoberá možnosťou využitia programového softvéru Matlab vo vyučovacom procese prírodovedných predmetov ako sú matematika, fyzika a chémia. Vhodnosť použitia Matlabu je demonštrovaná pri riešení úlohy z predmetu fyzika a to pri riešení diferenciálnych rovníc druhého radu a vykresľovaní časových závislosti.

1. Úvod

Najvýraznejším znakom súčasnosti je implementácia informačno-komunikačných technológií (IKT) do každodenného života ľudí. Tieto zmeny ovplyvňujú nie len sféru súkromnú (využívanie voľného času, komunikácia) a pracovnú, ale zasahujú aj do edukačného procesu. Jednou z najdôležitejších úloh v oblasti vzdelávania je vypracovanie takých programov a metodík, pri ktorých by sa počítače stali bežnými, normálnymi pracovnými nástrojmi učiteľa a súčasne by neeliminovali rozvoj tvorivého myslenia študenta. V súčasnosti sa na tému využívania počítačov vo vyučovacom procese diskutuje veľmi často na rôznych úrovniach. Ak by sme mali zhrnúť výsledky týchto diskusií, tak by sme mohli povedať, že počítače vytvárajú spoľahlivé a príťažlivé prostredie pre učenie, poskytujú pozitívnu spätnú väzbu, pomáhajú vytvoriť úhľadný bezchybný text, rešpektujú individuálne požiadavky, tempo, rýchlosť a zručnosť, dovoľujú vrátiť sa späť k problému a začať alebo ukončiť prácu v rôznych miestach, pomáhajú v učení žiakov so špecifickými poruchami učenia a handicapovaným žiakom, sprístupňujú bohaté zdroje informácií, zrozumiteľne prezentujú zložité myšlienkové postupy a vzťahy pomocou grafiky, ponúkajú prostredie pre rozvoj myslenia žiakov [1].

V nasledujúcej časti príspevku je na príklade riešenia úlohy prezentovaná možnosť zefektívniť výučbu predmetu Fyzika pomocou počítačovej podpory programu Matlab.

2. Program Matlab

Názov Matlab vznikol z anglického MATrix LABoratory. Pôvodne bol určený pre operačný systém Unix a táto skutočnosť sa aj v prostredí OS Windows prejavuje vo veľmi jednoduchom komunikačnom rozhraní – príkazovom riadku. Matlab predstavuje vysoko výkonný jazyk pre technické výpočty. Integruje výpočty, vizualizáciu a programovanie do jednoducho použiteľného prostredia [2]. Ide o interaktívny systém s množstvom zabudovaných funkcií, ktorého základným dátovým typom je pole. Umožňuje relatívne ľahké riešenie mnohých technických problémov, špeciálne takých, ktoré vedú na vektorovú alebo maticovú formuláciu, v oveľa kratšom čase ako riešenie v klasických programovacích jazykoch. Z didaktického hľadiska je to vhodný systém, pretože nevyžaduje zložité programovacie formule a po relatívne krátkom čase dokáže s nim pracovať aj začiatočník, no na druhej strane predstavuje silný nástroj pre skúsených používateľov. Obsahuje viac ako 500 jednoduchých aj zložitejších matematických funkcií implementovaných vo forme vysoko efektívnych algoritmov, z ktorých je možné zložiť ľubovoľné ďalšie funkcie. Skupiny funkcií hodiacich sa na

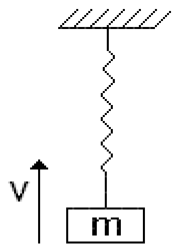
[1] Fakulta výrobných technológií TU Košice so sídlom v Prešove, Bayerova 1, 08001 Prešov, Slovenská republika, email: erika.fechova@tuke.sk

riešenie určitého okruhu problémov sa v Matlabe nazývajú Toolboxy. Ako samostatná nadstavba Matlab existuje Simulink. Umožňuje graficky sledovať priebehy dynamického chovania sa sledovaného systému. Matlab je teda možné použiť v prípade robustných výpočtov, pri spracovaní rozsiahlych dátových súborov, pri práci s veľkými maticami a v prípadoch, keď sa riešenie problému dá previesť na vektorové alebo maticové operácie.

3. Aplikácia Matlabu pri riešení fyzikálnej úlohy

Zadanie úlohy: Závažie hmotnosti $m=1kg$ je zavesené na pružine. Po náraze zdola sa začne pohybovať. V prvom okamžiku pohybu je jeho rýchlosť $v=1m.s^{-1}$. Tuhosť pružiny je $k=0,5$. Popíšte dráhu a rýchlosť pohybu závažia a vykreslite ich časovú závislosť.

Riešenie: Mechanickým kmitavým pohybom alebo mechanickým kmitaním nazývame taký mechanický pohyb hmotného bodu (telesa), pri ktorom hmotný bod je viazaný na istú tzv. rovnovážnu polohu a to tak, že neprekročí konečnú vzdialenosť od tejto polohy. Ak je časový priebeh kmitavého pohybu pravidelný, nazývame ho periodickým kmitavým pohybom. Najjednoduchším periodickým kmitavým pohybom je pohyb, ktorý sa realizuje účinkom sily, ktorá je lineárnou funkciou výchylky hmotného bodu z rovnovážnej polohy. Kmitajúci hmotný bod (teleso) nazývame pojmom lineárny oscilátor [3].
Príkladom lineárneho oscilátora je aj pohyb závažia hmotnosti *m* zaveseného na pružine tuhosti *k* (obr. 1).



Obr. 1: Lineárny harmonický oscilátor

Závažie sa nachádza v rovnovážnej polohe, nehýbe sa. Po náraze sa táto rovnováha naruší. Prechodom závažia rovnovážnou polohou sa bude pružina deformovať (predlžovať alebo stláčať). Na kmitajúce závažie pôsobí sila *F*, ktorá je v každom okamihu priamo úmerná výchylke z rovnovážnej polohy a je orientovaná proti smeru výchylky, teda platí:

$$F = -kx \tag{1}$$

kde *k* je konštanta úmernosti, ktorá závisí od elastických vlastnosti pružiny a nazývame ju tuhosť pružiny a *x* je výchylka z rovnovážnej polohy.

Podľa 2. Newtonovho zákona môžeme pre silu pôsobiacu na teleso hmotnosti *m* písať:

$$F = m.a = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2}$$

Z rovnosti síl z rovníc (1) a (2) vyplýva:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{3}$$

Rovnica (3) je diferenciálnou rovnicou druhého radu, ktorej analytické riešenie si vyžaduje poznatky z teórie .riešenia diferenciálnych rovníc.

Pre vyšetrenie časovej závislosti dráhy a rýchlosti pohybu závažia pri kmitavom pohybe využijeme Matlab. Pri riešení diferenciálnej rovnice vyššieho rádu v Matlabe je nutné si uvedomiť, že každú diferenciálnu rovnicu vyššieho rádu je možné previesť na ekvivalentnú sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu so známymi začiatočnými podmienkami v tvare:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), y(t_0) = y_0$$

Pre riešenie našej úlohy je teda vhodné diferenciálnu rovnicu druhého rádu (3) previesť na sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu (4) v tvare:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}x \end{aligned} \tag{4}$$

Prvým krokom riešenia úlohy je vytvorenie funkcie určujúcej deriváciu funkcie v čase. Táto funkcia odpovedá funkcii $f(t, y)$ vo všeobecnom tvare. Zápis tejto funkcie pre našu sústavu rovníc (4) má tvar:

```
function dxdt=dif_rce(t,x)
  k=0.5;
  m=1;
  dxdt=zeros(2,1);
  dxdt=[x(2);-k/m*x(1)];
```

Základnou štandardnou funkciou pre riešenie diferenciálnych rovníc je funkcia *ode45*, ktorej syntax má tvar:

$$[t, y] = ode45('nazov\_funkcie', casovy\_interval, pociatocne\_podmienky)$$

kde *nazov_funkcie* je odkaz na funkciu popisujúcu sústavu diferenciálnych rovníc, parameter *casovy_interval* predstavuje vektor s dvoma prvkami – počiatočný čas riešenia t_0 a konečný čas riešenia t, parameter *pociatocne_podmienky* predstavuje vektor počiatočných podmienok y_0 tak, že platí $y(t_0) = y_0$.

Výstupom funkcie *ode45* sú dva parametre:

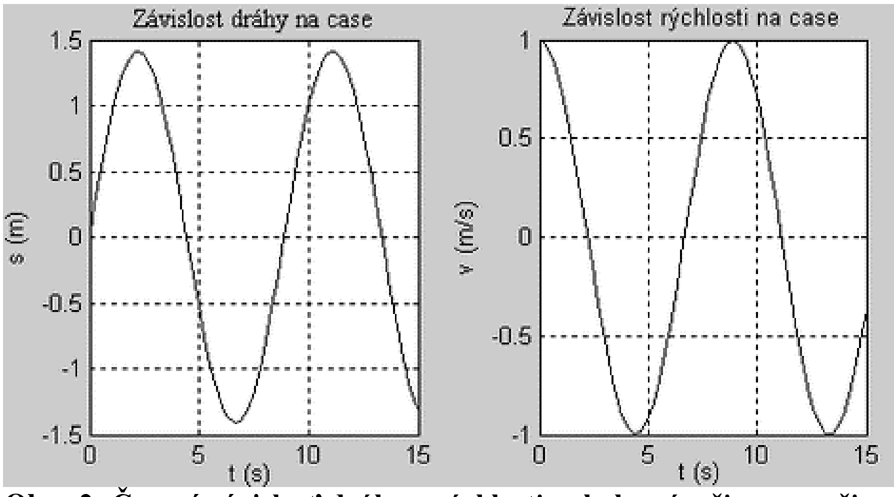
t - vektor, ktorý obsahuje časové okamžiky, v ktorých sú určené hodnoty riešenia

y - matica, ktorá obsahuje vlastné riešenia, kde počet riadkov matice y odpovedá počtu riadkov t, počet stĺpcov odpovedá počtu rovníc riešenej sústavy.

Na vykreslenie časovej závislosti dráhy a rýchlosti od času použijeme zápis programu v Matlabe, kde zadáme vstupné parametre úlohy, čas pohybu závažia a vlastnosti vykreslených závislosti dráhy a rýchlosti od času:

```
m=1;
k=0.5;
s0=0;
v0=1;
t_konec=15;
[t,x]=ode45(@dif_rce,[0,t_konec],[s0,v0]);
s=x(:,1);
v=x(:,2);
subplot(1,2,1);
plot(t, s, 'black');
grid on;
title('Zavislost drahy na case');
xlabel('t (s)');
ylabel('s (m)');
subplot(1,2,2);
plot(t, v, 'black');
grid on;
title('Zavislost rychlosti na case');
xlabel('t (s)');
ylabel('v (m/s)');
```

Výsledkom spustenia programu je vykreslenie časovej závislosti dráhy a rýchlosti pohybu závažia na pružine (obr. 2):



Obr. 2: Časová závislosť dráhy a rýchlosti pohybu závažia na pružine.

4. Záver

Prítomnosť informačno - komunikačných technológií na vyučovaní má pozitívny vplyv na efektívnosť vyučovacieho procesu a žiaci ich prijímajú veľmi kladne Na základe takto získaných výsledkoch môžme konštatovať, že vhodnou kombináciou klasických metód vyučovania a zavádzaním nových prvkov využívajúcich informačno-komunikačné prostriedky, je možné uľahčiť a skvalitniť edukačný proces.

Príspevok vznikol s podporou projektu Vega č. 1/0345/08.

Literatúra

[1] KALAŠ, I.: *Čo ponúkajú informačné a komunikačné technológie iným predmetom.* Bratislava: ŠPÚ, 2001.

[2] DUŠEK, F.: *MATLAB a SIMULINK – úvod do používáni*. Univerzita Pardubice, 2002. ISBN 80-7194-273-1.

[3] HAJKO, V., DANIEL-SZABÓ, J.: *Základy fyziky*. Bratislava: VEDA, 1980.

OPCIE AKO NÁSTROJ INVESTIČNÉHO ROZHODOVANIA

Danuše Guttenová[1], Mária Vojteková[2]

Abstrakt:

Obrovský nárast využívania opčného obchodovania daný globalizovaným prostredím kapitálových trhov bol umožnený vďaka matematickým modelom oceňovania finančných opcií. Článok načrtáva podstatu binomického a Black-Scholesovho modelu a myšlienku reálnych opcií ako aplikácie finančných opcií v oblasti hodnotenia strategických investícií.

1. Finančné opcie

1.1. Úvod

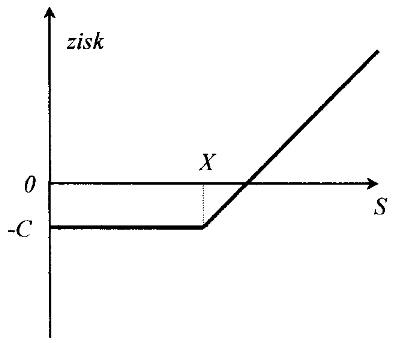
Obchodovanie bolo odjakživa spojené s neistotou a súčasnou snahou nájsť prostriedky, ako vylúčiť negatívne dopady vývoja situácie. Prvé zmienky o formách zaistenia, ktoré majú charakter opčného obchodovania nachádzame už v starovekom Grécku. Slovo opcia pochádza z latinského „*optio*“ a znamená možnosť voľby. V oblasti finančných trhov je dnes používaný pojem opcia pre jednu z foriem finančných derivátov, čo sú finančné kontrakty, ktorých cena je odvodená od aktuálnych cien podkladových aktív (akcie, dlhopisy, meny, komodity, ...) na promptnom trhu.

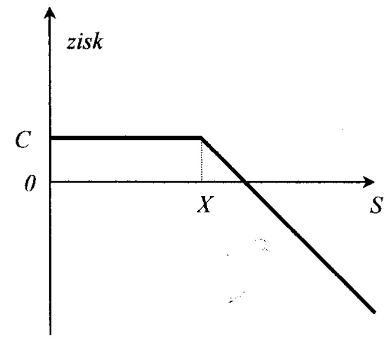
Opcia je obchodovateľný cenný papier. Zakúpením opcie získava jej majiteľ právo, ale nie povinnosť, kúpiť alebo predať podkladové aktívum za vopred dohodnutú cenu vo vopred dohodnutom termíne. Kúpna opcia (call opcia) zaisťuje majiteľovi právo na nákup podkladového aktíva. Predajná opcia (put opcia) dáva vlastníkovi právo predať predmetné aktívum. Majiteľ opciu uplatní len v prípade, ak je to preňho výhodné. Vypisovateľ opcie sa pasívne podrobuje rozhodnutiu majiteľa, je v tzv. krátkej pozícii. Majiteľ opcie je v tzv. dlhej pozícii, rozhoduje sa, či zakúpenú opciu uplatní v dohodnutom termíne T podľa toho, či je to preňho výhodné. V prípade call opcie majiteľ zakúpi podkladové aktívum za vopred dohodnutú cenu, tzv. realizačnú cenu X, len v prípade, že podkladové aktívum je dostupné v danom čase na trhu za cenu S_T ak $S_T > X$; v opačnom prípade, tj. ak $S_T \le X$ opcia prepadá bez náhrady a majiteľ opcie kupuje priamo na trhu za výhodnejšiu cenu.

Právo dané vlastníctvom opcie realizovať len výhodný obchod má svoju hodnotu, ktorá je označovaná ako opčná prémia alebo cena opcie. Výška opčnej prémie je vlastne trhovou hodnotou, za ktorú sa opcia predáva a vzniká ako súčet tzv. vnútornej a časovej hodnoty opcie. Vnútorná hodnota opcie predstavuje čiastku, ktorú by kupujúci získal uplatnením opčného práva. Časová hodnota opcie zohľadňuje riziko možnej zmeny hodnoty podkladového aktíva od doby uzatvorenia opčného kontraktu do dátumu exspirácie, približovaním ktorého nelineárne klesá.

Najvyššou možnou stratou majiteľa je cena, ktorú zaplatil za opciu, zatiaľ čo jeho zisky môžu byť teoreticky neohraničené. Jedná sa o hru s nulovým súčtom, zisk majiteľa opcie je stratou vypisovateľa a naopak, ako vidno na obrázku:

[1] KKMaHI FPEDaS Žilinská univerzita, Univerzitná 1, 01026 Žilina, danuse.guttenova@fpedas.uniza.sk,
[2] KKMaHI FPEDaS Žilinská univerzita, Univerzitná 1, 01026 Žilina, maria.vojtekova@fpedas.uniza.sk,





Obr. 1: Long pozícia – call opcia **Obr. 2: Short pozícia – call opcia**

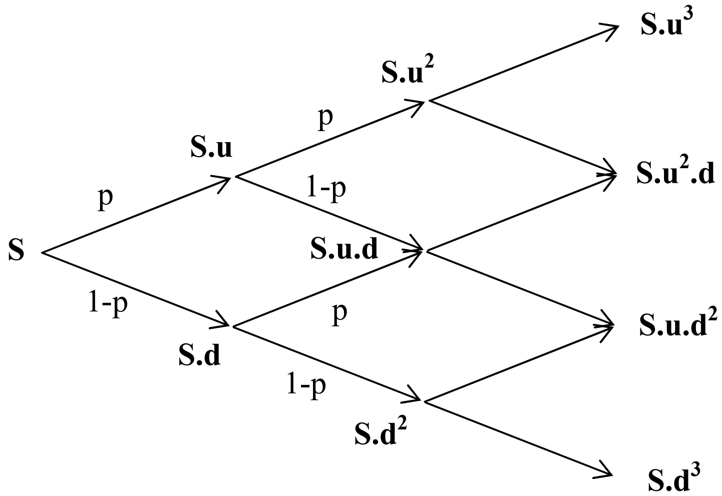
Využitie práva predať, či kúpiť podkladové aktívum za realizačnú cenu je možné v ktorýkoľvek deň do splatnosti, ak ide o tzv. americkú opciu. Ak je obchod uskutočniteľný len v deň exspirácie, opciu označujeme ako európsku.

Podstatným faktorom, ktorý ovplyvňuje hodnotu opcie je tak možná nestálosť cien podkladového aktíva, ktorá je označovaná pojmom volatilita. Býva určovaná buď z cien daného aktíva za dostatočne dlhé minulé obdobie, alebo je implicitne daná cenami opcií pre danú akciu na trhu.

1.2. Matematické modely

Pre ocenenie finančných opcií sú v praxi používané dva základné modely, ktoré sa líšia spôsobom delenia uvažovaného obdobia životnosti opcie. Modely sú platné za dodržania určitých predpokladov, ktoré sú podrobnejšie vysvetlené v použitej literatúre.

Binomický model – vychádza z predstavy diskrétneho rozdelenia doby do splatnosti na konečný počet n rovnako dlhých časových úsekov. V každom takto vzniknutom časovom období môže dôjsť s pravdepodobnosťou p buď k rastu vyjadrenom indexom u (up) alebo s pravdepodobnosťou $q = (1 - p)$ k poklesu d (down) hodnoty podkladového aktíva. Uvažujeme nemenné hodnoty indexov rastu u a poklesu d aj pravdepodobnosti p po celú dobu do vypršania opcie.



Obr. 3: Vývoj ceny *S* podkladového aktíva v priebehu troch období.

Vzorec pre výpočet hodnoty európskej opcie za n období, keď musíme uvažovať ďalšie možnosti, ktoré vzniknú opakovaným vetvením v každom časovom uzle, vedie na tvar:

$$V_C = \frac{1}{(1+r)^n} \cdot \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \cdot \max(Q,0), \tag{1}$$

kde za Q dosadzujeme výraz $Q_C = \left(S \cdot u^i \cdot d^{n-i} - X\right)$ v prípade kúpnych opcií,

$Q_P = \left(X - S \cdot u^i \cdot d^{n-i}\right)$ pre predajné opcie.

V každom uzle je uvažovaná hodnota diskontovaná bezrizikovou úrokovou mierou r. Pre opcie amerického typu je nutné postupovať binomickým stromom rekurentne späť.

K nárastu opčných obchodov došlo po roku 1973, kedy bola publikovaná práca ekonóma Myrona Scholesa zo Standfordskej univerzity a teoretického fyzika Fishera Blacka z Chicagskej univerzity o oceňovaní európskych opcií na akcie neprinášajúce dividendy v dobe do splatnosti. Ich prístup je označovaný za revolučný. Priniesol metódu uplatnenia parciálnych diferenciálnych rovníc v oceňovaní finančných derivátov. Východiskom je modelovanie stochasticky sa vyvíjajúcich cien akcie. Základným nástrojom ako opísať takýto náhodný vývoj ceny aktíva sú Markovove náhodné procesy. Je využitý tzv. Wienerov proces, ktorý sa napr. vo fyzike používa pod označením Brownov pohyb na modelovanie pohybu častice vystavenej nárazom molekúl prostredia, v ktorom sa pohybuje. Ide v podstate o odvodenie riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice opisujúcej vývoj ceny derivátu v závislosti od ceny akcie a od času ostávajúceho do exspirácie so zadanou okrajovou podmienkou. V súčasnosti už existujú ďalšie modely pre iné typy podkladových aktív.

Hodnota európskej opcie na akciu neprinášajúcu dividendu v dobe do splatnosti T je daná vzorcom

pre kupnú opciu

$$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2), \tag{2}$$

pre predajnú opciu

$$P = -S \cdot N(-d_1) + X \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(-d_2), \tag{3}$$

kde $d_1 = \dfrac{\ln(S/X) + \left(r + \sigma^2/2\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$, $\quad d_2 = \dfrac{\ln(S/X) + \left(r - \sigma^2/2\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$.

Hodnoty $N(d)$ sú hodnoty distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia

$$N(d) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

2. Reálne opcie

2. 1. Základné pojmy

Rozvoj teoretických modelov ohodnocovania finančných opcií viedol k ich aplikácii v oblasti hodnotenia investícií a určovania hodnoty podniku. V roku 1977 profesor

Stewart Myers ako prvý vo svojom článku definoval pojem reálne opcie na rozšírenie, odloženie a opustenie projektu na základe nových informácií súvisiacich s investičným projektom. Doteraz najrozšírenejšou metódou na posudzovanie hodnoty projektu je metóda čistej súčasnej hodnoty označovaná *NPV*, ktorá predstavuje rozdiel súčasnej hodnoty všetkých budúcich príjmov plynúcich z projektu a súčasnej hodnoty výdavkov vynaložených na investičný projekt, čo je možné vyjadriť vzorcom:

$$NPV = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+r)^t}, \tag{4}$$

T....... doba životnosti projektu v rokoch,
r......... diskontná sadzba,
CF_t .... finančné toky v jednotlivých rokoch *t*, kde $t = 1,2,\ldots,T$.

Nevýhodou tohto prístupu je, že nezahŕňa do hodnoty projektu možnosť aktívnych zásahov manažmentu do behu projektu počas doby jeho životnosti, riziko spojené s projektom sa premieta len do zvolenej diskontnej sadzby a teda rizikovejšie projekty bývajú spravidla zamietnuté, pretože ich čistá súčasná hodnoty bude nulová alebo záporná. V reálne opčnej metodológii je hodnota každej investície považovaná za derivát vstupných kapitálových výdavkov, plánovaných príjmov, času a rizika súvisiacich s projektom. Na výpočet hodnoty reálnej opcie zakotvenej v projekte sa za určitých podmienok používajú, podľa typu opcie, rovnaké postupy ako na výpočet finančných opcií. Hodnota projektu je potom daná vzťahom:

$$NPV^* = NPV + \textit{opčná hodnota},$$

teda čistá súčasná hodnota zvýšená o hodnotu opcie, ktorá je ohodnotením flexibility.

Metodológia je rozvíjaná a umožňuje zahrnúť situácie rozšírenia, zúženia, či opustenia projektu, prerušenia, rozfázovania a zámeny projektov, prípadne kombinácie základných typov a definovanie tzv. zložených opcií.

Parametre určujúce hodnotu reálne opcie v uvedených modeloch:

Premenná	Finančné opcie	Reálna opcia – vstupujúca premenná
S	Cena akcie	PV(CF) – súčasná hodnota očakávaných CF projektu, bez počiatočných investícií
X	Realizačná cena	IN – súčasná hodnota investície potrebnej na realizáciu projektu
σ	Smerodajná odchýlka	σ - volatilita budúcich CF projektu
r	Bezrizikový výnos	
T	Čas do expirácie	t – obdobie, kedy je možné investíciu realizovať

Hlavnými oblasťami s vysokou volatilitou, kde sú reálne opcie vo svete využívané, sú: ťažba prírodných zdrojov (ropa, uhlie, zemný plyn, nerasty,...) a ich primárne spracovanie, na ne nadväzujúca energetika, doprava, telekomunikácie, biotechnológie, farmaceutika ako i ďalšie oblasti výskumu a vývoja. Stanovenie volatility je osobitným problémom.

2.2. Zjednodušený príklad

Firma chce uviesť na trh nový typ elektronického prístroja, vývoj ktorého bude trvať tri roky s nákladmi 5 mil. ročne. Až potom sa rozhodne o výrobe, ktorá sa momentálne nejaví ako veľmi výhodná. Investície do zavedenia výroby by boli 100 mil. Sk. V nasledujúcich piatich rokoch je odhadovaný príjem 26 mil. ročne. Situácia na trhu je neistá, volatilita je vzhľadom na odvetvie odhadovaná na 0,71; uvažovaná je konštantná bezriziková úroková miera vo výške 5% a podniková diskontná miera 10%.

Riešenie:

$$NPV = \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+r)^t} = -5 - \frac{5}{1{,}1} - \frac{5}{1{,}1^2} - \frac{100}{1{,}1^3} + \frac{26}{1{,}1^4} + \frac{26}{1{,}1^5} + \frac{26}{1{,}1^6} + \frac{26}{1{,}1^7} + \frac{26}{1{,}1^8} = -14{,}76\ mil.$$

Na základe metódy *NPV* by bola investícia do výskumu zamietnutá.

Ak ale chápeme investíciu do výskumu ako opciu vyčkávania – jedná sa o call opciu európskeho typu, kedy za investíciu do výroby za 3 roky môžeme získať z predaja výrobku 26 mil. ročne po dobu 5 rokov, dostávame:

$$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2) = 74{,}05 \cdot 0{,}69 - 100 \cdot e^{-0{,}05 \cdot 3} \cdot 0{,}14 = 38{,}7\ mil.,$$

kde $d_1 = \dfrac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} = 0{,}4926$, $\qquad d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T} = \text{-}1{,}0663$.

Hodnota projektu: $NPV^* = NPV + C = -13{,}7 + 38{,}7 = 25\ mil.$

Investíciou do výskumu v hodnote 13,7 mil. Sk môžeme získať právo na budúce využitie výsledkov výskumu, ktoré má hodnotu 38,8 mil. Sk. Zahrnutie možnosti odložiť rozhodnutie o výrobe podľa situácie na trhu zvyšuje hodnotu projektu.

3. Záver

Reálne opcie vznikli na pôde USA, pretože veľký trh umožňoval ich aplikáciu na projektoch závislých na svetovo obchodovateľných komoditách. Do Európy sa reálne opcie šíria pomaly, viac menej ostávajú na pôdach univerzít. V Českej a Slovenskej republike sa reálne opcie prakticky využívajú pri hodnotení investícií v energetike, málo v ostatných odvetviach vzhľadom na problémy so stanovením volatility dané malým trhom. Ako jeden z dôvodov malej rozšírenosti vôbec je uvádzaná aj obťažnosť pochopenia podstaty a matematické nástroje odstrašujúce užívateľov.

Uplatnenie reálnych opcií v praxi je pomerne náročné, pričom hlavným problémom je ich identifikácia a stanovenie jednotlivých parametrov. Výpočet hodnoty reálnych opcií v súčasnosti zjednodušujú už hotové komerčné systémy, ale vhodný je aj všeobecne rozšírený Excel. Podstatná je filozofia reálne opčného prístupu, ktorá je určitým spôsobom uvažovania vidieť v riziku projektu príležitosť označovanú ako hodnotu flexibility projektu.

Metóda reálnych opcií sa stáva súčasťou výuky na ekonomických fakultách, ale v dobe rastúcej dynamiky a neistoty podnikateľského prostredia je vhodné s týmto spôsobom manažérskeho uvažovania oboznamovať v rámci výuky na vysokých školách všetkých absolventov.

Článok je súčasťou riešenia grantovej úlohy MŠ SR a SAV 1/4609/07 Investičné rozhodovanie v dopravnej infraštruktúre ako súčasť integrovaného manažérskeho systému orientovaného na hodnotu podniku, zodpovedný riešiteľ: doc. Ing. Viera Bartošová, PhD.

Literatúra

[1] AMBROŽ, A.: *Oceňování opcí*. Praha: C.H.Beck pro praxi, 2002. ISBN 80-7179-531-3.

[2] CIPRA, T.: *Matematika cenných papírů.* Praha: HZ, 2000. ISBN 80-86009-39-1.

[3] MELICHERČÍK, O.;OLŠAROVÁ, L.; ÚRADNÍČEK, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky.* Bratislava EPOS, 2005, ISBN 80-8057-651-3.

[4] SCHOLLEOVÁ, H.: *Hodnota flexibility*. Praha: C.H.Beck, 2007. ISBN 978-80-7179.

[5] ŠEVČOVIČ, D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov.* Dostupné na: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta.

KONFORMITA GAUSS-KRÜGEROVA ZOBRAZENÍ

Radek Hampl[1]

Abstrakt:
Příspěvek se týká problematiky konformity Gauss-Krügerova zobrazení. Ukazuje se, že toto zobrazení není ve své reálné podobě konformní a lépe je ho zmiňovat jako blízko-konformní zobrazení. A to zejména z pohledu globálních aplikací jako jsou projekce drah družic na zemský povrch, mapy hvězdné oblohy, apod.

1. Stručný pohled do historie vzniku Gauss-Krügerova zobrazení

Autorem zobrazení je C. F. J. Gauss, německý matematik a kartograf. Matematické základy zobrazení položil v letech 1821 – 1825, nicméně své zobrazení „uklidil do šuplíku“, neboť ho považoval jen za matematickou hříčku. Pod jeho taktovkou bylo také roku 1844 dokončeno mapování hannoverského království právě v tomto zobrazení! V roce 1855 Gauss umírá a matematické základy jím odvozeného a pro mapování hannoverska použitého zobrazení si bere s sebou do hrobu.

A až teprve po téměř sto letech Prof. Krüger, v roce 1919, původní Gaussovo dílo po matematické stránce dále rozpracovává. Od té doby urazilo zobrazení dlouhou cestu a nyní ho využívá většina států západní Evropy a je oficiálním zobrazením (ve své modifikaci UTM) používaným pro konstrukci vojenských map členských států NATO.

2. Klasifikace Gauss-Krügerova zobrazení

Jedná se o zobrazení elipsoidu (což je aproximace zemského tělesa) do roviny (mapy). Je klasifikováno jako konformní, válcové, v transverzální poloze. O transverzalitě zobrazení není sporu (osa „válce“ – viz. níže – je kolmá na osu rotace elipsoidu a leží zároveň v rovině rovníku). Klasifikace zobrazení coby válcového může však být diskutováno. Příčným řezem plochy, na kterou zobrazujeme a kterou pak rozvineme do roviny, není kružnice, ale elipsa (je jím základní poledník zobrazení). Nicméně Hojovec a Buchar ve svém článku ukázali, že toto zobrazení dává stejné výsledky, jako když zobrazíme konformně elipsoid na kulovou plochu a tu pak opět konformně (přes válcovou plochu) do roviny. Z tohoto pohledu lze na zobrazení nahlížet jako na válcové.

V následujících odstavcích mého článku se budu ale věnovat problému konformity zobrazení. K tomuto účelu je ale třeba nahlédnout jednak samotný důkaz konformity Gauss-Krügerova zobrazení a pak také způsob odvození zobrazovacích rovnic.

3. Izometrické souřadnice na elipsoidu

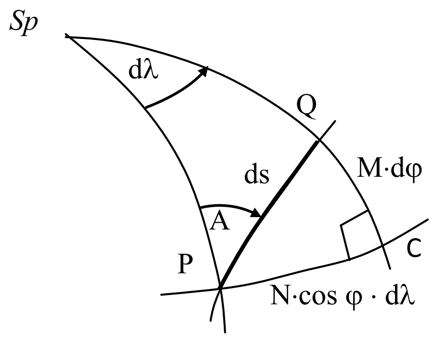
Při odvození zobrazovacích rovnic a také při provádění důkazu konformity studovaného zobrazení je vhodné zavést na elipsoidu tzv. izometrické souřadnice.

Obecně jsou izometrickými souřadnicemi α, β na libovolné ploše takové souřadnice, kterými lze délkový element ds geodetické čáry napsat ve tvaru:

$$ds^2 = f(\alpha,\beta)\cdot\left(d\alpha^2 + d\beta^2\right), \tag{1}$$

[1] VOŠ a SPŠ Varnsdorf, Mariánská 1100, 40747, Varnsdorf

kde funkce *f* je dána plochou (např. pro rovinu je $f(\alpha, \beta) = 1$). Izometrické souřadnice na dané ploše vytvářejí čtvercovou síť.



Obrázek 1

Obrázek 1 ukazuje geometrii situace na elipsoidu. Zeměpisné souřadnice φ, λ nejsou izometrické, protože na rotačním elipsoidu, vzhledem ke sbíhavosti poledníků, netvoří čtvercovou síť. A při položení $d\varphi = d\lambda$ vytváří elementární přírůstky zeměpisných souřadnic diferenciální lichoběžník. Pro délkový element *ds* geodetické čáry pak platí:

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi \cdot d\lambda^2 \tag{2}$$

Dále vytknutím $N^2.\cos^2 \varphi$ a zavedením

$$dq^2 = \frac{M^2}{N^2 \cos^2 \varphi} d\varphi^2 \tag{3}$$

pak dostáváme pro délkový element *ds* geodetické čáry výraz:

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(dq^2 + d\lambda^2\right) \tag{4}$$

Souřadnice q, λ jsou na rotačním elipsoidu souřadnicemi izometrickými a tvoří čtvercovou síť. Položíme-li $dq = d\lambda$, tvoří diferenciály elementární čtverec. Vzorec pro izometrickou šířku q odvodíme pomocí integrace (3).

4. Obecné tvary zobrazovacích rovnic

Pro další odvození je třeba poznamenat obecné tvary zobrazovacích rovnic Gauss-Krügerova zébrazení. Ve své teorii konformních zobrazení Gauss ukázal, že pokud využijeme pro odvození vztahu mezi souřadnicemi φ, λ na rotačním elipsoidu a rovinnými souřadnicemi X, Y jeden z následujících vzorců

$$\begin{aligned} X + iY &= f(q + i\lambda) \qquad & X + iY &= f(q - i\lambda) \\ X - iY &= g(q - i\lambda) \qquad & X - iY &= g(q + i\lambda) \end{aligned} \tag{5a, 5b}$$

pak jde skutečně o konformní zobrazení! Je třeba poznamenat, že souřadnice q, λ jsou izometrické (viz. kapitola 3) a sama izometrická šířka q je funkcí šířky zeměpisné.

Funkce f a g jsou libovolné funkce definované dalšími podmínkami kladenými na zobrazení, konkrétně pro to Gauss-Krügerovo jde o nezkreslený základní (tečný) poledník.

Důkaz konformity je v nástinu proveden v kapitole 5 tohoto příspěvku.

5. Důkaz konformity zobrazení

Vzorce (4) užijeme také pro důkaz konformity Gauss-Krügerova zobrazení. Délkové zkreslení je v zobrazení dáno poměrem délkového elementu geodetické čáry v rovině mapy a na rotačním elipsoidu:

$$m^2 = \frac{dS_{E_2}^2}{dS_{elipsoid}^2} = \frac{dX^2 + dY^2}{N^2 \cos^2\varphi \left(dq^2 + d\lambda^2\right)} \tag{6}$$

S využitím vlastností komplexně sdružených čísel rozložíme součty čtverců v čitateli i jmenovateli následujícím způsobem:

$$m^2 = \frac{\left(dX + idY\right)\left(dX - idY\right)}{N^2 \cos^2\varphi \left(dq + id\lambda\right)\left(dq - id\lambda\right)} \tag{7}$$

Diferencováním prvního ze vzorců (5a) a druhého ze vzorců (5b) dostáváme

$$\begin{aligned} dX + idY &= f'\left(q + i\lambda\right)\left(dq + id\lambda\right) \\ dX - idY &= g'\left(q - i\lambda\right)\left(dq - id\lambda\right) \end{aligned} \tag{8a, 8b}$$

Dosazením (8a), (8b) do (7) a po krácení a jednoduchých úpravách dostáváme:

$$m^2 = \frac{f'\left(q + i\lambda\right) \cdot g'\left(q - i\lambda\right)}{N^2 \cos^2\varphi}, \tag{9}$$

kde N je příčný poloměr křivosti a q, λ jsou izometrické souřadnice.

Z obrázku 1 je však zřejmé, že pokud by délkové zkreslení záviselo také na azimutu A, musely by se ve vzorci (9) vyskytovat i podíly $d\lambda / dq$ nebo $d\lambda / d\varphi$ a nebo dY / dX.

Tyto podíly se však v (9) nevyskytují. Délkové zkreslení je tak funkcí pouze zeměpisných souřadnic zobrazovaného bodu.

Tím je však důkaz konformity Gauss-Krügerova zobrazení proveden.

6. Zobrazovací rovnice

Vyjdeme z prvního vzorce (5a). Hodnota λ je zde redukovaná zeměpisná délka zobrazovaného bodu P_i na zeměpisnou délku λ_0 základného poledníku, tj. $\lambda = \lambda_i - \lambda_0$. Je proto mnohem menší než izometrická šířka q. To nám dovoluje zmíněný výraz ze vzorců (5a) rozvést v Taylorovu řadu:

$$X + iY = f\left(q\right) + \frac{\partial f\left(q\right)}{\partial q} \cdot i \cdot \lambda + \frac{1}{2!}\frac{\partial f^2\left(q\right)}{\partial q^2} \cdot i^2 \cdot \lambda^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial f^3\left(q\right)}{\partial q^3} \cdot i^3 \cdot \lambda^3 + \cdots \tag{10}$$

A při označení parciálních derivací funkce *f(q)* symboly postupně *f′(q)*, *f″(q)*, ... se zápis (10) zjednoduší:

$$X + iY = f(q) + f'(q)\cdot i\cdot\lambda + \frac{1}{2!}f''(q)\cdot i^2\cdot\lambda^2 + \frac{1}{3!}f'''(q)\cdot i^3\cdot\lambda^3 + \cdots \tag{11}$$

Nyní je třeba definovat funkci *f(q)*. Klademe na zobrazení požadavek délkově nezkresleného základního poledníku. To znamená, že všechny body na tomto poledníku musí mít rovinné souřadnice: $X = f(q) = B = \int_0^{\varphi} M\cdot d\varphi$, $Y = 0$ (souřadná soustava je zavedena takto: osou *X* je délkově nezkreslený obraz základního poledníku a hodnoty souřadnic rostou směrem k severu, osou *Y* je obraz rovníku a hodnoty rostou směrem východním).

Zbývá určit derivace funkce *f(q)*. Jejich výpočet je zdlouhavý a proto se jím nyní zabývat nebudu. Výsledné tvary zobrazovacích rovnic Gauss-Krügerova zobrazení jsou pak následující:

$$\begin{aligned} X = B &+ \frac{1}{2!}\cdot\lambda^2\cdot N\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi + \\ &+ \frac{1}{4!}\cdot\lambda^4\cdot N\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\left(5-\tan^2\varphi+9\eta^2+4\eta^4\right)+ \\ &+ \frac{1}{6!}\cdot\lambda^6\cdot N\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\left(61-58\tan^2\varphi+\tan^4\varphi+270\eta^2-330\eta^2\tan^2\varphi\right)+\cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = \lambda &\cdot N\cdot\cos\varphi + \\ &+ \frac{1}{3!}\cdot\lambda^3\cdot N\cdot\cos^3\varphi\cdot\left(1-\tan^2\varphi+\eta^2\right)+ \\ &+ \frac{1}{5!}\cdot\lambda^5\cdot N\cdot\cos^5\varphi\cdot\left(5-18\tan^2\varphi+\tan^4\varphi+14\eta^2-58\eta^2\tan^2\varphi\right)+\cdots \end{aligned} \tag{12a, b}$$

7. Délkové zkreslení

Označme nyní formálně: $X = f(\varphi, \lambda)$ a $Y = g(\varphi, \lambda)$. Tyto rovnice diferencujeme a při označení $\frac{\partial f}{\partial\varphi} = f_\varphi$, $\frac{\partial f}{\partial\lambda} = f_\lambda$, $\frac{\partial g}{\partial\varphi} = g_\varphi$, $\frac{\partial g}{\partial\lambda} = g_\lambda$ dostáváme:

$$dX = \frac{\partial f}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial f}{\partial\lambda}d\lambda = f_\varphi\cdot d\varphi + f_\lambda\cdot d\lambda \tag{13a}$$

$$dY = \frac{\partial g}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial g}{\partial\lambda}d\lambda = g_\varphi\cdot d\varphi + g_\lambda\cdot d\lambda \tag{13b}$$

Rovnosti (13a), (13b) dosadíme do (6) a po následných úpravách dostáváme pro délkové zkreslení ve směru azimutu *A* vzorec:

$$m_A^2 = \frac{\left(f_\varphi^2 + g_\varphi^2\right)}{M^2} \cdot \cos^2 A + \frac{\left(f_\lambda^2 + g_\lambda^2\right)}{N^2 \cos^2 \varphi} \cdot \sin^2 A + 2 \cdot \frac{\left(g_\varphi g_\lambda + f_\varphi f_\lambda\right)}{MN \cos\varphi} \cdot \cos A \cdot \sin A \qquad (14)$$

Volme postupně $A = 0°$ pro zkreslení délek ve směru poledníků (kdy je sin $A = 0$, cos $A = 1$) a pak první zlomek ve vzorci (14) označme m_p^2, potom zvolme $A = 90°$ pro zkreslení délek ve směru rovnoběžek (kdy platí sin $A = 1$, cos $A = 0$) a druhý zlomek vzorce (14) označme m_r^2. Třetí zlomek vzorce (14) představuje tzv. parametr. Platí tedy tyto tři rovnosti:

$$m_p^2 = \frac{\left(f_\varphi^2 + g_\varphi^2\right)}{M^2} \qquad m_r^2 = \frac{\left(f_\lambda^2 + g_\lambda^2\right)}{N^2 \cos^2 \varphi} \qquad p = \frac{\left(g_\varphi g_\lambda + f_\varphi f_\lambda\right)}{MN \cos\varphi} \qquad (15)$$

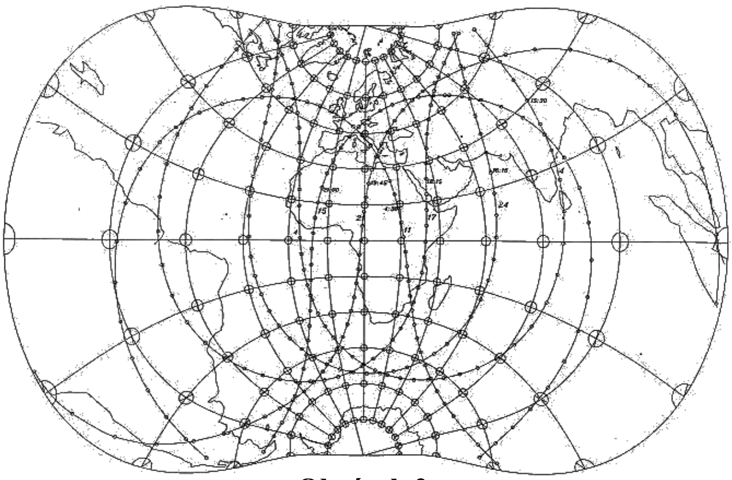
Pro čistě konformní zobrazení platí, že délkové zkreslení ve směru poledníků je rovno délkovému zkreslení ve směru rovnoběžek a zároveň parametr p má nulovou hodnotu. Tyto rovnosti lze zapsat podmínkou

$$m_p = m_r \wedge p = 0 \qquad (16)$$

Pro výpočet délkového zkreslení se tedy užívá jen vzorce pro m_r. Derivace zobrazovacích rovnic podle proměnné λ jsou výrazně jednodušší!

8. Je Gauss-Krügerovo zobrazení skutečně konformní?

Abychom na tuto otázku našli odpověď, je třeba se nejprve podívat na zobrazovací rovnice. Ty jsou dány vzorci (12). Tvoří je nekonečné řady a prakticky se používají pouze maximálně první tři členy (nepočítaje člen absolutní).



Obrázek 2

Vzhledem k aplikacím, ke kterým se toto zobrazení používá, je zcela relevantní testovat konformitu tohoto zobrazení. Kromě konstrukce map v poledníkových pásech o šíři $3°$ a $6°$ se Gauss-Krügerova zobrazení užívá i k projekci drah družic na zemský povrch (obrázek 2) nebo ke konstrukci map hvězdné oblohy.

V těchto aplikacích se šířka zobrazovaného pásu pohybuje v desítkách stupňů a v případě projekce drah družic na zemský povrch může překročit i 100°. Je tedy jasné, že proklamovaná konformita zobrazení v tom tvaru, ve kterém se reálně používá, bude vážně pokulhávat za skutečností!

9. Délkové zkreslení ještě jednou a míry nekonformity zobrazení

Chceme-li tedy analyzovat konformitu zkoumaného zobrazení, je třeba jej nyní považovat za nekonformní. Pak je třeba definovat hodnoty, kterými bude možné vyjádřit míru nekonformity zobrazení.

9.1. Tissotova indikatrix a hlavní paprsky zkreslení

Jako vhodné se nám mohou zdát právě hodnoty délkového zkreslení m_p a m_r ve směrech poledníků a rovnoběžek, které mají být v případě konformity shodné. Musíme si ale uvědomit, že u nekonformních zobrazení se obrazy poledníků a rovnoběžek nezobrazí jako na sebe kolmé čáry!

Délkové zkreslení závisí u nekonformních zobrazení na azimutu a tak hodnoty délkového zkreslení vytvoří kolem zobrazovaného bodu elipsu zkreslení, nazývanou Tissotova indikatrix. Veličiny m_p a m_r (na rotačním elipsoidu na sebe kolmé) budou jen sdruženými průměry elipsy délkového zkreslení! Nebudou ale extrémními hodnotami délkového zkreslení.

Proto se vhodnějšími veličinami pro testování konformity zobrazení jeví hlavní paprsky a, b Tissotovy indikatrix, které tvoří její hlavní a vedlejší poloosu a představují tak maximální a minimální hodnoty délkového zkreslení. U konformních zobrazení platí i pro tyto veličiny rovnost, tedy $a = b$.

Hlavní paprsky Tissotovy indikatrix vypočteme ze vzorce (14). Ten vyjadřuje závislost délkového zkreslení na azimutu. Hledáme tedy jeho extremální hodnotu. Při zavedení substitucí (15) přejde tvar rovnice (14) na jednodušší vyjádření:

$$m_A^2 = m_p^2 \cdot \cos^2 A + m_r^2 \cdot \sin^2 A + 2 \cdot p \cdot \cos A \cdot \sin A \qquad (17)$$

Pro určení extrémů délkového zkreslení musí být splněna podmínka $dm_A / dA = 0$. Protože ale platí: $\frac{dm_A^2}{dA} = 2m_A \frac{dm_A}{dA}$, je postačující podmínkou pro existenci extrému $dm^2_A / dA = 0$. Po provedení naznačených derivací a řešení rovnice pro určení extrémů délkového zkreslení dostáváme vzorec pro výpočet azimutů maximálního a minimálního délkového zkreslení:

$$\tan 2A = \frac{2p}{m_p^2 - m_r^2} \qquad (18)$$

Dosadíme hodnoty azimutů – vzhledem k dvojznačnosti tangenty jsou dva a jsou na sebe kolmé! – z (18) do (17) a dostáváme hodnoty hlavních paprsků a, b Tissotovy indikatrix.

V těchto výpočtech je třeba derivovat zobrazovací rovnice i podle proměnné φ (viz. vzorce (15) pro délkové zkreslení ve směru poledníků m_p a parametr p). To je velmi obtížné a i za použití výpočetní techniky, která je schopna symbolického derivování, jsou výsledky vyjádřeny poměrně dlouhými zápisy.

Proto jsem odvodil nový tvar zobrazovacích rovnic (vycházel jsem při odvození ze vzorců (12)). Ten je vzhledem k derivacím podle proměnných λ i φ výhodnější. Odvození je zdlouhavé a není zde na něj místo. Uvedu tedy pouze výsledné vzorce:

$$
\begin{aligned}
X = B &+ \frac{360\cdot\lambda^2 - 30\cdot\lambda^4 + \lambda^6}{720}\cdot N\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi + \frac{180\cdot\lambda^4 - 60\cdot\lambda^6}{720}\cdot N\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi + \\
&+ \frac{270\cdot e^2\cdot\lambda^4 + 120\cdot\lambda^6 - 450\cdot\lambda^6\cdot e^2}{720\cdot\left(1-e^2\right)}\cdot N\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi + \\
&+ \frac{120\cdot e^4\cdot\lambda^4 + 600\cdot e^2\cdot\lambda^6 - 600\cdot\lambda^6\cdot e^4}{720\cdot\left(1-e^2\right)}\cdot N\cdot\cos^7\varphi\cdot\sin\varphi + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y = &\frac{120\cdot\lambda - 20\cdot\lambda^3 + \lambda^5}{120}\cdot N\cdot\cos\varphi + \frac{40\cdot\lambda^3 - 20\cdot\lambda^5}{120}\cdot N\cdot\cos^3\varphi + \\
&+ \frac{24\cdot\lambda^5 + 20\cdot\lambda^3\cdot e^2 - 82\cdot\lambda^5\cdot e^2}{120\cdot\left(1-e^2\right)}\cdot N\cdot\cos^5\varphi + \frac{72\cdot\lambda^5\cdot e^2}{120\cdot\left(1-e^2\right)}\cdot N\cdot\cos^7\varphi + \cdots
\end{aligned}
\qquad (19a, b)
$$

9.2. Maximální úhlové zkreslení, úhel mezi obrazy poledníků a rovnoběžek

Další vhodnou veličinou pro test konformity je maximální úhlové zkreslení. Již bez nástinu odvození:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega_{\max}\right) = \frac{|b-a|}{b+a} \qquad (20)$$

Pokud je zobrazení konformní, je hodnota $\Delta\omega$ nulová (vzhledem k čitateli zlomku).

Kromě toho ještě můžeme použít jako ukazatel konformity (či nekonformity) zobrazení i úhel ϑ mezi obrazy poledníků a rovnoběžek. Ten je dán vzorcem:

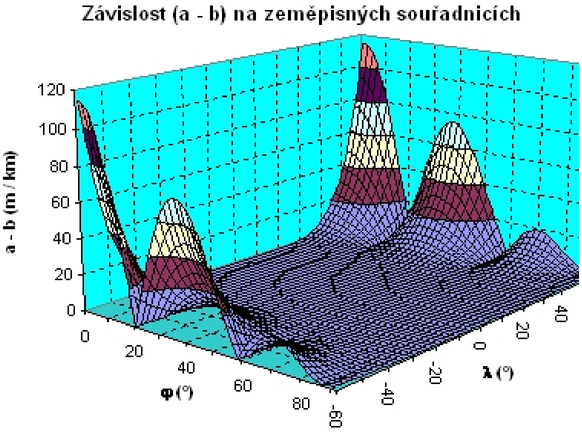
$$\tan\vartheta = \frac{f_\lambda\cdot g_\varphi - f_\varphi\cdot g_\lambda}{f_\varphi\cdot f_\lambda + g_\varphi\cdot g_\lambda} \qquad (21)$$

Platí $\vartheta = 90°$ pro konformní zobrazení a $\vartheta \neq 90°$ pro zobrazení nekonformní.

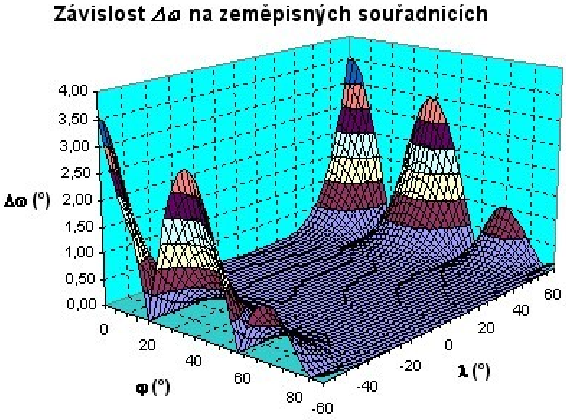
10. Stručné výsledky výpočtů a závěr

Graf 1 ukazuje závislost rozdílu *(a – b)* velikostí hlavní poloosy *a* a vedlejší poloosy *b* Tissotovy indikatrix na zeměpisných souřadnicích. Jeho „*vlnový*" charakter je způsoben přítomností funkcí *sin* a *cos* v zobrazovacích rovnicích a tím pak přeneseně i v jejich derivacích. A kromě toho také tím, že ve výpočtech uvažujeme jen prvních několik málo členů v řadách zobrazovacích rovnic!

Hodnoty rozdílu *(a – b)* pro tento případ dosahují ve svém maximu *115 m / km*! Připomínám, že v případě konformity by musel tento rozdíl nabývat stále nulové hodnoty! Graf je sestrojen opět pro poledníkový pás o šíři 120° a pro severní polokouli. Pro úplnost, na rovníku dosahuje hlavní paprsek *a* elipsy zkreslení své maximální hodnoty přes *900 m/km*! Směrem k pólu (v tomto případě severnímu) se její hodnota



Graf 1



Graf 2

zmenšuje. Stejně tak i směrem k základnímu poledníku. Velikost vedlejší poloosy *b* Tissotovy indikatrix na rovníku dosahuje cca *800 m/km*!

Pro pás o šíři 6° dosahují hodnoty rozdílu *(a – b)* v maximu *0,002 mm/km*, což je skutečně zanedbatelná hodnota vzhledem ke grafické přesnosti mapových děl, ale stále to NENÍ hodnota nulová!

Graf 2 je velmi zajímavý. Ukazuje hodnoty $\Delta\omega$ maximálního úhlového zkreslení v závislosti na zeměpisných souřadnicích. Pro pás o šíři 120° a severní polokouli dosahuje jeho velikost více než 3,5°! Vzhledem ke vzorci (20), kterým je dáno maximální úhlové zkreslení, nepřekvapí, že je průběh grafu velmi podobný grafu 1.

Pro pás široký 30° je hodnota maximálního úhlového zkreslení již jen přibližně *5,5″* a pro pás o šíři 6° hodnoty $\Delta\omega$ jen mírně překračují *0,0004″*!

Je tedy naprosto zřejmé, že vliv nekonformity Gauss-Krügerova zobrazení, plynoucí ze zanedbání členů vyšších řádů v zobrazovacích rovnicích, rapidně s rostoucí vzdáleností od základního poledníku narůstá!

To je důležité zejména z pohledu globálních aplikací, kde úhlové zkreslení v kombinaci s enormním délkovým zkreslením způsobuje velké potíže při orientaci v geografických konturách.

Vzhledem k výše uvedenému navrhuji, aby bylo Gauss-Krügerovo zobrazení překlasifikováno na válcové, transverzální a **blízko-konformní** a nebo **asymptoticky konformní**. Tato klasifikace lépe vystihuje jeho teoretickou konformitu zároveň s tím, že v praktických aplikacích toto zobrazení konformní není!

11. Použitá literatura

[1] BUCHAR, P., HOJOVEC, V.: *Matematická kartografie 10*, ČVUT, Praha, 1996
[2] HOJOVEC, V. a kol.: *Kartografie*, GKP, Praha, 1987
[3] JARNÍK, V.: *Úvod do počtu diferenciálního I, II*, Academia, Praha, 1984
[4] JARNÍK, V.: *Integrální počet I, II*, Academia, Praha, 1984
[5] SNYDER, J. P., VOXLAND, P. M.: *An Album Of Map Projections, Professional Paper 1453*, U.S. Geological Survey, Denver, 1989
[6] BARTOŠEK, Z.: *Zobrazení drah družic GPS*, diplomová práce, FSv, ČVUT v Praze, Praha 2003
[7] HOJOVEC, V., BUCHAR, P.: K pojetí Gaussova zobrazení poledníkových pásů elipsoidu, *Geodetický a kartografický obzor*, 30/72, 1984, č. 8

UKÁZKA STUDENTSKÉ PRÁCE V RÁMCI SOČ (METODA SAVITZKY-GOLAY)

Radek Hampl[1]

Abstrakt:
V příspěvku je popsán způsob práce se studentem VOŠ a SPŠ ve Varnsdorfu, se kterým jsem se jako konzultant zúčastnil celostátní přehlídky SOČ. Tématem práce byla metoda Savitzky-Golay pro zpracování statistického souboru dat a oborem, ve kterém soutěžil, byla matematika. Jedná se tedy o ukázku práce s talentovanými studenty.

1. Úvod

Podpora talentovaných studentů by měla být jednou z priorit vzdělávacích institucí všech typů, od základních škol, přes školy střední až po školy vysoké. Bohužel se na tuto velmi důležitou aktivitu občas zapomíná a tak není na škodu si připomenout, že mezi našimi studenty jsou i velmi talentovaní jedinci, kteří jsou schopni i na středních školách skutečně vysoce odborné práce daleko přesahující rámec učiva.

Jednoho svého studenta jsem tedy před dvěma lety (školní rok 2006 / 2007) oslovil s tím, že bylo zajímavé se zúčastnit soutěže SOČ (Středoškolská odborná činnost). Tím studentem byl Ondřej Tůma, který v té době na naší škole studoval obor Elektronické počítačové systémy (nyní je již po maturitní zkoušce a studuje na TU v Liberci). Vzhledem k tomu, že učím matematiku, obor byl jasný. Již dříve jsem se setkal s metodou Savitzky-Golay pro zpracování statistických dat. Tato metoda je starší nicméně se i nyní s úspěchem používá při zpracování difrakčních měření na polykrystalických materiálech ve Fyzikálním ústavu Akademie věd ČR, v. v. i.

2. Krátce o metodě Savitzky-Golay

Tuto metodu v roce 1964 představili právě pánové Savitzky a Golay. Jedná se o upravenou metodu MNČ. V době vzniku byla výpočetní technika v plenkách a i ty nejvýkonnější počítače měly nesrovnatelně nižší výkon než dnešní, byť jen běžné, stolní PC. Tehdejší počítače také disponovaly s velmi malou operační pamětí.

To znamenalo ale zásadní omezení pro ukládání větších objemů dat, se kterými se ale při statistických výpočtech setkáváme. Dnes není problém řešit vyrovnání metodou MNČ přičemž matice plánů (design matrix) mají i několik miliónů prvků. V šedesátých letech minulého století to ale problém byl.

Základní myšlenka metody je jednoduchá. Kdybychom statistickým souborem dat o rozsahu m hodnot prokládali polynom $P_n(x)$, měla by matice plánů $\boldsymbol{A}$ rozměry (m, n + 1). Matice $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ by pak byla čtvercová o rozměrech (m, m). Rozsah m statistického souboru ale může být skutečně veliký.

Výhodnější proto bude definovat v měřených datech statistického souboru „okno“ o velikosti $(2k + 1)$ hodnot, přičemž musí být splněna nerovnost $2k + 1 > n$, aby došlo k vyrovnání MNČ. Další modifikace metody MNČ spočívá v tom, že při praktických výpočtech nebudeme úlohu řešit maticově, ale každému bodu definovaného datového „okna“ přisoudíme váhu (konvoluční číslo). A navíc můžeme také využít toho, že v případě prokládání polynomu $P_n(x)$ statistickým souborem měřených dat lze velmi jednoduše vypočítat i jeho p-tá derivace $\partial^{(p)}P_n(x) / \partial a^{(p)}_i$, kde $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

[1] VOŠ a SPŠ Varnsdorf, Mariánská 1100, 40747, Varnsdorf

Tyto váhy jsou předem odvozeny a jsou stanoveny pro volený stupeň polynomu n, šíři datového „okna“ $(2k + 1)$ a řád p derivace prokládaného polynomu podle neznámých koeficientů. Samozřejmě při splnění nerovnosti $p \leq n$. K těmto konvolučním číslům jsou dále stanoveny normalizační faktory v závislosti na nastavení parametrů celé metody. Úloha pak přejde na velmi jednoduché váhování měřených dat podobně jako u klouzavého průměru. Zde se jen jedná o vážený průměr a jednotlivé váhy jsou stanoveny pomocí MNČ.

Výpočet pak postupuje tak, že měřenou číselnou hodnotu v centrálním bodě datového „okna“ nahradíme přímo hodnotou vypočtenou. Pak posuneme datové „okno“ o jedno měření dále a postup výpočtu opakujeme. Z hlediska nároků na výpočetní techniku se jedná o velice efektivní záležitost, protože potřebujeme relativně málo paměti a výpočet spočívá jen v cyklech.

Metoda má samozřejmě i nevýhody. Jednak při ní přicházíme o prvních (a posledních) k měřených hodnot a za druhé při nevhodné volbě nastavení metody dochází k zásadnímu zkreslení měřených dat. Tj., filtruje se nejen šum z měření ale i důležité informace.

První zmíněnou nevýhodu můžeme odstranit vhodnou modifikací metody Savitzky-Golay (pro ukázku bude dále odvozena). Nicméně ta druhá nevýhoda stále zůstává a je třeba metodu skutečně dobře „vyladit“ aby poskytovala vše, co může a zároveň nepůsobila ztrátu informace obsažené v měření.

3. Zobecnění metody Savitzky-Golay

Odvození samotné metody je dlouhé a do tohoto příspěvku by se nevešlo. Proto zde uvedu její obecnější podobu (odvozenou později, než původní metoda), která řeší zároveň problém krajních bodů statického souboru.

Mějme tedy aproximační polynom stupně M v proměnné x:

$$P_M(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Mx^M \tag{1}$$

a jemu odpovídající hodnoty $f(-n_L), \dots, f(n_R)$ měřené veličiny. Symboly $-n_L$, n_R vyjadřují souřadnice měřených hodnot v rámci datového „okna“ vzhledem k jeho centrálnímu bodu. Index L znamená levou část a index P pravou část datového „okna“. Pro centrální bod platí $-n_L = n_R = 0$. Pak g_0 bude hodnota polynomu pro x = 0, tedy hodnota a_0.

Matice plánů $\boldsymbol{A}$ bude mít tvar:

$$\boldsymbol{A}_{ij} = i^j, \tag{2}$$

kde $i = -n_L, \dots, n_R$ a $j = 0, \dots, M$. Systém normálních rovnic pro vektor $\boldsymbol{dx}$ má pak tvar:

$$(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{f} \tag{3}$$

A řešení systému normálních rovnic má tvar:

$$\boldsymbol{dx} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{f} \tag{4}$$

Můžeme také zavést formy:

$$\left\{A^T A\right\}_{ij} = \sum_{k=-n_L}^{n_R} A_{ki} A_{kj} = \sum_{k=-n_L}^{n_R} k^{i+j} \quad \text{a} \quad \left\{A^T f\right\}_j = \sum_{k=-n_L}^{n_R} A_{kj} f_k = \sum_{k=-n_L}^{n_R} k^j f_k \tag{5}$$

A nyní je konvoluční číslo C_n součástí hodnoty a_0 jestliže vektor $\boldsymbol{f}$ nahradíme jednotkovým vektorem $\boldsymbol{e_n}$, kde $-n_L \leq n < n_R$.

Například pro konvoluční číslo C_{-2} pro bod $n = -2$ (při velikosti intervalu $\{-3;3\} = 7$ bodů) bude konkrétní tvar vektoru $\boldsymbol{e_n}$ následující:

$$\boldsymbol{e_n} = (0,1,0,0,0,0,0) \tag{6}$$

Vektor $\boldsymbol{C_n}$ konvolučních čísel se spočítá na základě MNČ řešením systému normálních rovnic takto:

$$\boldsymbol{C_n} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{e_n} \tag{7}$$

Jeho složky jsou konvoluční čísla pro všechny řády derivace od 0 do M a pro n-tý bod datového okna. Formálně můžeme tento vzorec pro jednotlivá konvoluční čísla přepsat jako:

$$C_n = \{(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{e}_n\}_p, \tag{8}$$

kde p je řád derivace pro který konvoluční číslo počítáme. Představuje nám souřadnici hodnoty, která nás zajímá ve vektoru $\boldsymbol{C_n}$.

Konvoluční číslo můžeme také spočítat takto:

$$C_n = \sum_{m=0}^{M} \left\{\left(A^T A\right)^{-1}\right\}_{pm} n^m , \tag{9}$$

což je jen jinak zapsán minulý výraz.

Takto odvozená metoda má také dvě velké výhody oproti její klasické formulaci. Konvoluční čísla (váhové faktory) jsou vždy z intervalu (0; 1) a tudíž odpadá potřeba normování normalizačním faktorem. Druhou výhodou je možnost počítat náhradní hodnotu (hodnotu prokládaného polynomu) i pro jiný bod datového „okna“ než je jeho bod centrální. To ovlivňuje volba vektoru $\boldsymbol{e_n}$.

4. Postup práce při řešení dané problematiky

Ondřej Tůma se tedy pustil ve školním roce 2006 / 2007 do teoretického studia problematiky samotné metody Savitzky-Golay a také do studia přidružených témat z oblastí matematické statistiky, teorie chyb a vyrovnávacího počtu. Samozřejmě včetně metody nejmenších čtverců a jejích vlastností.

To se samozřejmě neobešlo bez mnoha konzultací, při nichž jsme strávili mnoho hodin. Dalším krokem bylo pořízení dat. Studijními materiály byla vysokoškolská skripta „*Teorie chyb a vyrovnávací počet I, II*“ pánů Radoucha a Hampachera, „*Statistické zpracování experimentálních dat*“ pánů Melouna a Militkého a dále „*Přehled statistických metod zpracování dat*“, jehož autorem je Hendl.

Moje vize byla, že student nebude metodu demonstrovat pro obhajobě práce na celostátní přehlídce prací SOČ na umělých datech, ale na reálných měřeních. Zde jsem využil mé známosti s pracovníkem Fyzikálního ústavu Akademie věd ČR, v.v.i., Ing. Mariánem Čerňanským, CSc., který je můj strýc. Ten poskytl mému studentovi reálná data z difrakčního měření na polykrystalických materiálech. Konkrétně se jednalo o rentgenová měření povrchové vrstvy polykrystalického křemíku, která měla tloušťku 15μm. Účelem měření bylo určit makroskopická a mikroskopická napětí a velikost krystalických částic (krystalků, krystalitů, krystalových zrn) ve zmíněné vrstvě. Sledovaly se tedy úhlové polohy reflexí na pozadí. Na každém vzorku byly ještě umístěny 4 kontrolní body ze stříbra a monokrystalického křemíku s předem známými polohami reflexí.

Po nastudování problematiky student formuloval metodu Savitzky-Golay ve své zprávě. Popsal velmi precizně teoretické odvození metody a její počáteční nastavení (tedy stupeň aproximačního polynomu, šíři datového „okna" a řád počítané derivace).

Pro praktické výpočty byl třeba naprogramovat výpočetní aparát. Po konzultaci jsme se dohodli, že tímto výpočetním aparátem bude aplikace psaná pod operačním systémem Win XP a bude psána v programovacím jazyce C++ v interaktivním objektově orientovaném prostředí Borland C++ Builder. Následovala rozvaha datových typů. Zde student správně zvolil pro ukládání vypočtených konvolučních čísel a normalizačních faktorů datový typ „*long double*" (64 bitů) vzhledem k jejich velikostem (i přes to, že konvoluční čísla i normalizační faktory mají celočíselnou povahu typ „*long double*" je typem s plovoucí desetinnou čárkou).

Výše zmíněná vlastnost typu „*long double*" ovšem v praxi znamenala trochu jiný přístup k práci s těmito hodnotami. Tak například není možné testovat rovnost dvou čísel tohoto typu přímo. Je třeba testovat absolutní hodnotu jejich rozdílu a opět nikoliv proti nule, ale proti vámi definované toleranci. Pokud nastavíme toleranci správně, bude zachována ona celočíselná povaha i pro typ „*long double*".

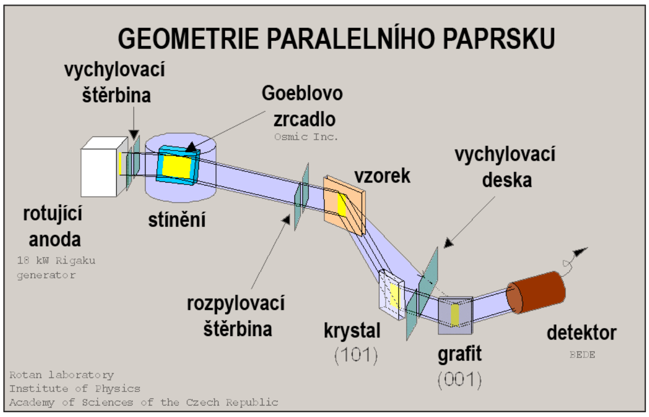
Původní rozvaha počítala s tím, že jeho program bude řešit výpočet samotných konvolučních čísel a normalizačních faktorů, ale také přímo zpracovávat i měřená data. Tato vize se podařila splnit a tak vznikl výpočetní systém na téměř profesionální úrovni.

Součástí práce také byl poster, který prezentoval řešenou problematiku. Tento poster byl také v poster-sekci na konferenci vyvěšen.

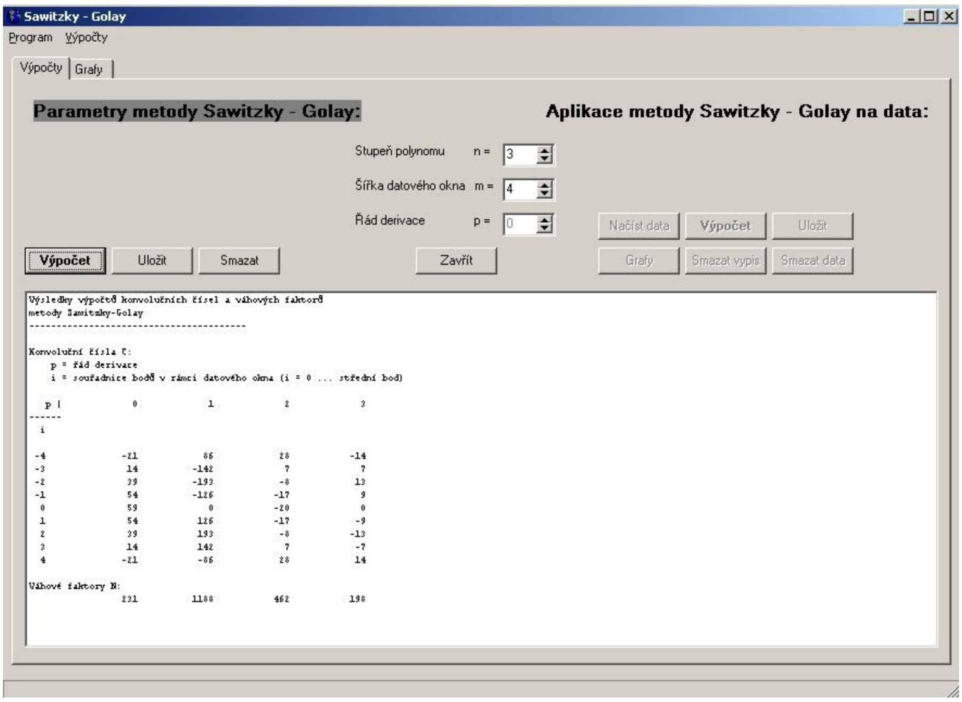
Cíle práce bylo stanovit ideální nastavení parametrů metody Savitzky-Golay tak, aby došlo k filtraci šumu z měření a zároveň aby nedošlo ke ztrátám informací nesených měřenými hodnotami. To se Ondřeji Tůmovi podařilo a jeho výsledky (stupeň polynomu 3., šíře datového „okna" 9 bodů a řád derivace 3.) plně korespondovaly se zkušenostmi výzkumného týmu Ing. Čerňanského. Je třeba ale předeslat, že ono ideální nastavení této metody jsem znal jen já jako konzultant a tak výsledek, ke kterému student došel zcela sám nebyl mnou nikterak ovlivněn!

Snažení Ondřeje Tůmy bylo korunováno postupem do celostátní přehlídky prací SOČ, kde obsadil 5. místo. Přičemž se na prvních čtyřech místech umístili studenti matematických gymnázií! Považuje tedy jeho výsledek za vynikající.

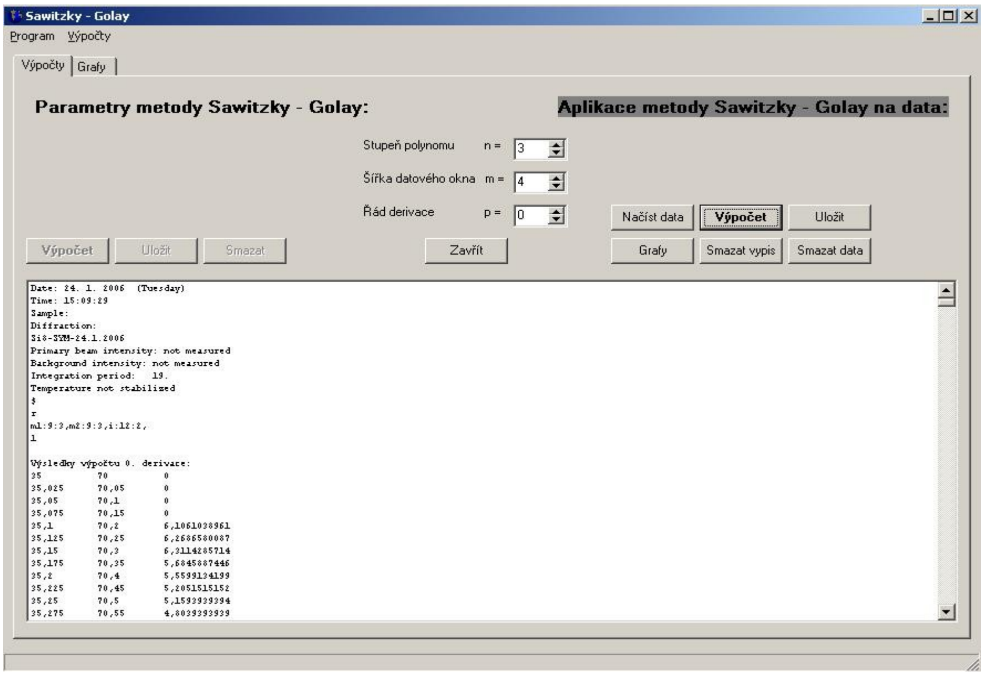
5. Ukázky z práce studenta Ondřeje Tůmy



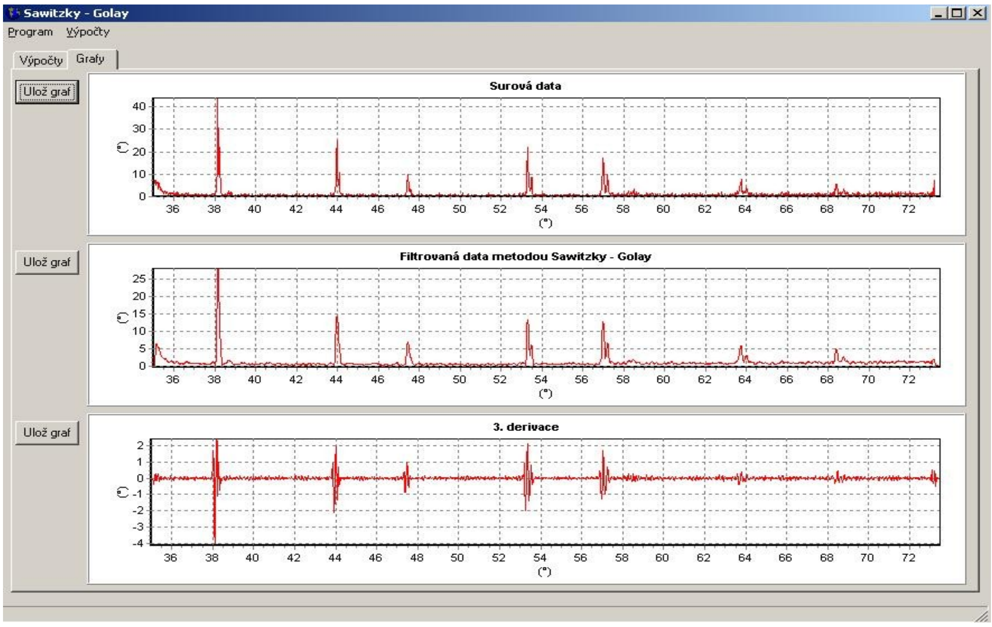
Obrázek 1: Schéma generátoru laserového paprsku a geometrie umístění laboratorního vzorku. Zde student toto schéma převedl do českého jazyka.



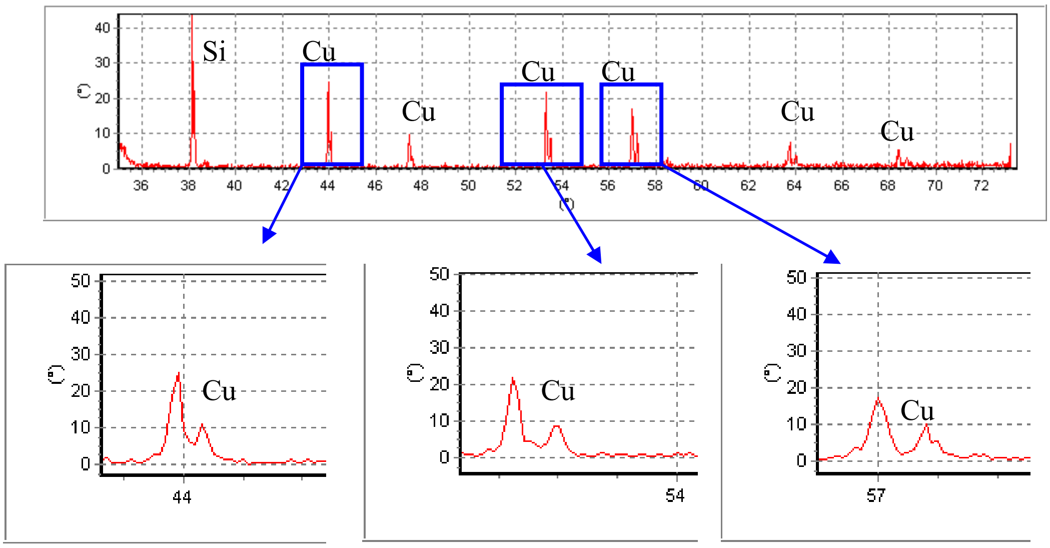
Obrázek 2: Prostředí výpočetního systému, který naprogramoval Ondřej Tůma. Obrázek ukazuje výpočet konvolučních čísel a normalizačních faktorů pro stupeň polynomu 3, šíři datového okna 9 bodů a 0. – 3. řád derivace polynomu



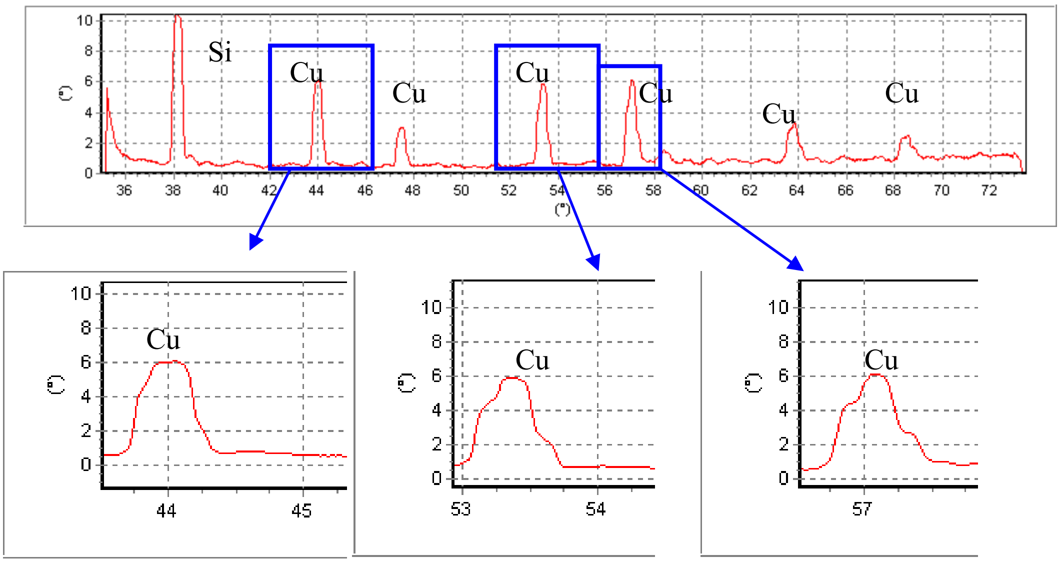
Obrázek 3: Výstup zpracování vstupních dat do dialogového okna. V hlavičce jsou vypsány nastavené parametry metody (polynom 3. stupně, šíře dialogového okna 9 bodů a 0. řád derivace)



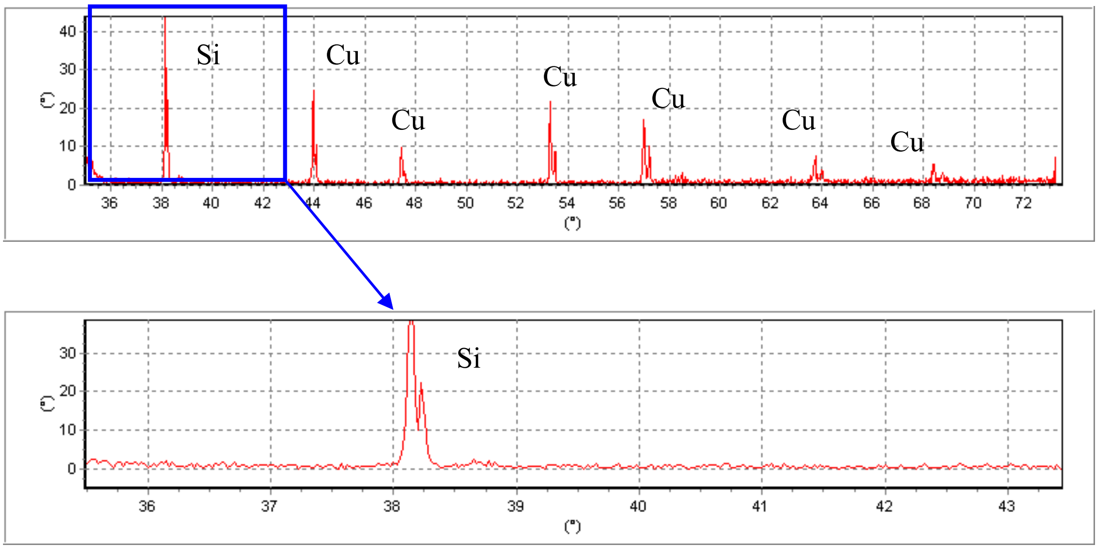
Obrázek 4: Grafický výstup programu. V prvním grafu jsou měřená data bez úprav, v prostředním grafu jsou filtrovaná data zbavená šumu (náhodných chyb měření) pomocí polynomu 3. stupně při použití 9ti bodového datového „okna" a třetí graf přestavuje průběh 3. derivace. Každému píku je pak následně přiřazen



Obrázek 5: Ukázka měřených dat, která ukazují na přítomnost mědi v zkoumaném vzorku polykrystalického křemíku. Pík na 38° je odezvou kontrolního bodu monokrystalického Křemíku.



Obrázek 6: Ukázka filtrovaných dat z obrázku 5 při špatně nastavených parametrech metody. Zde šíře datového okna 17 bodů, polynom 1. stupně. Je zde zcela jednoznačně vidět, jak dvojité píky v okolí úhlů 44°, 54° a 57° zmizí a dochází tak k velké ztrátě informací.



Obrázek 7: Ukázka filtrovaných dat z obrázku 5 při správně nastavených parametrech metody. Zde tedy šíře datového okna 9 bodů, polynom 3. stupně. Metoda píky zachování a pozadí je čistší než v původních měřených datech.

6. Závěrem

Výsledky práce Ondřeje Tůmy plně korespondují s dobrými zkušenostmi s touto metodou ve Fyzikálním ústavu AV ČR, v.v.i. Sám student skutečně udělal dobrý kus práce a největším přínosem jsou samozřejmě znalosti a dovednosti, které při řešení dané problematiky nasbíral.

Nezbývá než Ondřeji Tůmovi popřát hodně úspěchů ve studiu i v životě. A nám, učitelům, ať už na vysokých či středních školách, popřát více takových schopných studentů se zápalem pro věc a snahou proniknout do tajů vědy v kterémkoliv vědním odvětví a odhodlaných věnovat práci a studiu více času ze svého osobního volna. Tedy těch, kteří nejdou tzv. cestou nejmenšího odporu.

7. Literatura

[1] TŮMA, O. *Metoda Savitzky-Golay*. Práce představená v celostátní přehlídce prací SOČ.

[2] SAVITZKY, A., GOLAY, M. J. E. *Smoothing and Diferentiation of Data by Simplified Least Squeres Procedures,* Analytical Chemistry vol. 36, strany 1627-1639, rok 1964

[3] PRESS W., TEUKLSKY, S. A., *Numerical recipes in Fortran 77: The art of Scientific Computing Vol. 1 of Fortran*, Numerical Recipes, 1996

[4] GORRY, P. A., *General Least - Squares Smoothing and Differentiation by the Convolution (Savitzky - Golay) Method*, Analytical Chemistry vol. 62, strany 570-573, rok 1990

ASYMPTOTICKÉ VLASTNOSTI ODHADŮ S MINIMÁLNÍ KOLMOGOROVSKOU VZDÁLENOSTÍ

Bc. Jitka Hanousková[1]

Abstrakt: Příspěvek se zabývá postačujícími podmínkami pro konzistenci odhadů s minimální Kolmogorovskou vzdáleností a minimální zobecněnou Kolmogorov-Smirnovovou vzdáleností. A porovnává výsledky Vapnik-Chervonenkisovi teorie a teorie založené na stupni variace, za kterých postačující podmínky vyvozujeme.

1. Úvod

Zaveďme značení, které budeme v dalším textu používat. Nechť λ je $\sigma-$finitní míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, kde $\mathcal{B}$ je borelovská $\sigma-$algebra na $\mathbb{R}$. Buď $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ množina všech distribučních funkcí na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Označme $\mathcal{F}_\lambda$ podmnožinu všech rozdělení absolutně spojitých vzhledem k míře λ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Označme $\mathcal{D}_\lambda$ množinu v Banachově prostoru $L_1(\mathbb{R}, \mathrm{d}\lambda)$ obsahující hustoty odpovídající distribučním funkcím z $\mathcal{F}_\lambda$, $\mathcal{D}$ její libovolnou neprázdnou podmnožinu a $\mathcal{F}$ podmnožinu $\mathcal{F}_\lambda$, obsahující distribuční funkce odpovídající hustotám z podmnožiny $\mathcal{D}$.

V dalším textu bude $\widehat{F}_n$ označovat distribuční funkce odpovídající odhadu hustoty $\widehat{f}_n$. Dále buďte $X_1, .., X_n$ stejně a nezávisle rozdělená pozorování, symbolem F_n budeme označovat empirickou distribuční funkci na založenou na $(X_1, .., X_n)$ a symbolem $\nu_n(A)$ budeme označovat empirickou distribuci založenou na $(X_1, .., X_n)$

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}_{\{X_j \le x\}}\,, \qquad \nu_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}_{\{X_j \in A\}}\,, A \subset \mathbb{R}\,, \tag{1.1}$$

kde $\mathbf{I}_{\{X_j \le x\}}$ je indikátor jevu $X_j \in (-\infty, x]$ a $\mathbf{I}_{\{X_j \in A\}}$ je indikátor jevu $X_j \in A$.

Definice 1. Řekneme, že odhad $\widehat{f}_n$ hustoty $f \in \mathcal{D}$ je Kolmogorovským odhadem právě tehdy, když odpovídající distribuční funkce $\widehat{F}_n \in \mathcal{F}$ vyhovuje podmínce:

$$K(\widehat{F}_n, F_n) = \inf_{F \in \mathcal{F}} K(F, F_n) \qquad \text{s. j.}, \tag{1.2}$$

kde K je Kolmogorovská vzdálenost na $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ definována níže.

Každá merická vzdálenost D na $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ definuje psedometriku ρ_D na $\mathcal{D}_\lambda$ tímto způsobem: $\rho_D(f, g) = D(F, G)$, kde $F, G \in \mathcal{F}_\lambda$ jsou distribuční funkce odpovídající hustotám $f, g \in \mathcal{D}_\lambda$. Na faktorprostoru, jehož prvky jsou třídy ekvivalence ($f \sim g \Leftrightarrow \rho_D(f, g) = 0$), stane se ρ_D metrikou. Takto vzniklý metrický prostor budeme i nadále značit $\mathcal{D}_\lambda$.

Definice 2. Říkáme, že odhad $\widehat{f}_n$ hustoty $f \in \mathcal{D}$ je konzistentní v dané ρ_D vzdálenosti, respektive v její střední hodnotě, právě když $\rho_D(\widehat{f}_n, f) \to 0$ skoro jistě, respektive když $E\rho_D(\widehat{f}_n, f) \to 0$. Říkáme, že odhad $\widehat{f}_n$ je konzistentní řádu $r_n \to 0$ ve vzdálenosti ρ_D, respektive v její střední hodnotě, právě tehdy, když $\rho_D(\widehat{f}_n, f) = O_p(r_n)$, respektive když $E\rho_D(\widehat{f}_n, f) = O(r_n)$.

[1]KM FJFI ČVUT Praha, Trojanova 13, 120 00 Praha 2., hanoujit@fjfi.cvut.cz

Nebudeme se zabývat obecnými vzdálenostmi D a ρ_D, ale pouze Kolmogorovskou vzdáleností na $\mathcal{D}$ (ρ_K) a vzdáleností v totální variaci na $\mathcal{D}$ (ρ_V) definovanými jako:

$$\rho_K(f,g) = K(F,G) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x) - G(x)|\,, \quad \rho_V(f,g) = V(F,G) = \int_{\mathbb{R}} |f-g|\,\mathrm{d}\lambda\,, \tag{1.3}$$

kde $F, G \in \mathcal{F}_\lambda$ a f, g jsou jim odpovídající hustoty.

2. Konzistence v $\mathbf{L_1}$-normě

Krátce shrňme definice a dokázané věty z článku [1] které budeme zobecňovat.

Definice 3. Řekneme, že ρ_K dominuje ρ_V na $\mathcal{D}$ (ozn. $\rho_K \succ \rho_V$) právě, když pro každou posloupnost $f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{D}$ konvergence $f_n \to f$ v ρ_K pro $n \to \infty$ implikuje konvergenci $f_n \to f$ v ρ_V. A řekneme, že ρ_K stejnoměrně dominuje ρ_V lokálně vzhledem k ρ_K na $\mathcal{D}$ (ozn. $\rho_K \succ^u \rho_V/\rho_K$) právě, když pro každou hustotu $g \in \mathcal{D}$ existuje $c > 0$ a Kolmogorovské okolí hustoty g, $B_K(g) \subset \mathcal{D}$ takové, že $\rho_K(f,g) \geq c\,\rho_V(f,g)$ pro všechny $f \in B_K(g)$.

Věta 1. *Nechť $\rho_K \succ \rho_V$ na $\mathcal{D}$, potom každý Kolmogorovský odhad hustoty z $\mathcal{D}$ je konzistentní v L_1-normě. Pokud $\rho_K \succ^u \rho_V/\rho_K$ na $\mathcal{D}$, potom každý Kolmogorovský odhad hustoty z $\mathcal{D}$ je konzistentní s rychlostí řádu $n^{-1/2}$ v L_1-normě i střední hodnotě L_1-normy.*

Je známo, že každá dvojice hustot $f, g \in \mathcal{D}_\lambda$ definuje finitní míru ν s hustotou $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda} = f - g$. Tato míra je rozdílem dvou finitních měr na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, horní variace ν^+ a dolní variace ν^- s hustotami $\frac{\mathrm{d}\nu^+}{\mathrm{d}\lambda} = (f-g)^+ = \max\{0, f-g\}$ a ν^- s hustotou $\frac{\mathrm{d}\nu^-}{\mathrm{d}\lambda} = (f-g)^- = \max\{0, g-f\}$.

Definice 4. Řekneme, že $A \in \mathcal{B}$ separuje ν^+ a ν^-, právě když platí buď $\nu^+(A) = \nu^+(\mathbb{R})$ a $\nu^-(\mathbb{R}-A) = \nu^-(\mathbb{R})$, a nebo $\nu^+(\mathbb{R}-A) = \nu^+(\mathbb{R})$ a $\nu^-(A) = \nu^-(\mathbb{R})$.

Definice 5. Buďte $f, g \in \mathcal{D}_\lambda$. Potom stupeň variace $DV(f,g) \in [0, +\infty]$ je definován takto: $DV(f,g) = 0$, když A separuje ν^+ a ν^- a $\lambda(A) = 0$. Jinak

$$DV(f,g) = \inf\left\{m \in \mathbb{N} :\ A = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{J}_j,\ A \text{ separuje } \nu^+,\, \nu^-\right\}, \tag{2.1}$$

kde $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_m$ jsou neprázdné intervaly v $\mathbb{R}$. Je-li minimalizovaná množina prázdná, tj. neexistuje-li žádné m s požadovanými vlastnostmi, pokládáme $DV(f,g) = +\infty$.

Definice 6. Pro danou $f \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\lambda$ a $\delta > 0$ definujeme lokální stupeň variace $LDV_\delta(f)$ hustoty f vzhledem ke Kolmogorovské vzdálenosti v $\mathcal{D}$ jako:

$$LDV_\delta(f) = \sup\Big\{DV(f,g) :\ g \in B_{K,\delta}(f) \cap \mathcal{D}\Big\}, \tag{2.2}$$

kde $B_{K,\delta}(f)$ je Kolmogorovská koule v $\mathcal{D}$ o poloměru δ se středem v f. Dále stupněm variace $DV(\mathcal{D})$ rodiny $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\lambda$ nazveme:

$$DV(\mathcal{D}) = \sup\Big\{DV(f,g) : f, g \in \mathcal{D}\Big\}. \tag{2.3}$$

Věta 2. *Buď $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\lambda$, nechť pro každou hustotu $f \in \mathcal{D}$ existuje $\delta > 0$ tak, že $LDV_\delta(f) < +\infty$. Potom ρ_K stejnoměrně dominuje ρ_V lokálně vzhledem k ρ_K na $\mathcal{D}$ (ozn. $\rho_K \succ^u \rho_V/\rho_K$).*

3. Konzistence v L_1-normě za obecnějších předpokladů

Nyní zobecníme teorii předchozích částí tak, abychom v konečném důsledku dokázali, že i Kolmogorovské odhady, pro které $LDV_\delta(f)$ nemusí být konečný a které splňují jisté dodatečné předpoklady, jsou konzistentní v L_1-normě a její střední hodnotě. Za tímto účelem zavedeme nové typy dominancí.

Definice 7. Řekneme, že ρ_K asymptoticky dominuje ρ_V řádu a_n lokálně s ohledem na ρ_K na $\mathcal{D}$ (označme $\rho_K \succsim \rho_V/\rho_K\,(a_n \to 0)$) právě tehdy, když $(\forall f \in \mathcal{D})$ $(\exists B_K(f))$ takové, že $(\forall (f_n)_1^\infty \in B_K(f),\ f_n \to f \text{ v } \rho_K)$ $(\exists\, c>0)$ tak, že $\rho_K(f_n, f) \geq c\rho_V(f_n, f) - a_n$, kde $B_K(f)$ je Kolmogorovské okolí hustoty f a a_n je nezáporná posloupnost splňující $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Následující příklad ukáže, že nově definovaná dominance je zobecněním původní.

Příklad 1. Nechť rodinu $\mathcal{D}$ tvoří rovnoměrná hustota g na intervalu $[a, b]$ a funkce $f_n^{d,h}$ definované na $[a, b]$ takto:

$$f_n^{d,h}(x) = \begin{cases} h\sin(n^2\pi(x-d)) + \frac{1}{b-a} & x \in [d, d+\frac{2}{n}] \\ \frac{1}{b-a} & x \in [a, d) \cup (d+\frac{2}{n}, b], \end{cases} \tag{3.1}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a konstanty d, h splňují podmínky $d \in [a, b-2]$, $0 \leq h \leq \frac{1}{b-a}$. Vidíme, že

$$\rho_K(f_n^{d,h}, g) = \frac{2h}{n^2\pi}\,, \quad \rho_V(f_n^{d,h}, g) = \frac{4h}{n\pi}\,, \tag{3.2}$$

což odporuje dominanci $\rho_K \succ \rho_V/\rho_K$. Ale dominance $\rho_K \succsim \rho_V/\rho_K\ (a_n \to 0)$ je splněna např. pro volbu posloupnosti $a_n = \frac{4h}{n\pi} - \frac{2h}{n^2\pi}$ a konstanty $c = 1$ v definici 7.

Důkazy dále uvedených vět lze nalézt v [6].

Věta 3. *Nechť $\rho_K \succsim \rho_V/\rho_K\ (a_n \to 0)$ na $\mathcal{D}$, potom každý Kolmogorovský odhad hustoty z $\mathcal{D}$ je konzistentní v L_1-normě. Pokud navíc $a_n = o(n^{-1/2})$, potom Kolmogorovský odhad hustoty z $\mathcal{D}$ je konzistentní řádu $n^{-1/2}$ v L_1-normě.*

Věta 4. *Nechť $\rho_K \succsim \rho_V/\rho_K(a_n \to 0)$ na $\mathcal{D}$. Potom každý Kolmogorovský odhad $\widehat{f_n}$ hustoty f z $\mathcal{D}$ je konzistentní ve střední hodnotě L_1-normy. Pokud navíc $a_n = o(n^{-1/2})$, potom každý Kolmogorovský odhad hustoty f z $\mathcal{D}$ je konzistentní řádu $n^{-1/2}$ ve střední hodnotě L_1-normy.*

Nyní budeme formulovat podmínky, za kterých rodina $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\lambda$ vyhoví podmínkám dominance předpokládaným ve větách 3 a 4. Definujme zobecněnou podobu stupně variace a podívejme se na jeho vztah k dříve definovanému stupni variace.

Definice 8. Buďte $f, g \in \mathcal{D}_\lambda$ a nechť $a \in [0, +\infty]$. Potom parciální stupeň variace $DV_a(f, g) \in [0, +\infty]$ je definován takto:

$$DV_a(f,g) = \inf\left\{ m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : A = \bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{J}_j + I,\ A \text{ separuje } \nu^+,\, \nu^- \right\}, \tag{3.3}$$

kde $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_m$ jsou neprázdné disjunktní intervaly v $\mathbb{R}$ a $I \subset \mathbb{R}$ množina taková, že $\nu^+(I) \leq a$ a $\nu^-(I) \leq a$ přičemž $\bigcup\limits_{j=1}^{m} \mathcal{J}_j \cap I = \emptyset$. Je-li minimalizovaná množina prázdná, tj. neexistuje-li žádné m a množina I s požadovanými vlastnostmi, potom pokládáme $DV_a(f, g) = +\infty$.

Poznámka 1. Pokud $a > b > 0$, potom $DV_a \leq DV_b \leq DV_0 = DV$.

Parciální stupeň variace je vždy menší nebo roven dříve zmíněnému stupni variace DV. Ten nás informuje o počtu znaménkových změn rozdílu $f - g$. Z parciálního stupně variace nezjistíme počet znaménkových změn, víme jen, že pokud $DV_a(f, g) < +\infty$, potom až na konečný počet výjimek se všechny znaménkové změny odehrávají na množině I.

Věta 5. *Buď $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_\lambda$. Nechť pro každou hustotu $f \in \mathcal{D}$ existuje Kolmogorovské okolí $B_K(f)$ a konstanta $K \in [0, \infty)$ a nezáporná posloupnost a_n, taková, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ tak, že $(\forall (f_n)_1^\infty \in B_K(f),\ f_n \to f \text{ v } \rho_K)$ platí, že $\forall\, n \in \mathbb{N}$ je $DV_{a_n}(f_n, f) < K$. Potom ρ_K asymptoticky stejnoměrně dominuje ρ_V řádu $\overline{a_n}$ lokálně s ohledem na ρ_K na $\mathcal{D}$.*

4. Vapnik-Chervonenkisova dimenze

Krátce zmiňme jiný přístup pro ověřování konzistence Kolmogorovských odhadů.

Definice 9. Buď $\mathcal{A}$ třída měřitelných množin. Pro $(z_1, .., z_n) \in \{\mathbb{R}^d\}^n$ ozn. $N_{\mathcal{A}}(z_1, ..z_n)$ počet různých množin ve třídě $\{\{z_1, ..z_n\} \cap A; A \in \mathcal{A}\}$. Dále n-tý shatter koeficient definujme jako $s(\mathcal{A}, n) = \max_{(z_1,..z_n)\in\{\mathbb{R}^d\}^n} N_{\mathcal{A}}(z_1, ..z_n)$. Tedy shatter koeficient je maximální počet různých podmnožin z n bodů, které mohou být vybrány pomocí třídy množin $\mathcal{A}$.

Definice 10. Buď $\mathcal{A}$ třída množin $|\mathcal{A}| \geq 2$ ($|\mathcal{A}|$ je počet prvků množiny $\mathcal{A}$). Největší přirozené číslo $k \geq 1$, pro které platí $s(\mathcal{A}, k) = 2^k$ nazývejme Vapnik-Chervonenkisovou (VC) dimenzí třídy $\mathcal{A}$, označme $V_{\mathcal{A}}$. Pokud $s(\mathcal{A}, n) = 2^n$ pro každé n, položme $V_{\mathcal{A}} = \infty$.

Definice 11. Buď $\mathcal{F}_\Theta = \{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ parametrická třída hustot v $\mathbb{R}^d$ ($\Theta \subset \mathbb{R}^k$) a $X_1, ..X_n$ stejně nezávisle rozdělená pozorování na $f_\theta \in F_\Theta$. Definujme třídu množin

$$\mathcal{A} = \Big\{\{x \in \mathbb{R}^d : f_{\theta_1} > f_{\theta_2}\}\ \ \theta_1, \theta_2 \in \Theta\Big\} \tag{4.1}$$

a následně parametru θ s minimální $D_{\mathcal{A}}$ vzdáleností vztahem $\widehat{\theta}_n = \arg\min_{\theta\in\Theta} D_{\mathcal{A}}(P_\theta, \nu_n)$, (pokud nějaká taková $\mathbb{X}$ měřitelná statistika splňující $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(\mathbb{X})$ existuje a je funkcí $\mathbb{X}$) kde P_θ je distribuce odpovídající hustotě f_θ a $D_{\mathcal{A}}$ je zobecněná Kolmogorov-Smirnovova vzdálenost

$$D_{\mathcal{A}}(P, Q) = \sup_{A\in\mathcal{A}} |P(A) - Q(A)|. \tag{4.2}$$

Věta 6. *Pokud $\mathcal{A}$ má konečnou VC dimenzi pak odhad $f_{\widehat{\theta}_n}$ je konzistentní řádu $(n^{-1/2})$ ve střední hodnotě L_1-normy. Kde všechny symboly jsou zavedeny v předchozí definici.*

5. Vapnik-Chervonenkisova dimenze a stupeň variace

Na příkladech porovnejme oba zmíněné přístupy a podívejme se na vzájemný vztah jim odpovídajících charakteristik: stupně variace, parciálního stupně variace a VC dimenze. Nejprve poznamenejme, že VC dimenze je citlivá na změny hustot na množinách nulové míry, zatímco stupně variace ne. Proto v této části uvažujme rodiny hustot $\mathcal{D}$ obsahující hustoty různící se na množinách nenulové míry.

Na jednoduchém příkladě snadno ověříme, že v obecném případě z konečnosti VC dimenze neplyne konečnost stupně variace.

Příklad 2. Nechť rodina hustot $\mathcal{D}$ obsahuje rovnoměrnou hustotu g intervalu $(0,1)$ a hustoty f_n definované takto

$$f_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & x \in (\frac{1}{2^{2i}}, \frac{1}{2^{2i-1}}),\ i = 1,2,.. \\ \frac{n+3}{n+1} & x \in (\frac{1}{2^{2i+1}}, \frac{1}{2^{2i}}),\ i = 1,2,.. \\ 1 & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \tag{5.1}$$

Potom $DV(\mathcal{D}) = \infty$, protože například $DV(g, f_1) = \infty$, zatímco $V_{\mathcal{A}} < \infty$, protože třída množin $\mathcal{A}$ obsahuje pouze dvě různé množiny.

Tento příklad demonstruje situaci, kdy je možné použít Vapnik-Chervonenkisovu teorii, ale teorii založenou na stupni variace ne. Podívejme se ještě, je-li možné použít teorii parciálního stupně variace vybudovanou v části 3. Snadno zjistíme, že existuje posloupnost a_n, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ taková, že $DV_{a_n}(f_n, g) < K < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ a tedy je možné tuto teorii použít.

V následujících dvou příkladech zkonstruujeme rodinu hustot, na které bude možné použít obě teorie (tj. $DV(\mathcal{D}) < \infty \wedge V_{\mathcal{A}} < \infty$), a rodinu hustot, na které obě teorie selžou (tj. $DV(\mathcal{D}) = \infty \wedge V_{\mathcal{A}} = \infty$).

Příklad 3. Uvažujme rodinu $\mathcal{D}$ všech hustot Gaussova normálního rozdělení. Potom zřejmě $DV(\mathcal{D}) = 1$ a $V_{\mathcal{A}} = 3$.

Příklad 4. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ libovolně a vyberme k různých bodů $z_1, .., z_k$ v intervalu $(2k, 2k+1)$ a označme $z_{(1)}, ..z_{(k)}$ jejich vzestupné přerovnání. Pro $j = 1, ..k$ definujme intervaly

$$U_j = (u_{j-1}, u_j) \subset (2k, 2k+1)\,,\ \text{kde } u_j = \frac{z_{(j+1)} + z_{(j)}}{2} \quad \text{pro } j = 1, .., k-1 \tag{5.2}$$
$$u_0 = 2k,\ u_k = 2k+1\,.$$

Existuje 2^k různých podmnožin množiny $\{1, .., k\}$, označme je M_i^k, $i = 1, .., 2^k$ a definujme hustoty

$$f_{M_i^k} = \begin{cases} \lambda\Big(\bigcup_{j\in M_i^k} U_j\Big)^{-1} & \text{na } \bigcup_{j\in M_i^k} U_j \\ 0 & \text{jinde na } \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{5.3}$$

kde $\lambda(A)$ je Lebesqueova míra množiny A.

Definujme rodinu hustot $\mathcal{D} = \{f_{M_i^k} : i = 1, ..2^k, k \in \mathbb{N}\}$.
Z konstrukce je zřejmé, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje množina $\{z_1, .., z_k\}$, která je roztříděna třídou množin $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : f_{M_i^k} > f_{M_j^k}, i, j \in \{1, ..2^k\}, k \in \mathbb{N}\}$, a tedy $V_{\mathcal{A}} = \infty$. Ovšem v tomto případě také $DV(\mathcal{D}) = \infty$.

Následující příklad ukáže, že z konečnosti stupně variace neplyne konečnost VC dimenze.

Příklad 5. [2] Zvolme $k \in \mathbb{N}$ libovolně a vyberme k různých bodů $z_1, .., z_k$ v intervalu $(2k-1, 2k)$ a označme $z_{(1)}, ..z_{(k)}$ jejich vzestupné přerovnání a $Z_k = \{z_1, ..z_k\}$. Pro $j = 1, ..k$ definujme intervaly

[2]Příklad je převzat z [1].

$$U_i = (u_{i-1}, u_i)\,, \text{ kde } \quad u_i = \frac{z_{(j+1)} + z_{(j)}}{2} \tag{5.4}$$
$$\text{pro } i = 1, ..k-1 \quad u_0 = 2k-1,\, u_k = 2k\,.$$

Existuje 2^k různých podmnožin $S_j \subset Z_k\, j = 1, ..2^k$. Pro $j = 1, ..2^k$ a $i = 1, .., k$ definujme hustoty

$$g_j^k(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^j} & \text{pro } x \in U_i, \text{ když } U_i \cap S_j = \emptyset \\ 1 - \frac{1}{2^{j+1}} & \text{pro } x \in U_i, \text{ když } U_i \cap S_j \neq \emptyset \\ 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_j^i d_i & \text{pro } x \in (2k-2, ..2k-1) \end{cases}, \tag{5.5}$$

kde $d_i = |u_i - u_{i-1}|$ je délka intervalu U_i a

$$\alpha_j^i = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2^j} & \text{když } U_i \cap S_j = \emptyset \\ 1 - \frac{1}{2^{j+1}} & \text{když } U_i \cap S_j \neq \emptyset \end{cases}. \tag{5.6}$$

Definujme rodinu hustot

$$\mathcal{D} = \{g_j^k : j = 1, .., 2^k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{f_k, k \in \mathbb{N}\}, \tag{5.7}$$

kde f_k je rovnoměrná hustota na intervalu $(2k-1, 2k)$. Vidíme, že $DV(\mathcal{D}) = 1$, zatímco VC dimenze třídy množin $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x), f, g \in \mathcal{D}\}$ je $V_{\mathcal{A}} = \infty$, protože z konstrukce je jasné, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje množina $Z_k = \{z_1, .., z_k\}$, která je roztříděna třídou množin $\mathcal{A}$.

Je tedy vidět, že podmínka $DV(\mathcal{D}) < \infty$ pro Kolmogorovské odhady je přímo neporovnatelná s podmínkou $V_{\mathcal{A}} < \infty$ pro zobecněné Kolmogorovské odhady bez omezujících požadavků na rodiny $\mathcal{D}$. Nicméně zobecněný Kolmogorovský odhad je výpočetně značně náročnější než Kolmogorovský odhad, neboť minimalizaci provádí přes mnohem větší třídu množin. Také ověření podmínky $DV(\mathcal{D}) < \infty$ je snažší, než ověřování podmínky $V_{\mathcal{A}} < \infty$.

6. Závěr

V části 3. jsme zavedli obecnější typy dominancí a za předpokladu jejich splnění jsme pro Kolmogorovské odhady dokázali konzistenci řádu $n^{-1/2}$, dále jsme dokázali postačující podmínku pro splnění těchto dominancí. Povedlo se nám tedy rozšířit teorii článku [1]. Na příkladech jsme porovnali všechny zmíněné přístupy.

7. Literatura

[1] KŮS, V.: Nonparametric density estimates consistent of the order of $n^{-1/2}$ in the L_1-norm. In. Metrika, 2004, s.1-14.

[2] DEVROYE, L. - GYÖRFI, L. - LUGOSI, G.: A Probabilistic Theory of Pattern Recognition, New York: SPRINGER, 1996

[3] YATRACOS, Y. G.: Rates of Convergence of Minimum Distance Estimators and Kolmogorov's Entropy. In: Annals of Statistics,č. 2, 1985, s. 768-774

[4] DEVROYE, L. - GYÖRFI, L.: Nonparametric density Estimate, the L_1−view, New York: WILEY, 1985

[5] GYÖRFI, L. - VAJDA I. - VAN DER MEULEN, E.: Minimum Kolmogorov Distance Estimates of Parameters and Parametrized Distributions. In. Metrika, 1996, s.237-255

[6] HANOUSKOVÁ, J.: Asymptotické vlastnosti Kolmogorovských odhadů hustot pravděpodobnosti, Katedra matematiky FJFI ČVUT Praha, 2008.

MOŽNOSTI TVORBY MODELOV V PROSTREDÍ MATLAB

Stella Hrehová[1]

Abstrakt:
Matlab je jedným zo špecializovaných softvérov určený na riešenie, modelovanie a simuláciu matematických úloh. Široký výber funkcií a ich aplikácií ponúka viaceré možnosti pri riešení problému a tvorbe modelu. V príspevku sú popísané možnosti tvorby modelov pri využívaní základných funkcií a postupov. Tieto modely sú zamerané na efektívne využívanie základných nástrojov prostriedku Matlab, pričom pozornosť je zameraná na jednoduché zobrazenie požadovaných výsledkov.

1. Úvod

V klasickej teórii modelovania pod pojmom simulácia sa rozumie posledná fáza výstavby modelu - experimentovanie s modelom, t.j. vykonávanie rôznych simulačných experimentov pomocou modelu najčastejšie realizovaného počítačom.

Simuláciou sa nazýva aj proces, v ktorom sa vytvára simulačný model. Výsledkom simulácie je približné, ale dostatočne presné riešenie úlohy, nájdenie možných variantov a vhodných záverov (nájdenie vyhovujúceho modelu skúmaného systému).

Podstata aplikácie metód - matematického modelovania a počítačovej simulácie pri skúmaní systémov je v tom, že sa pôvodný systém nahradí počítačovým modelom, s ktorým možno realizovať na počítači rozličné experimenty a ich výsledky spätne aplikovať na pôvodný systém. Na počítači sa dajú meniť vstupy systému i parametre systému a model sa môže na rozličných miestach modifikovať. Na takéto zmeny model reaguje zmenou svojich výstupných veličín a podľa ich hodnôt možno dospieť k záveru o správaní sa skutočného systému.

Na vytvorenie simulačných modelov sa v súčasnosti používajú viaceré špecializované softvéry. K jedným z najpoužívanejších je aj programový systém Matlab, ktorý umožňuje tvorbu týchto modelov na rôznych úrovniach náročnosti.

2. Vytváranie modelov v základnom prostredí

Pri vytváraní simulačných modelov v základnom prostredí Matlab-u, využívame možnosti a vlastnosti tzv. **uicontrol** objektov. Na základe potreby je možné do grafického okna vložiť jednotlivé typy týchto objektov a tak nasimulovať potrebný vzhľad grafického okna. Tieto objekty vytvárajú prepojenie medzi užívateľom a grafickým prostredím.

Efektívnu prácu s týmito objektami nám zabezpečuje tzv. Handle Graphics. Jedná sa o grafický systém implementovaný do prostredia Matlab, ktorý umožní efektívne

[1] Fakulta výrobných technológií TU v Košiciach so sídlom v Prešove, Katedra informatiky matematiky a kybernetiky, Bayerova 1, 080 01 Prešov
stella.hrehova@tuke.sk

zvládnutie programovacích techník pri tvorbe grafov a grafických užívateľských rozhraní.

Jedným zo základných objektov je objekt figure. Do základného prostredia zapisujeme príkaz:

h=figure

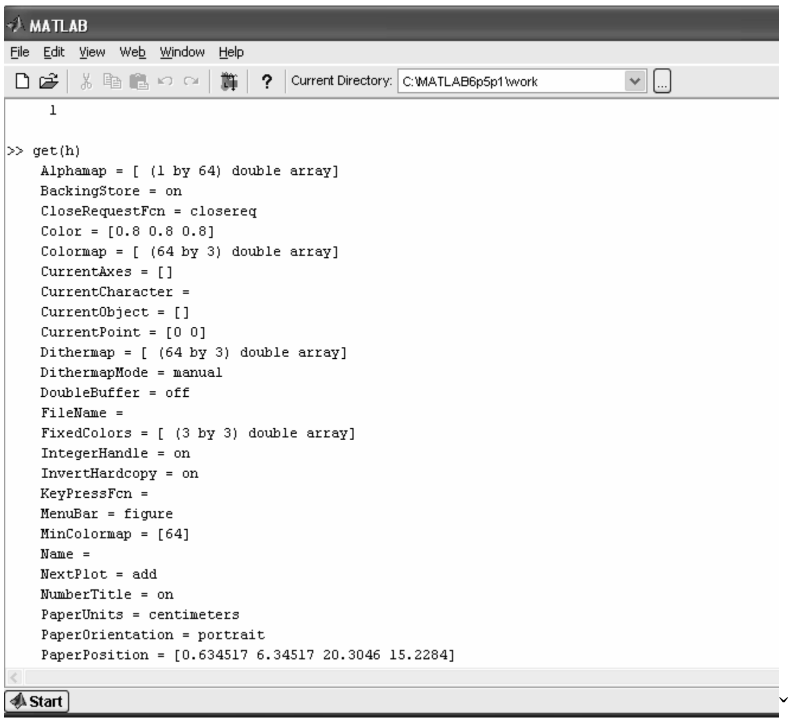
Dôležitým zápisom je zápis tohto príkazu využitím premennej, v našom prípade *h*. Táto premenná je totiž tzv. handle. Konkrétne to znamená, že po potvrdení daného príkazu sa do premennej vloží číslo. Toto číslo je volené náhodne a je jednoznačne priradené danému objektu.

Výpis všetkých vlastností daného objektu je teraz možné vypísať príkazom

get(*h*)

Po potvrdení výpisu dostaneme zoznam všetkých vlastností daného objektu, ktoré môžeme meniť, resp. editovať príkazom

set(*h*,'meno_vlastnosti','nova_vlastnost')



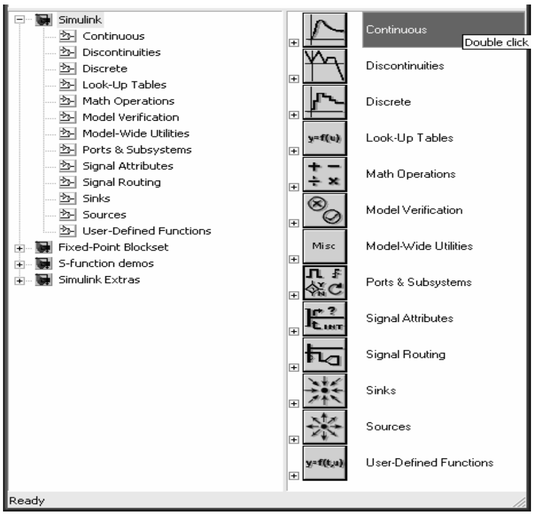
Obr. 1: Vybrané vlastnosti objektu Figure

3. Vytváranie modelov v prostredí Simulink

Simulink je skratka dvoch anglických slov SIMUlation and LINK - Simulácia a spojenie. Simulink je softvérový produkt, ktorý umožňuje modelovanie, simulovanie a analýzu systémov, ktorých výstupy sa menia v čase. tento systém je často spájaný s analýzou dynamických systémov. Môže sa využívať pri skúmaní správania sa širokej oblasti reálnych dynamických systémov. Simulácia dynamických systémov v tomto prostredí prebieha v dvoch fázach :

- v prvej fáze užívateľ vytvorí blokovú schému, využívajúc Simulink ako prostredie pre tvorbu tejto schémy, vytvorí spojenia medzi jednotlivými blokmi a nastaví všetky potrebné nastavenia medzi vstupmi a výstupmi
- v druhej fáze nastaví časové parametre simulácie (štartovací čas a konečný čas) a spustí simuláciu vytvoreného modelu

Simulink sa spúšťa zo základného prostredia Matlabu príkazom ***simulink***, alebo z nástrojového panelu. Po spustení sa ukáže okno s knižnicou dostupných blokov, rozdelených do skupín podľa oblasti využitia.



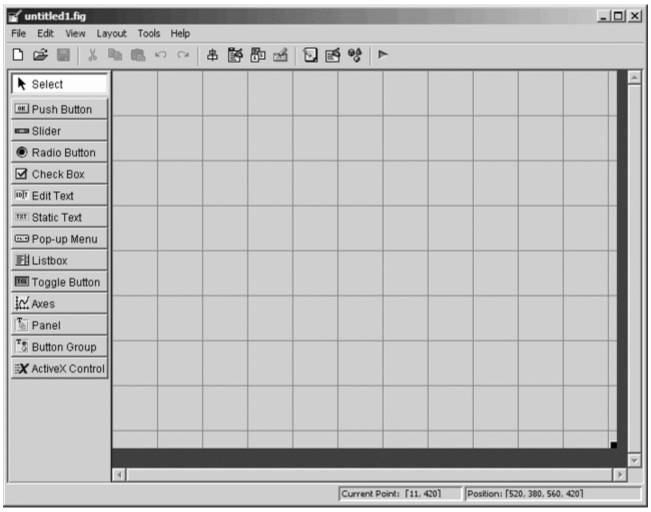
Obr. 2: Okno so základnými knižnicami Simulinku

4. Grafické rozhranie v Matlabe

Graphical user interface (GUI) je grafické rozhranie, ktoré obsahuje nástroje, alebo komponenty umožňujúce užívateľovi zdokonaľovať iteraktívne úlohy. Zdokonalenie týchto úloh spočíva v tom, že užívateľ nemusí vytvárať program, ani písať jednotlivé príkazy do príkazového riadku. Často užívateľ ani nemusí vedieť detaily prepisu do programovacieho jazyka.

Komponentami GUI môže byť menu, nástrojový panel, príkazové tlačidlá, zaškrtávacie políčka, zoznam a posuvník. V tomto prostredí je možné zobrazovať data aj v tabuľkovej forme.

Vytvorenie nového grafického rozhrania umožňuje zadanie príkazu **guide** do príkazového riadku v základnom prostredí Matlab.



Obr. 3: Základné prostredie grafického rozhrania

Každý objekt v tomto prostredí je spojený s jednou, alebo viacerými procedúrami, nazývanými ako **callback**. Vykonanie každého takéhoto príkazu je spojené s čiastočnou užívateľskou aktivitou, ako napr. pri príkazovom tlačidlu je to kliknutie myškou na dané tlačidlo. Táto časť programovania je často označovaná ako udalostné programovanie. Udalosťou je napr. kliknutie myškou na tlačidlo.

5. Záver

V príspevku boli rozpracované základné možnosti tvorby simulačných modelov na riešenie matematických problémov. Tvorba jednotlivých modelov v popísaných prostrediach a s využitím príslušných nástrojov súvisí so zručnosťami užívateľa pracovať v danom prostredí. Výhodou Matlab-u je, že aj nie veľmi zbehlý užívateľ vie vytvoriť pomocou jeho nástrojov simulačné modely a získať tak relevantné výsledky, varianty riešení a nájsť optimálne riešenie daného problému.

Príspevok bol vypracovaný v rámci VEGA 1/0345/08 „Modelovanie a simulácia mechatronických systémov pre strojárstvo.

Literatura

[1] KARBAN, P. : *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*, Computer Press, Brno 2006, ISBN 80-251-1301-9.

[2] ZAPLATÍLEK, K.-DOŇAR, B. : *Matlab pro začatečníky*, BEN technická literatúra, Praha 2005, ISBN 80-7300-133-0.

[3] ZAPLATÍLEK, K.-DOŇAR, B. : *Matlab tvorba užívatelských aplikací*, BEN technická literatúra, Praha 2004, ISBN 80-7300-133-0

[4] http://www.mathworks.com/access/helpdesk_r13/help/toolbox/simulink/slref/

[5] http://www.math.carleton.ca/old/help/matlab/MathWorks_R13Doc/techdoc/ref/uicontrol.html

MATEMATICKÁ GRAMOTNOSŤ A JEJ VÝZNAM PRI VÝUČBE NA TECHNICKÝCH FAKULTÁCH

Daniela Hricišáková[1], Magdaléna Tomanová[2]

Abstrakt:
Matematika má v systéme vzdelávania kľúčové postavenie. Naše školstvo, špeciálne výučba matematiky prekonáva revolučný vývoj. Na vyučovanie matematiky, na jednej strane rastú nároky, na druhej strane sa uvažuje čo z obsahu matematiky na rôznych typoch a stupňoch škôl vynechať alebo zjednotiť. Študenti základných, stredných a vysokých škôl majú čoraz väčší problém so základnými matematickými operáciami a číselnými množinami. Treba zvážiť čo je potrebné k rozvoju matematickej gramotnosti, ktorá hrá dôležitú úlohu pri riešení a interpretácii problémov z rôznych oblastí spoločenského života.

1. Matematická gramotnosť je schopnosť jedinca rozpoznať a pochopiť úlohu matematiky vo svete, robiť zdvôvodnené hodnotenia, používať matematiku a zaoberať sa ňou spôsobmi, ktoré zodpovedajú potrebám života konštruktívneho, zaujatého a rozmýšľajúceho človeka [4]. Problémy matematického vzdelávania sa riešili oddávna, ťažko možno do tejto oblasti priniesť nový nápad, novú myšlienku [2]. Nedostatočný matematický základ, ktorý majú študenti na technických a ekonomických fakultách, nedostatočné skúsenosti s matematickým riešením problémov sťažujú prezentáciu niektorých analytických metód používaných v technických predmetoch a v ekonómii [5].

Ako príklad možno uviesť postavenie ekonómie o ktorej ťažko rozhodnúť, či má charakter spoločenskej vedy, alebo vedy formálno logickej, v ktorej má dominovať najmä matematika. Zástancovia matematického prúdu vychádzajú z presvedčenia, že kritériom pravdivosti a vedeckosti je práve matematický dôkaz [1].

Trenčianska univerzita Alexandra Dubčeka v Trenčíne má tri technické fakulty *(Mechatroniky, Špeciálnej techniky a Priemyselných technológií)* a *Sociálno-ekonomickú fakultu*.

Vyberáme zo *študijného programu* Fakulty špeciálnej techniky TnUAD v Trenčíne, 1.ročník akademický rok 2002/2003 študijný odbor – *Špeciálna strojárska technika* (tab. č. 1);

1.ročník akademický rok 2008/2009 študijný odbor – *Špeciálna strojárska technika* (tab. č. 2).

[1]Trenčianska univerzita Alexandra Dubčeka v Trenčíne, Študentská 2, 911 50 Trenčín, email: hricisakova@tnuni.sk
[2] Trenčianska univerzita Alexandra Dubčeka v Trenčíne, Študentská 2, 911 50 Trenčín, email: tomanova@tnuni.sk

PREDMET		Týždenný počet hodín				Počet kredito	Meno prednášajúceho
		zimný sem.		letný sem.			
číslo	názov	P/C/L	ukonč.	P/C/L	ukonč.		
Povinné predmety							
9-1121	Matematika I.	4/3/0	z, s			8	doc. Bačík
1-1513	Základy konštruovania	3/2/0	z, s			6	prof. Barysz
9-1131	Lineárna algebra	2/2/0	z, s			5	RNDr. Sadloň
3-1121	Chémia	2/1/0	z, s			4	prof. Garaj
9-1151	Konštruktívna geometria	2/2/0	klz			4	RNDr. Halás
2-1170	Informatika I.	0/0/2	klz			2	KI FM
9-1311	Telesná výchova	0/2/0	z			1	KTV ÚPHV
9-1122	Matematika II.			4/3/0	z, s	8	doc. Bačík
1-1211	Náuka o materiáloch			3/0/3	z, s	7	prof. Várkoly
9-1211	Fyzika I.			2/2/1	z, s	6	doc. Košina
4-1151	Všeobecná ekonomická teória			2/2/0	z, s	4	doc. Tomková
2-1171	Informatika II.			1/0/2	klz	4	doc. Neuschl
9-1312	Telesná výchova			0/2/0	z	1	KTV ÚPHV
Povinne voliteľné predmety							
1-1416	Základy strojárskych technológií *	0/0/2	z			0	doc. Mäsiar
9-1221	Seminár z fyziky **	0/2/0	z			0	doc. Košina
	Celkom hodín	***13/12/2***		***12/9/6***			
	Skúšky	***4***		***4***			
	Klasifikované zápočty	***2***		***1***			
	Zápočty	***6***		***5***			
Voliteľné predmety							
9-1132	Seminár z matematiky I.	0/2/0	z			0	doc. Bačík
1-1123	Seminár z technickej dokumentácie	0/2/0	z			0	Ing. Lahučký,CSc.
9-1133	Seminár z matematiky II.			0/2/0	z	0	doc. Bačík

Tab. č. 1: *Študijný program* Fakulty špeciálnej techniky TnUAD v Trenčíne, 1.ročník akademický rok 2002/2003 študijný odbor – *Špeciálna strojárska technika*

PREDMET		Týždenný počet hodín				Počet kreditov	Meno prednášajúceho
		zimný sem.		letný sem.			
číslo	názov	P/C/L	ukonč.	P/C/L	ukonč.		
Povinné predmety							
2-1121	Matematika I	3/3/0	z, s			7	doc.Hricišáková
1-1502	Základy konštruovania [3]	2/2/0	z, s			6	Ing. Lahučký,CSc.
5-1721	Technická chémia	1/0/1	z, s			4	doc. Galusek
2-1151	Konštruktívna geometria	1/2/0	z			4	RNDr.Markechová, CSc.
1-1403	Informatika	1/0/1	z			3	Ing. Barényi, PhD.
1-2070	Dejiny a filozofia techniky techniky	0/2/0	z			2	Ing. Eliáš,PhD., Ing. Pilková
1-1001	Úvod do štúdia na vysokej škole	0/1/0	z			1	Ing. Eliáš,PhD., Ing. Pilková
1-1811	Bezpečnosť a ochrana zdravia pri práci[3]	1/1/0	z			2	doc. Lipták
2-1127	Matematika II			3/2/0	z, s	6	doc.Hricišáková
1-1212	Náuka o materiáloch I [1]			2/0/2	z, s	5	doc. Híreš
1-1011	Fyzika I			2/1/1	z, s	6	doc. Áč
4-1153	Všeobecná ekonomická teória			2/1/0	z, s	3	Ing. Ivanová, CSc.
1-1510	Počítačom podporované konštruovanie I [1]			0/0/2	z	2	Ing. Bucha
1-1301	Základy strojárskej mechaniky [2]			2/2/0	z, s	5	doc. Barborák
Povinne voliteľné predmety							
5-1311	Telesná výchova	0/2/0	z			1	PaedDr. Rolníková
1-1410	Základy strojárskej technológie			0/0/2	z	2	doc. Mäsiar
1-1302	Seminár zo základov strojárskej mechaniky			0/2/0	z	2	Ing. Čelko
5-1312	Telesná výchova			0/2/0	z	1	PaedDr. Rolníková
	Celkom hodín	***9/13/2***		***11/10/5***			
	Skúšky	***3***		***5***			
	Hodnotené zápočty	***6***		***3***			
	Zápočty	***3***		***5***			
Výberové predmety							
1-1402	Základy z informatiky	1/0/2	z			1	Ing. Barényi, PhD.
2-1132	Seminár z matematiky I	0/2/0	z			1	doc.Hricišáková
1-1520	Seminár z technickej dokumentácie	0/2/0	z			1	Ing. Lahučký, CSc.
2-1133	Seminár z matematiky II			0/2/0	z	1	doc.Hricišáková
1-1021	Seminár z fyziky			0/2/0	z	1	PaedDr.Korytiaková

Tab. č. 2: *Študijný program* Fakulty špeciálnej techniky TnUAD v Trenčíne, 1.ročník akademický rok 2008/2009 študijný odbor – *Špeciálna strojárska technika*

V študijnom programe **Špeciálna strojárska technika, I. stupeň, 1. roč. Fakulty špeciálnej techniky TnUAD** v predmetoch **Fyzika** a **Všeobecná ekonomická teória** je potrebný tento matematický základ:

- základné pojmy výrokovej logiky a teórie množín
- číselné množiny N, Z, Q, R, množina komplexných čísel
- funkcia jednej reálnej premennej a vyšetrenie jej vlastností, priebeh funkcie
- diferenciálny počet
- funkcia n-reálnych premenných
- integrálny počet a aplikácie
- diferenciálne rovnice
- lineárna algebra (vektor, vektorový priestor, matica, determinant, sústava lineárnych rovníc a jej riešenie).

*Z obsahu predmetu **Fyzika** vyberám:* Kinematika a dynamika hmotného bodu. Priamočiary a krivočiary pohyb. Newtonove zákony – pohybová rovnica. Mechanika sústavy hmotných bodov, I. a II. veta impulzová. Zákony zachovania hybnosti, momentu hybnosti a energie. Gravitačné pole. Mechanika tuhého telesa. Statika. Kmity, netlmené a tlmené. Mechanické vlnenie. Vlnová funkcia a vlnová rovnica. Šírenie vlnenia.

Elektrické pole – Coulombov zákon, intenzita a potenciál. Kondenzátor. Elektrokinetika. Ohmov zákon a Kirchoffove zákony. Elektrické obvody. Práca a výkon elektrického prúdu. Magnetické pole. Biotov-Savartov zákon. Lorentzova sila. Ampérov zákon. Nestacionárne magnetické pole. Elektromagnetická indukcia.

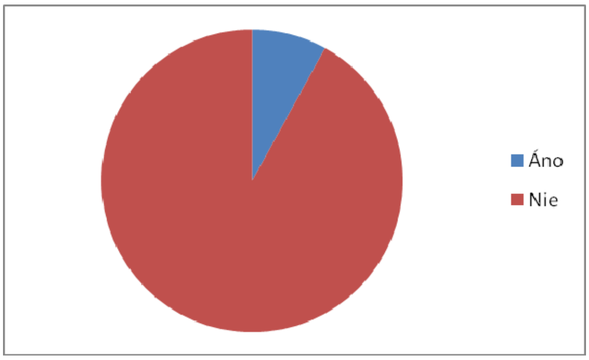
*Z obsahu predmetu **Všeobecná ekonomická teória** vyberám:* Predmet a metodológia ekonomickej teórie. Problémy organizácie ekonomiky a ich riešenie v rôznych typoch ekonomík. Ekonomické zákony. Trh a trhový mechanizmus. Teória racionálneho správania spotrebiteľa a utváranie dopytu. Správanie firmy uzatváranie ponuky a rovnováha firmy. Trh výrobných faktorov agregátny dopyt a agregátna ponuka. Meranie výkonnosti ekonomiky. Agregátne ekonomické ukazovatele. Ekonomický rast a ekonomicky cyklus. Makroekonomická politika a jej ciele. Peniaze a peňažný trh. Inflácia a nezamestnanosť. Medzinárodný obchod a finančný systém. Medzinárodná ekonomická integrácia. Globalizačné procesy [1].

2. Vyučovať študentov technických (aj iných) fakúlt matematiku je čoraz ťažšie a náročnejšie. Dosahované výsledky – vedomosti sú na nižšej úrovni, ako v minulosti. Deje sa tak napriek dlhodobým snahám o skvalitnenie výučby a odbúranie nadbytočných a nepodstatných tém. Zmeny teda neprinášajú želaný efekt, čo pociťujeme dlhodobo nielen na vysokých školách (tu je to len dôsledok), ale je tomu tak na nižších stupňoch škôl.

Prezentujeme tu niekoľko výstupov z ***dotazníka***, ktorý *v akademickom roku 2007/2008 vyplnilo 50 študentov 1. ročníka TnUAD*. Cieľom dotazníka bolo (okrem iného) zistiť záujem absolventov SŠ o matematiku, aké percento študentov má maturitnú skúšku z matematiky, aké sú hodinové dotácie tohto predmetu na stredných školách, a tiež spôsob, akým študenti získavajú vedomosti, respektíve, akú úlohu hrá učebnica (učebný text) v ich príprave. Na otázky študenti odpovedali takto:

1. Maturovali ste z matematiky?

a) áno 8%
b) nie 92%

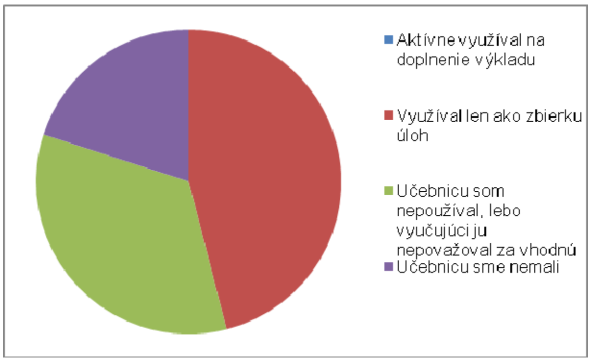


2. Vyberte možnosť, ktorá najlepšie vystihuje počet vyučovacích hodín matematiky v jednom týždni na vami absolvovanej strednej škole.

a) 1 .... 6%
b) 1 - 2 .... 26%
c) 2 .... 24%
d) 2 - 3 .... 12%
e) 3 .... 14%
f) 3 - 4 .... 10%
g) 4 .... 0%
h) 4 - 5 .... 6%
i) 5 .... 0%

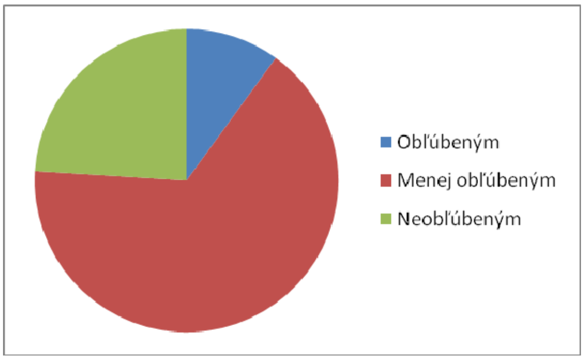
3. Pri štúdiu matematiky na strednej škole som učebnicu:

a) aktívne využíval na doplnenie výkladu...0%
b) využíval len ako zbierku úloh...46%
c) učebnicu som nepoužíval, lebo vyučujúci ju nepovažoval za vhodnú........34%
d) učebnicu sme nemali...20%



4. Matematika je mojím predmetom:

a) obľúbeným 10%
b) menej obľúbeným 66%
c) neobľúbeným 24%



Záver:

Treba zdôrazniť, že porovnaním študijného programu akad. roka 2002/2003, študijného odboru Špeciálna strojárska technika, 1. roč. FŠT TnUAD a akad. roka 2008/2009, študijného odboru Špeciálna technika, 1. roč. FŠT TnUAD bola matematika zastúpená v akad. roku 2002/2003 v predmete: matematika I, rozsahom hodín (4/3), matematika II, rozsahom hodín (4/3), lineárna algebra, rozsahom hodín (2/2), konštruktívna geometria, rozsahom hodín (2/2). V akademickom roku 2008/2009 v predmete: matematika I, rozsahom hodín (3/3), matematika II, rozsahom hodín (3/2) a konštruktívna geometria, rozsahom hodín (1/2) v takmer nezmenenom obsahu predmetov napriek tomu, že rozsah a počet *predmetov matematiky* sa výrazne zmenil.

Zo štyroch sledovaných otázok z dotazníka je zrejmé to, čo sme už konštatovali – zmeny, ktoré vo vyučovaní niekoľko rokov prebiehajú sa pri predmete *matematika* minuli cieľa. Aktuálnou preto stále ostáva *otázka čo a ako učiť v matematike* .

Tento materiál bol vytvorený v rámci projektu VEGA 1/3805/06 „Hodnotenie ekonomickej efektívnosti podniku vo väzbe na marketingové stratégie a nové trendy priemyselnej politiky EU.''

Literatúra:

[1] IVANOVÁ, E.: *Mikroekonómia*, Trenčín 2005, ISBN 80-8075-055-6, str. 13.,

[2] KUŘINA, F.: *Problémy matematického vzdelávania*, Praha 2007, ISBN 978-80-7378-029-6

[3] KOLEKTÍV AUTOROV: Podklady*, príklady a testy z ekonómie, ekonomiky, matematiky a cudzích jazykov*, Trenčín 2007, ISBN 978-80-8075-214-9

[4] KUBÁČEK, Z., ČERNEK P.: *Dve vety o kurikulárnej transformácii*, Obzory MFaI, 4/2007, ISSN 1335-4981, str. 4

[5] HRICIŠÁKOVÁ, D.: *Matematická vzdelanosť a jej význam pri výučbe ekonomických predmetov*, IV. Medzinárodná konferencia 2008, EPI Kunovice, ISBN 978-80-7314-145-5.

VYUŽITÍ MAPLE V ZÁVĚREČNÝCH PRACÍCH NA FAKULTĚ PODNIKATELSKÉ VUT V BRNĚ

Zuzana Chvátalová[1]

Abstrakt:
V příspěvku jsou uvedeny dvě ukázky využití systému Maple, v bakalářské a diplomové práci, při analýze výkonnosti firmy; je zmíněna aktuální verze systému Maple 12.

1 Úvod

Užívání prostředků informačních a komunikačních technologií (ICT) výrazně determinuje současnou mladou generaci. Proto významnou součástí společenského vývoje je výchova, modernizace vzdělávacího procesu, akceptace nových trendů. V technické a ekonomické praxi je kladen důraz na schopnost absolventů modelovat, analyzovat a sofistikovaně řešit technické a ekonomické úlohy při využití prostředků ICT. Kromě vybavení kvalitními vědomostmi by měla škola u posluchačů přirozeně pěstovat návyky pro racionální nasazování těchto prostředků. Počítačový systém Maple, zejména jeho poslední verze, je vhodným jak pro výuku, tak výzkum i v praxi. Jeho užití v závěrečných bakalářských a diplomových pracích je tak dobrou zkušeností budoucích absolventů pro jejich další profesní vývoj.

Nežádoucím trendem současnosti ve vzdělávání je určitá nepřízeň disciplín, které „zavánějí" matematikou. Na jedné straně široké nasazování rychle se vyvíjejících prostředků ICT může napomoci tuto skutečnost eliminovat, na druhé straně však přehnané a pasivní přijímání algoritmizovaných problémů může přispívat k mechanizaci úkonů na úkor aktivního logického myšlení, podpory přirozeného odhadu, kontroly i intuice.

Výuka matematických disciplín na Fakultě podnikatelské Vysokého učení technického v Brně (FP VUT v Brně) je orientována především pro **aplikační účely matematických věd v ekonomických oborech**. Je vyvíjena snaha komplexně nahlížet na tyto disciplíny, a tím vytvářet prostor vzájemné návaznosti vyučovaných metod a užívaných prostředků (Chvátalová 2007). V bakalářském studijním programu jde především o **základní kurz matematiky; matematický seminář, statistické metody**, **základy diskrétní matematiky**, **základy výpočetních metod**. V magisterském studijním programu pak jde zejména o předmět **ekonometrie**[2] (ekonometrické modely poptávky a nabídky, produkční funkce, příjmu, nákladů, zisku, spotřeby a úspor, pružnosti poptávky a pružnosti nabídky, modely národní ekonomiky, optimalizace) a od tohoto akademického roku předmět **ekonomické modelování v Maple,** obdobný ekonometrii, avšak založený na počítačové podpoře. Ekonomické profilové disciplíny vyučované na fakultě dávají dostatečné možnosti pro výběr témat a zpracování závěrečných prací v bakalářském i magisterském stupni studia. V posledních letech je však skutečností, že při výběru tématu i vedoucího závěrečné práce se někteří studenti

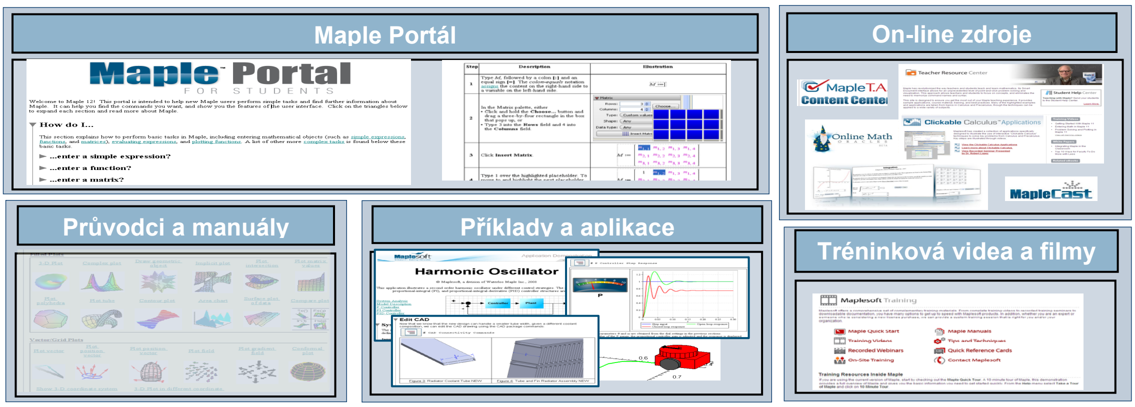
---

[1] Fakulta podnikatelská VUT v Brně, Brno, Kolejní 4, chvatalova@fbm.vutbr.cz
[2] Pro inovaci ekonometrie, zejména ve cvičení (v oblasti počítačové podpory), v letošním kalendářním roce FRVŠ MŠMT poskytl dotaci.

rozhodují pro řešení ekonomických problémů konkrétního podniku využitím právě matematických metod a vhodného počítačového systému. Jde většinou o studenty samostatně logicky uvažující, kreativní, s nápady, mající kladný vztah k matematice. Není zanedbatelným faktem, že tato tendence je podmíněna možností využívat vhodného počítačového prostředí a efektivně nakládat s časem.

2 Systém Maple

Počítačový systém Maple, produkt kanadské společnosti Maplesoft (http://www.maplesoft.com) ve svém třicetiletém vývoji prošel etapami zohledňující různé vědecké metody a cíle využití. Práce v něm je založena na standardním grafickém rozhraní a pracovních zápisnících a dokumentech. Jeho stále aktualizované verze reagují na iniciativní podněty praxe, vědy i vzdělání v různých vědních oborech, pro různé cílové skupiny jeho uživatelů. Současná verze Maple 12 (k dispozici od května 2008) je nástroj pro kvantifikaci, modelování, vizualizaci a simulaci. Má zdokonalený výpočtový základ zahrnující většinu matematických disciplín. Umožňuje jak výpočty, tak sofistikované zpracování technických výzkumů, algoritmizaci problémů a je otevřen mnoha aktivitám souvisejících se vzdělávacím procesem. Pracovní prostředí systému Maple 12 je stále pohodlnější, komunikace se systémem není obtížná ani pro začínající uživatele. Kontextové menu, obslužné palety, klikací kalkulus, grafické výstupy a mnoho předdefinovaných a interaktivních prostředků (nástroje - tools, instruktoři - tutors, řešené úlohy - tasks aj.), elektronické slovníky, průvodci i manuály, spolu s možnostmi dokumentace, anotace i prezentace řešené problematiky vytvářejí přívětivé komplexní uživatelské prostředí. Verze Maple 12 reflektuje řadu žádaných a moderních inženýrských metod při vývoji i výzkumu. Například zařazeny jsou komponenty pro sledování vlivu parametrů na výpočet (Exploration Assistant), dynamické systémy pro analýzu a grafickou vizualizaci lineárních časových úloh (Dynamic Systems), je rozšířena knihovna o další možnosti transformace diskrétních veličin (Discrete Transforms), je přidána komponenta pro přímé propojení s počítačově podporovanými systémy (CAD Connectivity) a zkvalitněný převod existujícího kódu MATLAB do kódu Maple (MATLAB to Maple Code Translation). Výraznou a živě diskutovanou inovací verze Maple 12 jsou nové možnosti pro simulaci samostatným produktem (MapleSim), které ocení zejména profesionálové inženýrské praxe. Jde o efektní konstrukce funkčních systémů pomocí nejrůznějších předdefinovaných simulačních bloků a jednotek (Hřebíček\Chvátalová 2008).



Obr. 1: Vybrané novinky verze Maple 12

3 Dvě ukázky využití Maple v bakalářské a diplomové práci

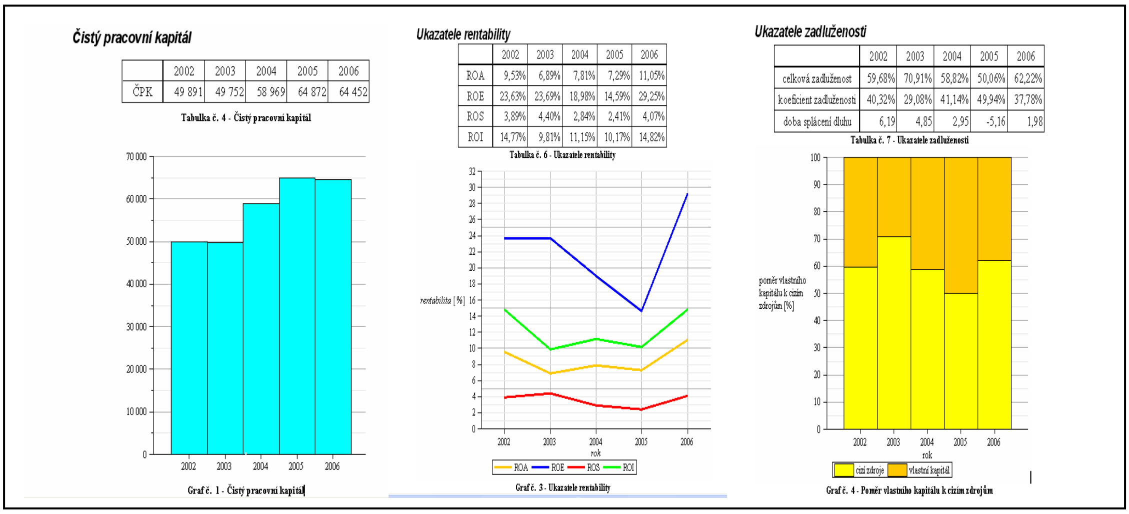
Následné ukázky závěrečných prací se vztahují k finanční analýze výkonnosti konkrétního podniku a jsou založeny na zpracování užitím počítačového systému Maple. K jeho nasazení oba autory pobídla skutečnost, že FP VUT v Brně disponuje tímto systémem a zcela jistě i fakt, že systém Maple se těší oblibě nejen ve světě, ale i na řadě českých univerzit, škol i pracovišť. Jeho uživatelé spolu komunikují, zejména ve studentské obci zkušenosti a dobré rady se šíří rychle. Což je dobře. Komunikace je podporována totiž i samotnou společností Maplesoft například prostřednictvím aplikačního centra Maplesoft (http://www.maplesoft.com/applications/).

V roce 1993 byl založen v Brně i **Český klub uživatelů systému Mapl**e - Czech Maple User Group (CzMUG, http://www.maplesoft.cz), který vytváří rámec pro české uživatele Maple, organizuje workshopy a kurzy pro výměnu zkušeností, informuje o novinkách a akcích vztahujících se k užívání Maple, prezentuje dovednosti a zkušenosti českých uživatelů Maple na mezinárodních konferencích, zastupuje české uživatele přímým kontaktem se společností Maplesoft účastí na fórech jí pořádaných. Významnou předností je jeho **podpora tvůrčích aktivit a vývoje elektronických i fyzických publikací s aplikacemi Maple jak pro výuku, tak pro praxi v českém jazyce**. Výhodou je i jeho rozsáhlý aktuální a systematický servis uživatelům Maple v České republice. Existují individuální internetové stránky, na nichž čeští odborníci prezentují své výsledky, procedury řešící určité odborné problémy v Maple, hodnotí své zkušenosti s aplikacemi a užíváním Maple. Někteří čeští experti participují i na vývoji Maple, a přispívají tak k řadě jeho zdokonalení (společností Maplesoft podporované programy Maple Connect Premier a Maple Connect využívají zpětné vazby uživatelů, jejich otázek či komentářů) (Chvátalová 2007).

3.1 Analýza prosperity firmy

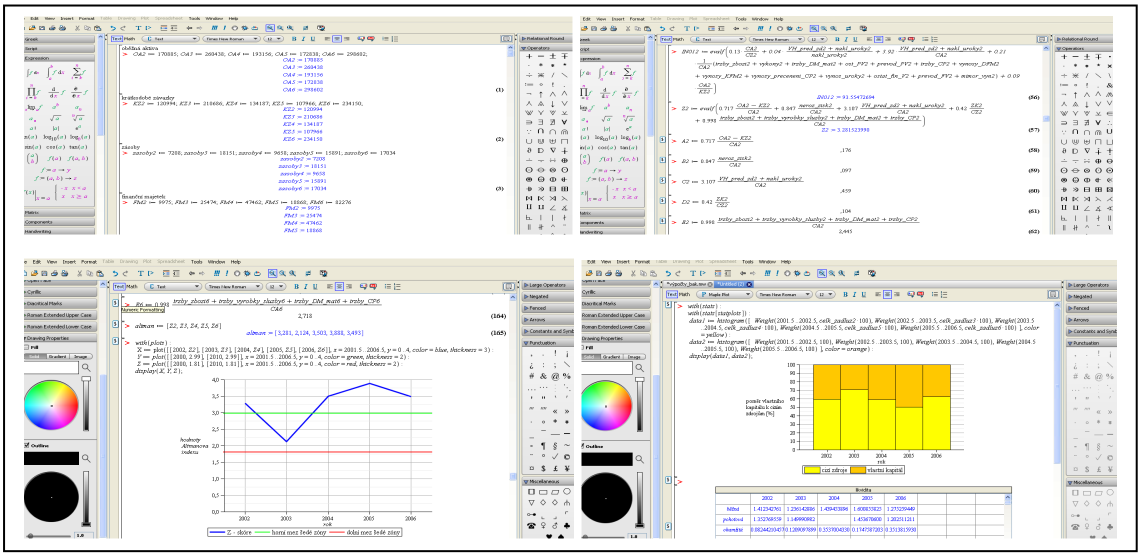
Cílem bakalářské práce „Analýza prosperity firmy Tenza, a.s. užitím systému Maple" (Vecheta 2008) bylo posoudit skutečný současný finanční stav společnosti Tenza, a.s., potažmo její prosperitu. Finanční analýza byla realizována matematickým modelováním v prostředí Maple. Autor práce nejprve vymezil teoretické zázemí zamýšlené finanční analýzy, zdroje dat pro její zpracování a návrh metod včetně krátké prezentace Maple. Dále představil firmu, konkrétní dílčí části zpracování finanční analýzy, tj. analýzu absolutních ukazatelů (horizontální a vertikální analýza), analýzu poměrových ukazatelů (ukazatele zadluženosti, likvidity, aktivity, rentability) a analýzu soustav ukazatelů (bonitní a bankrotní modely) a výsledné rozbory získaných dat. Nakonec souhrnně hodnotil získané výsledky, identifikoval prosperitu firmy a doporučil návrhy pro další zvyšování výkonnosti firmy.

V části samostatného zpracování a kvantifikace údajů při komunikaci s počítačovým systémem autor prokázal velký smysl pro logické myšlení, neboť do primárně nepřehledné řady různých číselných hodnot z finančních výkazů firmy vnesl řád pro vyhodnocování potřebných indexů a koeficientů jak individuálního, tak souhrnného, absolutního i poměrového charakteru, a to v časové posloupnosti. Pracovní prostředí systému Maple pro své účely velmi samostatně zvládl obsloužit, což potvrzuje důležitou vlastnost systému Maple, totiž **dosažitelnou obslužnost i pro začínající uživatele a podporu aktivního myšlení a samostatnosti** jeho uživatelů. Autor postupoval přehledně a srozumitelně při matematickém modelování ukazatelů a jejich grafických prezentacích. Tím, že jej zajímal ekonomický výklad získaných výsledků, což je podstatou nasazování kvantitativních metod v ekonomii, velmi uvážlivě korigoval celý výpočtový proces a smysluplně navrhoval formu i obsah výstupů. Dokonce jej práce v Maple postupně inspirovala pro další možnosti finančních analýz prospěšných pro firmu v budoucnu, o nichž předtím neuvažoval. Rozšiřoval tak ze své vůle teoretické vědomosti matematických disciplín pro aplikaci v praxi.



Obr. 2: Vybrané výstupy práce vypočítané a modelované v Maple

Uvedené výstupy pak poskytují pohodlné a přehledné zázemí pro finální ekonomickou interpretaci při manažerském rozhodování ve firmě, srovnání s medializovanými hodnotami apod. K získání takových přehledných výstupů z Maple však bylo třeba zpracovat (nejprve roztřídit, označit, definovat a spočítat, příp. vytvořit tabulky v Maple) řadu dílčích číselných údajů. Pro názornost přístupu autora ke zpracování práce v systému uveďme jako ukázku vybrané sekvence těchto postupů přímo ze zápisníku v pracovním prostředí Maple.



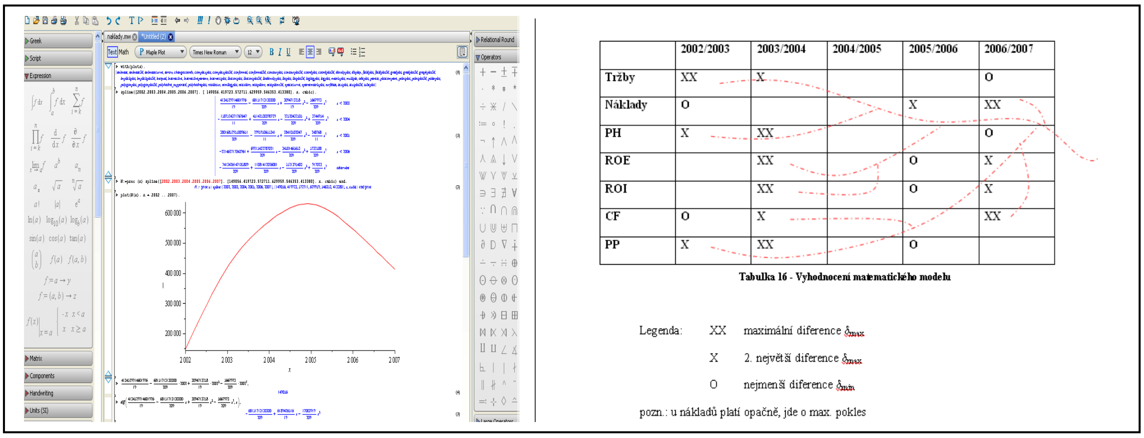
Obr. 3: Vybrané sekvence definovaných, počítaných a kreslených modelů ekonomických ukazatelů přímo v zápisníku Maple, na bočních lištách ukázky obslužných palet symbolů a barev, operátorů aj.

3.2 Purpurové řeky

Autorka diplomová práce „Purpurové řeky – matematické modelování výkonnosti podniku“ (Popelková 2008), inspirována stejnojmenným filmem režiséra Mathieu Kassovitze, vytvořila zajímavou metodiku optimalizováním „řečiště purpurových řek“. Přistoupila k modelování výkonnosti podniku sledováním dynamiky vývoje ekonomických ukazatelů v čase (vyhodnocením prvních derivací, největších jejich přírůstků). Do ekonomických souvislostí tak vnesla jistým způsobem metriku, a tedy se pohybovala na poli ekonometrie.

Horizontálně modelovala vybrané ekonomické ukazatele. Současně zachytila vnitřní a vnější podmínky podniku v rámci strategické analýzy a v jejich reflexi především rychlost změn vybraných ekonomických ukazatelů. Pak vertikální analýzou mapovala vnější i vnitřní rámec reálných podmínek podniku v okamžicích nejvyšší nebo alespoň dostatečně vysoké rychlosti změn ukazatelů, tj. historickou dedukcí následně identifikovala příčinu pozitivního nárůstu, nakonec aplikovala minulou skutečnost na aktuální dění ve společnosti (podniku) s cílem navodit stejnou růstovou situaci. Přičemž nejdůležitějším okamžikem byla transformace starých podmínek do aktuálního času a prostoru zkoumaného podniku, jejich ekonomická interpretace a následná aplikace (Popelková 2008), (Hřebíček\Chvátalová 2008). Rozsáhlé výpočty a příslušné kvantitativní i grafické modely, analýzy i rozhodné kvantifikované výstupy autorka elegantně zpracovala užitím počítačového systému Maple. Z důvodu dodržení předpokládané koncepce a smyslu zpracování problematiky ve své práci přírůstky ekonomických ukazatelů a jejich rychlost sledovala pouze v předem vytypovaných okamžicích.

Rovněž tuto autorku průběžně vybízelo samo prostředí, pohodlná a efektivní dostupnost a jiné možnosti poskytované systémem Maple k dalším a dalším smysluplným otázkám, k jejichž odpovědím lze v systému získat patřičné odborné zázemí.



	2002/2003	2003/2004	2004/2005	2005/2006	2006/2007
Tržby	XX	X			O
Náklady	O			X	XX
PH	X	XX			O
ROE		XX		O	X
ROI		XX		O	X
CF	O	X			XX
PP	X	XX		O	

Tabulka 16 - Vyhodnocení matematického modelu

Legenda: XX maximální diference δ_{max}

X 2. největší diference δ_{max}

O nejmenší diference δ_{min}

pozn.: u nákladů platí opačně, jde o max. pokles

Obr. 4: Ukázka ekonomického modelování ukazatele v zápisníku systému Maple (vlevo) a varianta optimalizovaného řečiště purpurových řek pro výslednou ekonomickou interpretaci a aplikaci při určení budoucí strategie (vpravo)

4 Závěr

Společnost, podnik, firma, která chce dosáhnout úspěchu, potřebuje kvalitní manažerská rozhodnutí. Kvalitní manažerská rozhodnutí potřebují připravené a vhodně vybavené manažery. Primárním úkolem vysoké školy by mělo být nejen poskytnout vědomosti, ale také mít zájem o uplatnění svých posluchačů v praxi, mít zájem o zaměstnatelné absolventy. Praxe by neměla podceňovat vědecký přístup, měla by žádat vzdělané myslící lidi, schopné se svými vědomostmi pragmaticky nakládat, zvyklé odpovědnosti, samostatnosti a kreativitě, pracovat efektivně.

Využívání matematických disciplín při zpracování závěrečných prací na vysoké škole evidentně tyto tendence podporuje. FP VUT v Brně dává široký prostor k seberealizaci svým posluchačům a poskytnutím řady prostředků ICT vytváří zázemí pro osvojování získaných vědomostí a pro pěstování vhodných návyků počítačové gramotnosti v budoucí praxi.

Obě závěrečné práce byly úspěšně obhájeny, ohodnoceny známkou A. Diplomová práce pak vyznamenána cenou děkana. Významným aspektem úspěchu obou prací byly schopnosti a dovednosti autorů, jejich serióznost v přístupu a zpracování problematiky, avšak důležitou úlohu přitom sehrál počítačový systém Maple. Dobrá práce je i další motivací pro učitele a možností inspirace pro výuku i vědu. Obě práce budou zohledněny při inovaci předmětu ekonometrie, neboť posluchačům mohou dobře předložit zejména možnost propojení teorie a praxe a důležitost volby vhodného počítačového systému.

Společnost Maplesoft dbá o korektnost svých služeb, velmi často inovuje verze systému, inovace jsou vyvolávány potřebami praxe. Vývoj nových produktů Maple podřizuje zajímavé filozofii, kdy žádá, vyslyší a akceptuje zkušenosti, názory a výzvy nejen samých uživatelů Maple, ale celosvětově také expertů nejrůznějších vědeckých disciplín a zohlední je při dalším vývoji či modifikaci svého produktu. V současnosti takovému přístupu podléhá například produkt pro inženýrské simulace MapleSim.

Poznámka závěrem: Z důvodu účelnosti a rozsahu nejsou v článku uváděny odborné výklady konkrétních ukazatelů, analýz, technik, konkrétních návrhů apod.

Literatura

[1] HŘEBÍČEK, J., CHVÁTALOVÁ, Z.: Zvyšování výkonnosti podniku užitím systému Maple. In. *Sborník konference Request 2008*. Místo vydání: FSI VUT v Brně, Brno, 2008. (Sborník v přípravě.)

[2] CHVÁTALOVÁ, Z. Maple pro e-learning matematiky a matematických disciplín v ekonomických studijních programech. In: *Trendy ekonomiky a managementu,* 2007, roč. 1, č. 1, s. 22-32. ISSN: 1802-8527.

[3] POPELKOVÁ, I. *Purpurové řeky. Matematické modelování výkonnosti podniku.* Diplomová práce, vedoucí práce Z. Chvátalová. Fakulta podnikatelská VUT v Brně. Brno, 2008.

[4] VECHETA, L. *Analýza prosperity firmy Tenza, a.s. užitím systému Maple.* Bakalářská práce, vedoucí práce Z. Chvátalová. Fakulta podnikatelská VUT v Brně. Brno, 2008.

[5] *Maplesoft* [online]. Dostupný z: <http://www.maplesoft.com>, <http://www.maplesoft.cz>, informační systém CzMUG.

Poděkování: Tento článek vznikl s účastí projektu MŠMT FRVŠ, č. 2413/2008 s názvem *Inovace v předmětu ekonometrie*, řešitelka RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D., pracoviště FP VUT v Brně.

PŘÍNOS ČESKÉ GEOMETRICKÉ ŠKOLY V KINEMATICE

Mgr. Václav Jára[1]

Abstrakt:
Kinematickou geometrii přivezli do Čech z pařížské polytechniky bratři Vaněčkové. První články českých geometrů se objevují v matematických časopisech koncem 19. století a počátkem 20. století přicházejí věhlasné práce Miloslava Pelíška. Po druhé světové válce se o rozvoj oboru nejvíce zasloužil profesor Zdeněk Pírko.

1. Příchod kinematické geometrie do Čech

Kinematická geometrie se poprvé objevuje na počátku 19. století v pracích francouzských matematiků Mongeho a Carnota. Termín „géométrie cinématique" pochází z roku 1859 od Olryho Terquema. Přednášky z kinematické geometrie vedl od roku 1867 na pařížské polytechnice profesor Mannheim.

Do českých zemí přinesli kinematickou geometrii bratři Vaněčkové, Josef Sylvestr a Matěj Norbert, ze svého studijního pobytu v Paříži v letech 1878–1879. Právě přednášky profesora Mannheima přispěly ke zvýšenému zájmu bratří Vaněčků o tento obor. První články českých matematiků se objevily již o několik let dříve v Časopise pro pěstování matematiky a ve Zprávách císařské akademie věd a Královské české společnosti nauk. Mnoho článků pochází z pera Emila Weyra a jsou věnovány úpatnicím.

2. Další práce

2.1. Konec 19. století

Roku 1880 vydává Josef Sylvestr Vaněček v Jičíně vlastním nákladem české zpracování Mannheimových přednášek pod názvem *Pošinování geometrických útvarů*. Kniha je obsahově rozsáhlejší než pozdější učebnice *Lehrbuch der Kinematik* (1888) od Ludwiga Burmestera.

Na konci 19. století se kinematické geometrii věnovali další čeští matematikové jako Eduard Weyr a Bedřich Procházka. Jejich články uveřejněné mimo jiné v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky se zaobírají zejména kinetickými způsoby sestrojování středů křivosti nejrůznějších trajektorií. K rozvoji oboru přispěli také zakladatelé brněnské techniky Jan Sobotka a Karel Zahradník.

2.2. 20. století

Na počátku 20. století se objevují převáženě články a publikace Miloslava Pelíška, který svých největších úspěchů dosáhl právě v kinematické geometrii – výsledky jeho prací o středech křivosti trajektorií lze dodnes najít v učebnicích jako „Pelíškovy konstrukce". Věnoval se také prostorové kinematice.

Po druhé světové válce se nejvíce o rozvoj kinematické geometrie zasloužil profesor pražské techniky Zdeněk Pírko, který v roce 1957 založil a více než dvacet let vedl na Katedře matematiky a deskriptivní geometrie elektrotechnické fakulty ČVUT seminář z kinematické geometrie. Jeho předmětem byly obecné problémy kinematické geometrie v *n*-rozměrném afinním prostoru, ale také speciální problémy rovinné kinematiky.

[1] KDM MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, vaclav.jara@matfyz.cz

Literatura

[1] FOLTA, J.: *Česká geometrická škola*. Praha: Academia, 1982.
[2] BEČVÁŘ, J. a kol.: *Eduard Weyr 1852–1903*. Praha: Prometheus, 1995.
[3] JANOVSKÝ, Z.: Zemřel profesor Zdeněk Pírko. In *Časopis pro pěstování matematiky*. 1984, roč. 109, č. 1, s. 109–111.
[4] FOLTA, J., ŠIMŠA, P.: *Biografie českých matematiků*. Brno: Přírodovědecká fakulta MU, převzato 6/2008.
Dostupné na `http://www.math.muni.cz/math/biografie/index.html`.

VLASTNOSTI SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC S INTERVALOVĚ ZADANÝMI KOEFICIENTY

Jana Koníčková[1]

Abstrakt:
Příspěvek se zabývá řešením soustav lineárních rovnic, ve kterých koeficienty matice a pravé strany nejsou určeny přesně, ale je pouze známo, že leží uvnitř daných reálných intervalů. Množina řešení obecně není konvexní, ale její průnik s každým orthantem je konvexní polyedrická množina. Z praktického hlediska bývá výhodnější hledat pouze intervalový obal množiny řešení. Tato úloha je NP-těžká. V případě inverzně stabilní intervalové matice se výpočet značně zjednoduší, v článku jsou výsledky týkající se postačující podmínky inverzní stability.

1. Úvod

Při řešení praktických úloh je často nutné uvažovat nepřesnosti ve vstupních datech. Jsou-li vstupní údaje získány například jako výsledek měření nebo předchozích výpočtů, jsou jejich hodnoty zatíženy chybou měření, resp. zaokrouhlovacími chybami. Jedním ze způsobů reprezentace nejistot či nepřesností ve vstupních datech je intervalový přístup, založený na intervalové aritmetice, nazývané také intervalová analýza. Nepřesné reálné číslo je reprezentováno pomocí intervalu reálných čísel, který pravděpodobně obsahuje neznámou přesnou hodnotu daného čísla. Vektory a matice, jejichž prvky jsou intervaly, se nazývají intervalové vektory, resp. intervalové matice.

Studujeme soustavu intervalových lineárních rovnic

$$A^I x = b^I, \tag{1}$$

kde $A^I = \{A; \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$ je intervalová matice, $b^I = \{b; \underline{b} \leq b \leq \overline{b}\}$ je intervalový vektor, $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$, $b \in \mathrm{R}^m$. Jednotlivé koeficienty uvažujeme na sobě navzájem nezávislé. Intervalovou matici A^I je také možné zapsat jako interval

$$A^I \;=\; [\underline{A}, \overline{A}] = [A_c - \Delta, A_c + \Delta],$$

kde $A_c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \overline{A})$ je centrální matice intervalové matice A^I, $\Delta = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$ je poloměr intervalové matice A^I.
Intervalový vektor b^I je definován analogicky:

$$b^I \;=\; [\underline{b}, \overline{b}] = [b_c - \delta, b_c + \delta].$$

2. Množina řešení

Definice 1 *Množina X všech řešení soustavy $A^I x = b^I$ je definována jako*

$$X = \{x; (\exists\ A \in A^I)(\exists\ b \in b^I)\ Ax = b\}. \tag{2}$$

[1]České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, Katedra matematiky, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: `konicko@fsv.cvut.cz`

Věta 1 (Oettli-Prager, 1964 [6]) *Množina X všech řešení soustavy $A^I x = b^I$ má tvar*

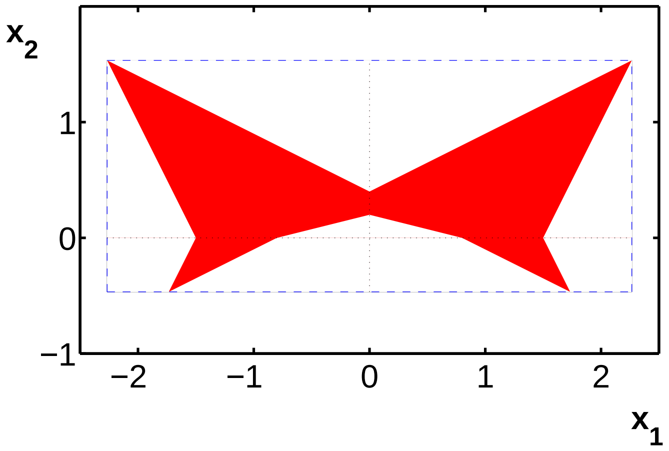
$$X = \{x; |A_c x - b_c| \leq \Delta|x| + \delta\}. \tag{3}$$

Tato věta nám umožňuje snadno rozhodnout, zda vektor x patří do množiny X. Z Oettli-Pragerovy věty plyne, že množina X obecně není konvexní, průnik množiny X s každým orthantem je konvexní množina (konvexní polyedrická množina za předpokladu regularity matice A^I).

Pro ilustraci uvedeme dva příklady soustav s maticí $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Množina řešení X soustavy (4)

$$\begin{pmatrix} [2,4]\,, & [-1,1] \\ [-1,1]\,, & [2,4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-3,3] \\ 0.8 \end{pmatrix} \tag{4}$$

je znázorněna na obrázku 1.



Obrázek 1: Množina X pro soustavu (4)

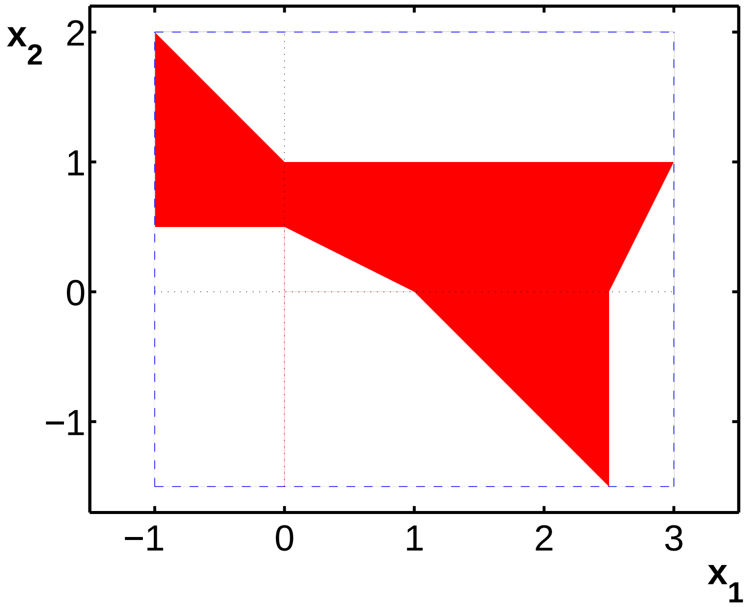
Množina řešení soustavy (5)

$$\begin{pmatrix} [2,4]\,, & [-1,0] \\ [0,1]\,, & [1,2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2,5] \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

je znázorněna na obrázku 2. Tato množina má neprázdný průnik se třemi kvadranty. Množina X na obrázku 1 i 2 je souvislá, není konvexní, ale průnik s každým kvadrantem je konvexní polyedrická množina. Vlastnost souvislosti množiny X platí obecně pro regulární intervalové matice.

Věta 2 *Nechť A^I je regulární intervalová matice. Potom množina X je souvislá a kompaktní.*

Pro singulární intervalové matice obecně množina řešení X nemusí být souvislá, např. řešením intervalové rovnice $[-1,1]x = 1$ je množina $X = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$.



Obrázek 2: Množina X pro soustavu (5)

3. Konvexní obal množiny řešení

Označme množinu Y všech ± 1 vektorů

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^m; |y_j| = 1 \text{ pro } j = 1, \dots, m\}.$$

Pro $y \in Y$ označme diagonální matici T_y

$$T_y = \mathrm{diag}(y_1, \dots, y_m),$$

$(T_y)_{ii} = y_i$ pro každé i, $(T_y)_{ij} = 0$ pro $i \neq j$).

Věta 3 (Rohn, 1989 [7]) *Nechť A^I je regulární intervalová matice. Potom pro každé $y \in Y$ rovnice*

$$A_c x - T_y \Delta |x| = b_c + T_y \delta$$

má právě jedno řešení $x_y \in X$ a platí

$$\mathrm{Conv}\, X = \mathrm{Conv}\{x_y; y \in Y\}.$$

4. Intervalový obal množiny řešení

Definice 2 *Jestliže A^I je regulární, potom intervalový vektor $x^I = [\underline{x}, \overline{x}]$ definovaný vztahy*

$$\begin{aligned} \underline{x}_i &= \min\{x_i; x \in X\}, \\ \overline{x}_i &= \max\{x_i; x \in X\}, \qquad (i = 1, \dots, n), \end{aligned} \tag{6}$$

se nazývá intervalový obal množiny X.

Věta 4 (Rohn, 1989 [7]) *Nechť A^I je regulární intervalová matice. Potom*

$$\begin{aligned} \underline{x} &= \min\{x_y; y \in Y\}, \\ \overline{x} &= \max\{x_y; y \in Y\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Intervalový obal množiny X můžeme získat jako minima a maxima jednotlivých složek vektorů x_y. Tento postup vyžaduje výpočet 2^n těchto vektorů x_y. Platí-li P $\neq$ NP, potom se pro obecnou (regulární) intervalovou matici A^I přesné meze intervalového vektoru x^I nedají vypočítat v polynomiálním čase [8], viz následující věta.

Věta 5 (Rohn, Kreinovich, 1995 [8]) *Nechť A^I je regulární intervalová matice. Potom výpočet přesných mezí intervalového vektoru x^I je NP-těžký.*

Pro výpočet intervalového obalu množiny řešení je známo mnoho metod. Konvexní obal množiny řešení je možné najít pomocí Rohnova algoritmu znaménkového souhlasu (sign-accord) [7], [2]. Pro výpočet intervalového obalu je možné použít intervalový Gaussův algoritmus, intervalovou Gauss-Seidelovu metodu a mnoho dalších metod (viz např. Alefeld and Herzberger [1], Neumaier [5], Jansson [3]). Mnoho metod počítá pouze vnější odhad přesných mezí, tzv. enclosure, namísto přesného intervalového obalu.

5. Inverzní stabilita intervalové matice

Definice 3 *Regulární intervalová matice se nazývá inverzně stabilní, jestliže pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ platí buď $A^{-1}_{ij} < 0$ pro každou matici $A \in A^I$, nebo $A^{-1}_{ij} > 0$ pro každou matici $A \in A^I$.*

Pro inverzně stabilní matici A^I definujme vektor $y(i) \in Y$, $(i = 1, \ldots, n)$, těmito vztahy:

$$(y(i))_j = \begin{cases} 1 & \text{je-li } A^{-1}_{ij} > 0 \text{ pro každou } A \in A^I, \\ -1 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Věta 6 (Rohn, 1989 [7]) *Nechť A^I je inverzně stabilní. Potom pro každé $i, (i = 1, \ldots, n)$ platí*

$$\begin{aligned} \underline{x}_i &= (x_{-y(i)})_i, \\ \overline{x}_i &= (x_{y(i)})_i. \end{aligned} \tag{9}$$

Pro získání přesných mezí intervalového vektoru x^I v případě soustavy s inverzně stabilní intervalovou maticí můžeme omezit výpočet z 2^n vektorů x_y na pouhých $2n$ vektorů x_y.

6. Postačující podmínky inverzní stability intervalové matice

Věta 7 (Rohn, 1989 [7]) *Označme $D = |A_c^{-1}|\Delta$, nechť $\rho(D) < 1$. Jestliže platí*

$$D(E - D)^{-1}|A_c^{-1}| < |A_c^{-1}|, \tag{10}$$

potom intervalová matice A^I je inverzně stabilní.

Věta 8 *Nechť R je libovolná čtvercová matice řádu n. Označme $G = |E - RA_c| + |R|\Delta$, nechť $\rho(G) < 1$. Jestliže platí*

$$G(E - G)^{-1}|R| < |R|, \tag{11}$$

potom intervalová matice A^I je inverzně stabilní.

Věta 9 *Nechť G je nezáporná čtvercová matice, nechť $\rho(G) < 1$, nechť je splněna nerovnost*

$$G(E - G)^{-1}|R| < |R|. \tag{12}$$

Potom pro spektrální poloměr matice G platí $\rho(G) < \frac{1}{2}$.

Postačující podmínka inverzní stability velmi zužuje okruh matic A^I, pro které lze jejím použitím ověřit inverzní stabilitu. Tuto postačující podmínku lze ověřit pouze pro matice A^I, pro které $\rho(G) < 1$, ovšem splňovat ji mohou pouze ty matice, pro které $\rho(G) < \frac{1}{2}$.

Pro ilustraci uveďme soustavu s inverzně stabilní maticí A^I:

$$\begin{pmatrix} [2.6, 3.4], & [3.6, 4.4] \\ [-2.4, -1.6], & [0.6, 1.4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [-1, 1] \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Definujme inverzní intervalovou matici $(A^I)^{-1} = [\underline{B}, \overline{B}]$, kde

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \min\{A^{-1}; A \in A^I\}, \\ \overline{B} &= \max\{A^{-1}; A \in A^I\}, \end{aligned} \tag{14}$$

minima a maxima se uvažují po složkách. Pro soustavu (13) dostáváme následující inverzní intervalovou matici

$$(A^I)^{-1} = \begin{pmatrix} [0.0116, 0.1702], & [-0.5486, -0.1787] \\ [0.1025, 0.2611], & [0.0877, 0.4577] \end{pmatrix},$$

tedy matice A^I pro soustavu (13) je inverzně stabilní. Pro spektrální poloměr platí nerovnost $\rho(|A_c^{-1}|\Delta) < 1$:

$$\rho(|A_c^{-1}|\Delta) = 0.3636.$$

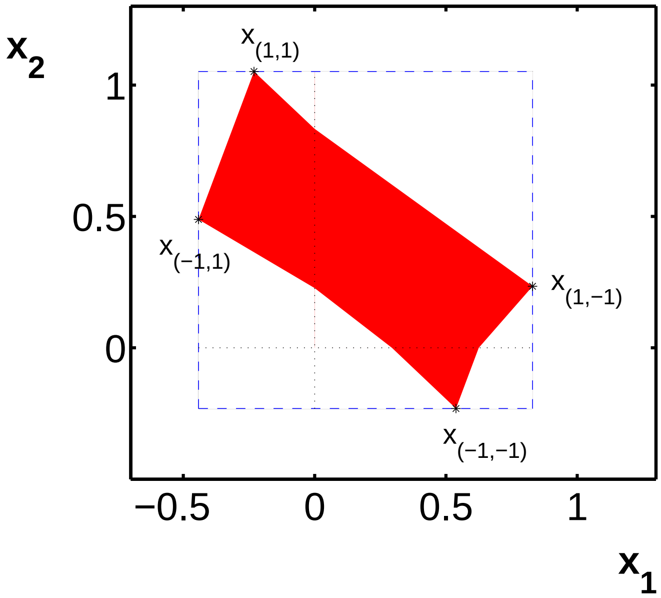
Pro matici A^I soustavy (13) je splněna postačující podmínka (10) a platí nerovnost $\rho(G) < \frac{1}{2}$ z věty 9. Množina X a jednotlivé vrcholy x_y

$$\begin{aligned} x_{(1,-1)} &= (\ \ 0.8298, \ \ 0.2340) \\ x_{(1,1)} &= (-0.2308, \ \ 1.0513) \\ x_{(-1,1)} &= (-0.4419, \ \ 0.4884) \\ x_{(-1,-1)} &= (\ \ 0.5385, -0.2308) \end{aligned}$$

jsou znázorněné na obrázku 3.

7. Závěr

Výpočet přesných mezí intervalového vektoru x^I je pro soustavu s regulární maticí NP-těžký. V případě, že matice A^I je inverzně stabilní, můžeme omezit výpočet z 2^n vrcholů x_y na $2n$ vrcholů x_y, tedy v tomto případě máme k dispozici polynomiální algoritmus pro výpočet přesných mezí. Pokud by nám stačilo místo přesných mezí vypočítat pouze jejich vnější odhad, tzv. *enclosure*, existují polynomiální algoritmy pro jeho výpočet (viz např. [1], [5], [2]). Dále je možné pro výpočet přesných mezí použít algoritmy, jejichž výpočetní složitost je závislá na počtu orthantů p, které mají neprázdný průnik s množinou řešení X ([3], [4]). V případě, že je tento počet malý, například $p \leq n$, vypočítají tyto algoritmy přesné meze množiny řešení v polynomiálním čase.



Obrázek 3: Množina X pro soustavu (13) s inverzně stabilní maticí A^I

Poděkování

Tato práce byla podpořena výzkumným záměrem MSM 6840770001.

Literatura

[1] ALEFELD, G., HERZBERGER, J. *Introduction to Interval Computations.* Academic Press, New York, 1983.

[2] FIEDLER, M., NEDOMA, J., RAMÍK, J., ROHN, J., ZIMMERMANN, K. *Linear Optimization Problems with Inexact Data.* Springer, New York, 2006.

[3] JANSSON, C. Calculation of exact bounds for the solution set of linear interval systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 251:321–340, 1997.

[4] KONÍČKOVÁ, J. On the hull of the solution sets of interval linear equations. In Walter Krämer and Jürgen Wolff von Gudenberg, editor, *Scientific Computing, Validated Numerics, Interval Methods*, pages 91–102. Kluwer, Boston/Dordrecht/London, 2001.

[5] NEUMAIER, A. *Interval Methods for Systems of Equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[6] OETTLI W., PRAGER, W. Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides. *Numerische Mathematik*, 6:405–409, 1964.

[7] ROHN, J. Systems of linear interval equations. *Linear Algebra and Its Applications*, 126:39–78, 1989.

[8] ROHN, J., KREINOVICH, V. Computing exact componentwise bounds on solutions of linear systems with interval data is NP-hard. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 16/2:415–420, 1995.

[9] RUMP, S.M. INTLAB - INTerval LABoratory. In Tibor Csendes, editor, *Developments in Reliable Computing*, pages 77–104. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. `http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/`.

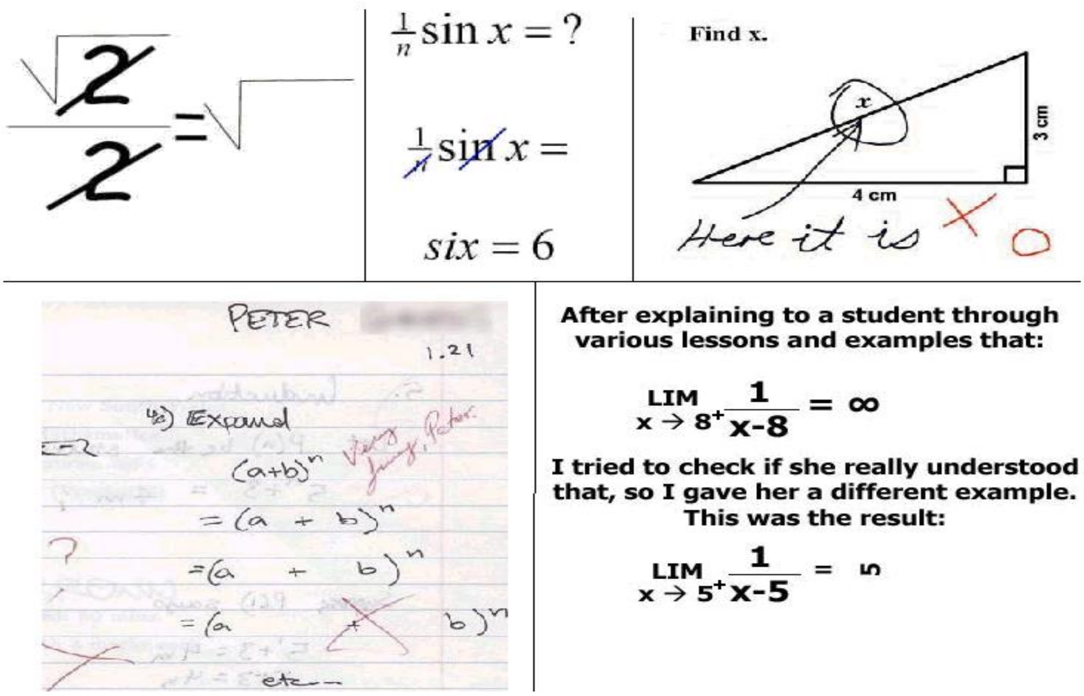
ZKUŠENOSTI S VÝUKOU MATEMATIKY V BAKALÁŘSKÝCH STUDIJNÍCH PROGRAMECH NA FEKT A FIT VUT

Vlasta Krupková[1]

Abstrakt:
Zamyšlení nad ověřováním znalostí v matematice – jak vyzkoušet velké počty studentů pouze písemnou formou.

1. Úvod

Před časem jsme s pobavením zaznamenali následující matematické "znamenitosti", pocházející zřejmě z prací amerických studentů:



Nicméně naši studenti prvního ročníku v pozoruhodnosti svých výpočtů za těmito „vynálezy" nezůstávají příliš pozadu – uvedu zde několik ukázek z písemek BMA1 z 3. ledna 2007:

Jeden příklad měl toto zadání: Předpokládejme, že jsou dány matice zadaných typů:

A	B	C	D	F
5 x 3	5x 3	3 x 4	3 x 4	3 x 5

Určete, které z následujících výrazů jsou definovány. Pro tyto výrazy udejte typ výsledné matice:

BA	AC+D	AF+B	AB+B	F(A+B)	F(AC)	F^T+A	$(A^T$+F)D

Vyskytly se pozoruhodné odpovědi – konstrukce některých výsledků se dá odhalit:

25 x9	18 x 16	20 x 18	30 x 10	30 x 10	30 x 30		

Některé „myšlenkové" postupy mi zůstávají záhadou:

5 x 3	8 x 8	10 x 4	10 x 6	10 x 6	5 x 5		

[1] Ústav matematiky FEKT VUT, Technická 8, 616 00 Brno, krupkova@feec.vutbr.cz

Pozoruhodné byly „metody“ počítání limit:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 0}{\ln 0}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin 3x}\cdot\cos 3x}{\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cotg} 3x}{\operatorname{cotg} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} 3x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} 2x}}=\frac{\frac{1}{0}}{\frac{1}{0}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}=\frac{\frac{1}{\cos 3x}\cdot 3}{\frac{1}{\cos 2x}\cdot 2}=\frac{3\cos 2x}{2\cos 3x}=\frac{1}{1}=-1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|3\cdot(-\sin 2x)\cdot 2|}{\ln|2\cdot(-\sin x)|}=\frac{\ln(-3)}{\ln(-2)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}=\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x$$

Největší novátorství se pochopitelně vyskytlo při integrování:

$$\int\frac{5x^2+9x+10}{x(x^2+6x+10)}\,dx=\int\frac{5x+9+\frac{10}{x}}{(x+3)^2+1}\,dx=\left(5x+9+\tfrac{10}{x}\right)\cdot\operatorname{arctg}(x+3)$$

$$\int\frac{5x^2+9x+10}{x(x^2+6x+10)}\,dx=\int\left(5x^2+9x+10\right)dx-\int\frac{1}{x(x^2+6x+10)}\,dx=5\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}-\ln\left(x(x^2+6x+10)\right)$$

$$\int\frac{5x^2+9x+10}{x(x^2+6x+10)}\,dx=\int\left(\frac{5}{x}+\frac{9}{6x}+\frac{1}{x}\right)dx=5\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{9}{6}\frac{x^{-2}}{-2}+10\frac{x^{-2}}{-2}=\frac{33}{4x^2}$$

$$\int\frac{5x^2+9x+10}{x^3+6x^2+10x}\,dx=\frac{5\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}+10x}{\frac{x^4}{4}+6\frac{x^3}{3}+10\frac{x^2}{2}}$$

některé „myšlenky“ překvapí:

$$\int_0^\infty\left(x+\tfrac{1}{3}\right)e^{-3x}dx=\left|\begin{matrix}3x=t & dx=\frac{1}{3}dt & & \\ (x+\frac{1}{3})dx=\frac{1}{3}dt & & dx=\frac{dt}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}} & dx=\frac{1}{10}dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{10}\int_0^\infty e^{-t}dt$$

někde se dají vystopovat:

$$\int_0^\infty\left(x+\tfrac{1}{3}\right)e^{-3x}dx=\int_0^\infty\tfrac{x}{3}\,dx+\int_0^\infty e^{-3x}dx$$

$$\int_0^\infty\left(x+\tfrac{1}{3}\right)e^{-3x}dx=\int_0^\infty\left(x+\tfrac{1}{3}\right)dx\cdot\int_0^\infty e^{-3x}dx$$

Při výpočtu oboru konvergence mocninné řady se jednak ukázalo, že mnozí toho mnoho netuší o absolutní hodnotě:

$$|x-1|<1\quad\Rightarrow\quad x<2$$

jednak o základních pojmech, jako je konvergence:

$\sum_{n=3}^{\infty}(x-1)^n = \frac{(x-1)^3}{1-(x-1)}$, což je zajisté správně, ale odtud nějak plyne, že $s(x) = -\infty$,

naproti tomu prý $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(x-1)^n = \infty$, ale odtud plyne, že řada konverguje.

Smutné ovšem je, že při současném, pouze písemném způsobu zkoušení jsou navíc zakázány „záporné body“ - tedy některá výše zmíněná nehoráznost nemusí nutně znamenat, že student bude zkoušku opakovat, pouze má 0 bodů za jeden příklad. Dva zde uvedené výpočty spáchali studenti, kteří předmět BMA1 absolvovali.

2. Historie

Matematika se na elektrofakultě vždy zkoušela kombinovanou formou – zkouška měla písemnou a ústní část. Písemné zkouška se skládala z čistě numerických příkladů, příkladů zaměřených teoreticky i teoretických otázek. Ústní zkouška vycházela z této písemky. Zkoušející obvykle se studentem písemku prošel, poukázal na chyby a kladl dotazy, kterými zjišťoval skutečný rozsah znalostí každého studenta. Klasifikační stupnice byla čtyřstupňová, po neúspěšné zkoušce měl student nárok na jeden opravný termín a jeden „děkanský“ termín (podával zdůvodněnou žádost děkanovi). Klady tohoto způsobu zkoušení zřejmě souvisí s osobním kontaktem se studentem při zkoušce – umožňuje ohodnotit skutečné znalosti jednotlivých studentů, nebo jinak formulováno – zjistit, v čem spočívají jejich neznalosti. Vedlejším efektem bylo vytipování talentovaných studentů pro Studentskou tvůrčí činnost.

Tento způsob zkoušení měl však zřejmé nevýhody, které vedly k přechodu na čistě písemnou formu

- výsledek zkoušky mnohdy podstatně závisel na osobě zkoušejícího, různá náročnost a různé požadavky zkoušejících občas vedly k oprávněnému pocitu nespravedlnosti u studentů,
- klasifikační stupnice byla stěží použitelná v kreditovém systému, na který fakulta přecházela,
- při zvyšujícím se počtu studentů bylo třeba omezit časovou náročnost, kterou kombinovaná forma zkoušek znamenala.

Ve školním roce 1991/1992 se skokem přešlo na pouze písemnou formu zkoušky z matematiky (s čistě teoretickou možností ústního přezkoušení), kterou používáme dodnes. Přitom písemka – její koncepce a tvar – se příliš neliší od písemek u kombinované zkoušky, spíše se postupem času úplně vynechaly teoretičtější otázky. Nakonec jsme se dopracovali k tomu, že zkoušíme, jak studenti umí počítat. Navíc, jak je vidět z ukázek nahoře, ani naprosto hrubé nesmysly nemusí znamenat neúspěch. Masivně se rozmáhají různé typy podvodů, každý rok zjistíme případ, kdy někdo pošle za sebe ke zkoušce kolegu. Někteří vyučující dokonce mají tendenci naučit během semestru studenty několik typových příkladů, jejichž varianty (a nic jiného!) se pak dají na písemku.

Máme tu zřejmě problém – co s ním?

Myslím, že vše by mělo začít úvahou, proč matematiku na elektrofakultě vůbec učíme – zřejmě proto, že odborné předměty ani inženýrská praxe se bez ní neobejdou. Matematika je tedy nutný aparát, ale rozhodně to není cíl. Student, který některou zkoušku z matematiky úspěšně absolvuje, by měl umět získané vědomosti použít prakticky, k čemu rozhodně neposlouží to, že se „naučí“ vypočítat pár typů limit a integrálů. Můžeme jistě zařadit příklady s fyzikální nebo odbornou tematikou, ale v prvním semestru se mnoho takových příkladů najít nedá – nemáme k dispozici potřebný matematický aparát, a ty, které zařazujeme, bývají dost triviální a jejich zařazení působí samoúčelně..

Můj námět do diskuse, jak celou situaci řešit, vyplývá ze zkušenosti s předmětem IMA – matematická analýza pro FIT, který od r. 2002 garantuji a učím. Předmět je součástí programu tříletého bakalářského studijního programu Informační technologie. Těžiště matematické náplně tohoto programu je především v Diskrétní matematice a algebře, kde se vyučují partie jako svazy, Booleovské algebry, grafy a základy matematické logiky, které jsou nutné pro další studium speciálních informatických předmětů. Znalost matematické analýzy v těchto předmětech není bezprostředně nutná, proto hodinová dotace předmětu IMA - Matematická analýza byla omezena jen na čtyři týdenní hodiny (dvě hodiny přednášek a dvě hodiny cvičení) v letním semestru prvního ročníku studia. (Poznamenejme, že ve druhém ročníku navazuje ještě předmět Numerické metody a pravděpodobnost).

Při této hodinové dotaci není možný tradiční deduktivní postup, bylo nutné zvolit jinou koncepci. Ta musí vycházet ze základní úvahy – jaké vědomosti by měli studenti mít po absolvování tohoto kursu. Jistě by nemělo jít o mechanickou zručnost v řešení numerických příkladů, spíše o vědomost, ve kterých praktických situacích se metody matematické analýzy uplatní, a dále, co vlastně vypočtený výsledek pro danou situaci znamená. Přitom by výklad měl být také zajímavý – studenti často přicházejí ze střední školy s averzí k matematice (která je ostatně v současné době moderní, kdejaká celebrita se chlubí tím, že matematiku neumí).

Rozhodně nelze prostě všechnu látku nahustit, z toho by byl pouze zmatek jak ve výkladu, tak v hlavách studentů. Cesta je jediná – není možné jít při výkladu příliš do hloubky, je třeba se soustředit na hlavní myšlenky. Přitom by studenti měli vidět i postup při výstavbě dané matematické teorie - jaké jsou zde základní pojmy, jaká o nich platí tvrzení, k čemu jsou dobré, jak se aplikují prakticky.

Základní myšlenka zvolené cesty je v tom, že studenti mají k dispozici (před začátkem semestru!) na webu elektronický text k předmětu – kompletní učebnici, vhodnou i pro samostudium. Každá kapitola je zde uvedena motivací, která vede k zavedení vykládaných pojmů, jsou zařazeny řešené příklady a závěrem každé kapitoly je shrnutí vyložené látky. Důraz je kladen na názornost výkladu – je zde asi 150 doprovodných obrázků. Studenti si mohou texty vytisknout (většinou ale raději pracují s elektronickou formou na notebooku – jsou to informatici) a mají je stále k dispozici jak při přednášce, tak ve cvičeních a při řešení úloh. Přednášky pochopitelně nespočívají v promítání a čtení pasáží z těchto textů – podstatný je komentář, výklad základních pasáží, demonstrace praktických aplikací, počítání ilustračních příkladů se zdůrazněním, které věty jsou při výpočtu použity a co prakticky znamená výsledek. Studenti se také hned na začátku semestru dozvědí, že tento text si mohou vzít sebou k závěrečné zkoušce. Zadání písemky pak z této skutečnosti vychází. Na webu mají před každou přednáškou k dispozici i slajdy se stručným shrnutím látky, navíc na FIT se každá přednáška nahrává (pochopitelně se souhlasem přednášejícího) a může být zveřejněna studentům k samostudiu, event. k připomenutí odpřednášeného.

V každém numerickém i počítačovém cvičení pak studenti vypracovávají krátkou písemku nebo úlohu na právě probranou látku na body, opět pochopitelně s možností použít skripta i vlastní zápisy. Počítačová cvičení se konají s podporou software Maple, jehož má VUT multilicenci. Pro každé cvičení mají studenti předem vypracovány pracovní soubory, v nichž jsou uvedeny a na vzorových příkladech vysvětleny základní příkazy vhodné pro danou kapitolu. Navíc mají zadány tři domácí úlohy na složitější výpočty, které řeší ve skupinách po pěti a v předem určených termínech jejich řešení odevzdají (za každou skupinu v jednom exempláři) a prezentují – vždy jeden vylosovaný student. Každá skupina má své vlastní zadání. Úlohy jsou rovněž bodovány, jak jejich vypracování, tak úroveň prezentace. Celá skupina dostane stejný počet bodů, vždy jen studenti přítomni při prezentaci.

Po šesti letech už je možné konstatovat, že tento postup je úspěšný. Studenti se kromě základní informace o matematické analýze také naučili pracovat s literaturou – vyhledat potřebnou partii a zvolit vhodnou metodu k řešení zadané úlohy.

Ukázky materiálů jsou k dispozici (vždy v letním semestru) na www stránce www.feec.vutbr.cz~krupkova ; v zimním semestru jsou zde podobné materiály pro předměty BMA1 a AMA1.

3. Návrh řešení

V předmětu BMA1 je jistě podstatně méně látky a více času než v IMA, ovšem smysl toho, co by si studenti měli na závěr odnést, by měl být stejný. *Jistě by nemělo jít o mechanickou zručnost v řešení numerických příkladů, spíše o vědomost, ve kterých praktických situacích se přednesená látka uplatní, a dále, co vlastně vypočtený výsledek pro danou situaci znamená*. Domnívám se, že je tedy použitelná stejná metoda – hodnotit co nejvíce a nejčastěji průběžně během semestru a dovolit studentům ke zkoušce ne „tahák“ se vzorci, ale celá skripta, která jsou již k dispozici v tištěné podobě, a o této možnosti hned na začátku semestru studenty informovat. To ovšem znamená zcela jinou formu písemky – zařazovat i otázky, které nezkoušejí jen početní rutinu, ale pokoušejí se zjistit míru pochopení odpřednášené látky, současně s tím by se také měla sledovat pracnost opravování.

Uvádím zde některé typy otázek tohoto druhu, které v písemkách zadáváme. Podotýkám, že v zadání písemky bývá sedm příkladů, každý hodnocený deseti body bez ohledu na obtížnost. Z těchto sedmi příkladů jsou tři až čtyři na rutinní počítání (najít rovnici tečny ke grafu zadané funkce, najít obsah části roviny ohraničené grafy funkcí apod.).

1.Je dána soustava rovnic $\begin{aligned} x + \ \ ay &= 1 \\ ax + 16y &= 4 \end{aligned}$

Pomocí Frobeniovy věty zjistěte, pro která a má tato soustava a) právě jedno řešení b) nekonečně mnoho řešení c) nemá řešení

2. Pro determinant matice A řádu 2 platí $|A| = 2$. Určete hodnoty následujících determinantů: $|A^T| =$, $|A^{-1}| =$, $|2A| =$.

3. Najděte všechna t, pro které existuje inverzní matice k matici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix}$.

4. U každého z následujících výroků rozhodněte, zda je pravdivý nebo nepravdivý. Je-li nepravdivý, uveďte protipříklad.

a) Je-li funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá, je na tomto intervalu integrovatelná.

b) Nechť pro $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$. Potom má funkce f v bodě

x_0 absolutní (globální) minimum na $\langle a,b\rangle$.

c) Platí-li $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje.

5. Pro funkci f definovanou předpisem $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -x & x\in(0,1)\\ 1 & x\in\langle 1,2)\\ 2 & x\in\langle 2,\infty)\end{cases}$

určete $f^{-1}(\{1\})$ a nakreslete grafy funkcí $(f\circ f)(x)$, $|f(x)|$, $f(-x)$.

6. Načrtněte graf funkce, pro kterou platí: $D_f=\mathbb{R}$, je lichá, a pro $x\ge 0$ má tyto vlastnosti: V $x=0$ má nespojitost 1. druhu, v $x=1$ má nespojitost 2. druhu, $f(1)=0,\ f(2)=1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=\infty,\ f'(2)=0$,
$f''(x)<0$ pro $x\in(1,2)$, $f''(x)>0$ pro $x\in(0,1)$ a $x\in(2,\infty)$,
pro $x\to\infty$ má asymptotu $y=x-2$.
Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny resp. polotečny v bodech, kde je známá derivace.

7. Uveďte příklad funkcí f a g, pro které platí:
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=7$.

8. Je dána mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n$. Víme, že řada konverguje pro $x=3$ a diverguje pro $x=4$. Rozhodněte, co se dá tvrdit o konvergenci dané řady pro $x=-3,\ x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=2,\ x=5$.

4. Závěr

Věřím, že u nás existují technické vysoké školy, na kterých se i při vysokých počtech studentů nepřestala matematika zkoušet také ústně. Domnívám se ale, že efektivnější vyzkoušení znalostí teoretického základu písemnou formou může tento proces zjednodušit, a hlavně nám může dodat trochu více jistoty, že výsledné hodnocení daného studenta je v korelaci s jeho znalostmi. Uvítala bych, kdyby se výměna zkušeností na poli ověřování znalostí studentů vysokých škol technického zaměření stala jedním z témat tradičně dobré spolupráce v rámci pořádaných konferencí, jako je tato.

APLIKÁCIA POZNATKOV ZÁKLADNÉHO KURZU MATEMATIKY PRI RIEŠENÍ ÚLOH V MECHANIKE TUHÝCH TELIES

Eva Labašová[1], Jaroslava Trubenová[2]

Abstrakt
Dôležitou súčasťou riešenia úloh a problémov v mechanike tuhých telies (statika, kinematika, dynamika) je vytvorenie mechanického modelu. Na základe mechanického modelu je vytvorený model matematický, ktorý formou matematických vzťahov a rovníc popisuje jeho správanie. Príspevok poukazuje na dôležitosť poznania širokej škály matematického aparátu pre študentov technických univerzít. Konkrétne je príspevok zameraný na aplikáciu poznatkov diferenciálneho počtu reálnej funkcie jednej reálnej premennej a základných poznatkov vektorovej analýzy.

1. Úvod

Kinematika, ktorá je na MtF STU súčasťou predmetu Mechanika tuhých telies (s rozsahom 2/2, druhý ročník, zimný semester), sa zaoberá mechanickým pohybom bodov, telies a sústav telies. Poloha bodu v každom časovom okamihu je jednoznačne daná polohovým vektorom vzhľadom na začiatok zvoleného súradnicového systému, čiže vektorovou funkciou závislou od času.

Predmet Matematika I sa na MtF STU vyučuje v rozsahu 3/3 v prvom ročníku v zimnom semestri. Obsahom tohto predmetu je diferenciálny a integrálny počet reálnej funkcie jednej reálnej premennej. Základy vektorového počtu sa vyučujú v predmete Matematika II (rozsah 3/3) v letnom semestri prvého ročníka. Predmet Lineárna algebra, ktorý sa vyučuje v zimnom semestri druhého ročníka obsahuje aj časť zaoberajúcu sa teóriou vektorov [1,2,3]. Absolvovaním týchto predmetov študenti získajú vedomosti a zručnosti pre počítanie s vektorovou funkciou, ktoré sú potrebné pre určenie požadovaných kinematických veličín.

Najdôležitejším problémom v kinematike je zostavenie pohybových rovníc v parametrickom tvare alebo formou spomínanej vektorovej funkcie. Potom už na základe poznania vzťahov a matematických poznatkov je možné určiť všetky kinematické veličiny.

2. Určenie kinematických veličín pohybu bodu v rovine

Na základe vyučovacích cieľov predmetu Mechanika tuhých telies by študenti mali vedieť okrem iného vyjadriť kinematické veličiny základných rovinných pohybov.

Pri riešení sústav telies (mechanizmov) si musia študenti uvedomiť pohyb jednotlivých členov mechanizmu a následne zostaviť parametrické rovnice pohybu jeho ľubovoľného bodu [4]. Tieto rovnice sú pre rôzne body mechanizmu rôzne. Pre určenie ostatných kinematických veličín platia však rovnaké vzťahy.

V rámci cvičení sa tieto úlohy riešia len analyticky. Dôležité je najmä osvojenie si základných technických súvislostí a postupov, rozvoj technického myslenia. Ucelené

[1] Katedra aplikovanej mechaniky, ÚVSM MtF STU Trnava, Pavlínska 16, 917 24 Trnava, SR, email: eva.labasova@stuba.sk
[2] Katedra aplikovanej matematiky, FPV UCM Trnava, Námestie Jozefa Herdu 2, 917 01 Trnava, SR, email: jaroslava.trubenova@ucm.sk

riešenie úlohy vyžaduje od študentov veľmi dobre osvojené matematické poznatky a schopnosti ich aplikácie v riešení konkrétneho technického problému.

V tejto kapitole je ukázaný princíp riešenia jedného zo zadaní (tab.1), ktoré študenti dostávajú k riešeniu v rámci samostatnej práce. Pri riešení danej úlohy si študenti majú osvojiť najmä spôsob a pravidlá riešenia konkrétnej úlohy a uvedomiť si nutnosť matematických poznatkov nadobudnutých predchádzajúcim štúdiom.

Tabuľka 1

Pre zadané rovnice pohybu bodu M v súradnicovom systéme (0, **i**, **j**) určte: • kinematické veličiny $\vec{\mathbf{v}}$, v, $\vec{\mathbf{a}}$, a, a_t, a_n ako funkcie času t, • polomer krivosti trajektórie R_0 bodu M, • jednotkový tangenciálny vektor $\vec{\tau}$	$x(t) = k\cos t$ $y(t) = b\cos t$ *k, b* sú kladné konštanty *t* je čas

Doporučujeme študentom riešiť tieto zadania bez použitia PC. Samozrejme každý si riešenie môže skontrolovať prostredníctvom rôznych matematických programov. Software Mathematica [5] je jedným z nich a je určený na uľahčenie aplikácií matematiky.

Nasledujúca tabuľka (tab. 2) obsahuje základné vzťahy a tým aj nevyhnutné matematické operácie pre riešenie danej úlohy.

Tabuľka 2

• polohový vektor: $\vec{\mathrm{r}} = x(t)\vec{\mathrm{i}} + y(t)\vec{\mathrm{j}}$	
• vektor rýchlosti a jeho zložky: $\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{\mathrm{r}}}{dt} = \dot{\vec{\mathrm{r}}} = \dot{x}\vec{\mathrm{i}} + \dot{y}\vec{\mathrm{j}} = v_x\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{v_y}\vec{\mathrm{j}}$	• veľkosť vektora rýchlosti: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \dot{s}$
• vektor zrýchlenia a jeho zložky $\vec{\mathrm{a}} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \dot{v}_x\vec{\mathrm{i}} + \dot{\mathrm{v}}_\mathrm{y}\vec{\mathrm{j}} = \ddot{x}\vec{\mathrm{i}} + \ddot{y}\vec{\mathrm{j}} = a_x\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{a_y}\vec{\mathrm{j}}$	• veľkosť vektora zrýchlenia $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
• veľkosť tangenciálneho zrýchlenia $a_t = \ddot{s} = \dot{v}$	• veľkosť normálového zrýchlenia $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$; $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
• veľkosť polomeru krivosti dráhy $a_n = \frac{v^2}{R_0} \Rightarrow R_0 = \frac{v^2}{a_n}$	• jednotkový tangenciálny vektor $\vec{\tau} = \frac{d\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{d\vec{\mathrm{r}}}{dt}}{\frac{\mathrm{d}s}{dt}} = \frac{\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{v}}$

Tabuľka 3 obsahuje zápis príkazov a výpis výsledkov (vpravo) získaných programom Mathematica.

Tabuľka 3

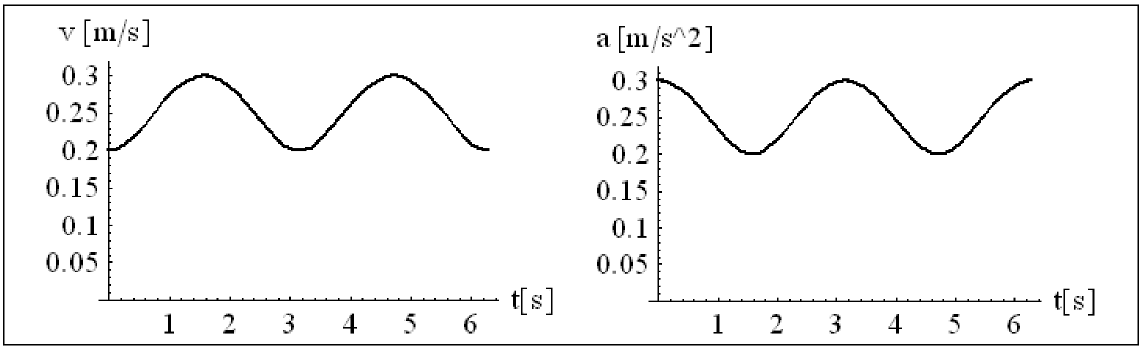
rovnice pohybu - zadanie
x[t_]:= k*Cos[t]
y[t_]:= b*Sin[t]
zápis polohového vektora
pv ={x[t],y[t]} $\{k\,\text{Cos}[t], b\text{Sin}[t]\}$
veľkosti zložiek vektora rýchlosti vx[t], vy[t] a veľkosť vektora rýchlosti v[t]
vx[t_]=D[x[t],t] $-k\,\text{Sin}[t]$
vy[t_]=D[y[t],t] $b\,\text{Cos}[t]$
v[t_]=Sqrt[vx[t]^2+vy[t]^2] $\sqrt{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}$
zápis vektora rýchlosti
vv={vx[t],vy[t]} $\{-k\,\text{Sin}[t], b\text{Cos}[t]\}$
veľkosti zložiek vektora zrýchlenia ax[t],ay[t] a veľ kosť vektora zrýchlenia a[t]
ax[t_]=D[vx[t],t] $-k\,\text{Cos}[t]$
ay[t_]=D[vy[t],t] $-b\,\text{Sin}[t]$
a[t_]=Sqrt[ax[t]^2+ay[t]^2] $\sqrt{k^2\text{Cos}^2[t]+b^2\text{Sin}^2[t]}$
zápis vektora zrýchlenia
va={ax[t],ay[t]} $\{-k\,\text{Cos}[t], -b\text{Sin}[t]\}$
veľkosť tangenciálneho a normálového zrýchlenia
at[t_]=D[v[t],t] $\frac{1}{2}\frac{2k^2\text{Cos}[t]\,\text{Sin}[t]-2b^2\text{Cos}[t]\,\text{Sin}[t]}{\sqrt{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}}$
an[t_]=Sqrt[(a[t])^2-(at[t])^2]
$\sqrt{k^2\text{Cos}^2[t]+b^2\text{Sin}^2[t]-\frac{1}{4}\frac{(2k^2\text{Cos}[t]\,\text{Sin}[t]-2b^2\text{Cos}[t]\,\text{Sin}[t])^2}{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}}$
veľkosť polomeru krivosti dráhy v závislosti na čase
R0[t_]=v[t]^2/an[t]
$\frac{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}{\sqrt{k^2\text{Cos}^2[t]+b^2\text{Sin}^2[t]-\frac{(2k^2\text{Cos}[t]\,\text{Sin}[t]-2b^2\text{Cos}[t]\,\text{Sin}[t])^2}{4(b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t])}}}$
zápis jednotkového tangenciálneho vektora
jtv{vx[t_]/v[t],vy[t_]/v[t]}
$\left\{-\frac{k\,\text{Sin}[t]}{\sqrt{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}}, \frac{b\,\text{Cos}[t]}{\sqrt{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}}\right\}$

Zmenou rovníc pohybu v základnom súbore (x[t], y[t]), prípadne zmenou konštánt *k*, *b* možno podľa daného súboru príkazov určiť všetky kinematické veličiny. Ďalej z hľadiska názornosti je možné zostrojiť grafické závislosti kinematických veličín (veľkosti rýchlosti a veľkosti zrýchlenia) od času. V tom prípade je však potrebné zadať konkrétne číselné hodnoty všetkých konštánt.

3. Zostrojenie grafov rýchlosť – čas a ich analýza

V tabuľke 4 sú uvedené grafy pre predchádzajúcu úlohu, pričom konštanty k, b sú dané nasledovne: k = 0,3 m; b = 0,2m, ide o pohyb bodu po elipse.

Tabuľka 4



Zmenou konštánt, napr: k = b = 0,1 m (pohyb bodu po kružnici) získame nasledovné grafy pre veľkosť rýchlosti a zrýchlenia (tab 5). Veľkosť rýchlosti v je konštantná.

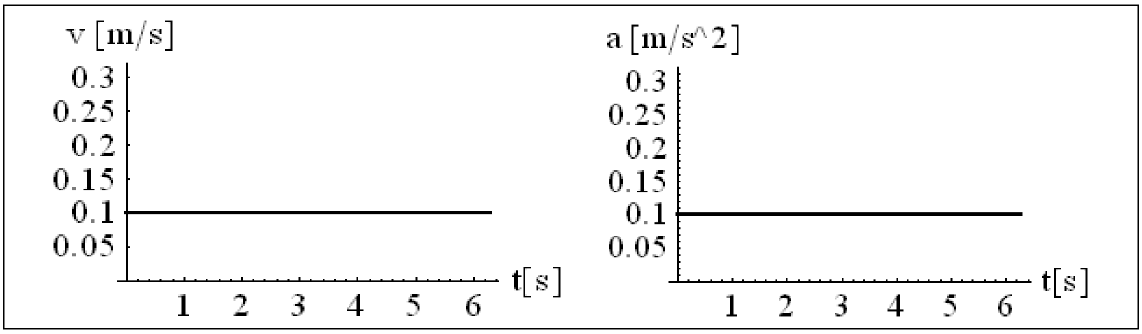
$$v = \sqrt{k^2 \sin^2[t] + k^2 \cos^2[t]} = k \quad [\mathrm{m\,s^{1-}}] \tag{1}$$

Veľkosť tangenciálneho zrýchlenia a_t je nulová (tangenciálne zrýchlenie vyjadruje zmenu veľkosti rýchlosti). Normálové zrýchlenie vyjadruje zmenu smeru vektora rýchlosti. Pri pohybe bodu po krivke sa smer vektora rýchlosti mení a preto aj keď veľkosť rýchlosti je konštantná vzniká pri pohybe bodu po krivke normálové zrýchlenie a_n.

$$a_t = \dot{v} = 0 \tag{2}$$

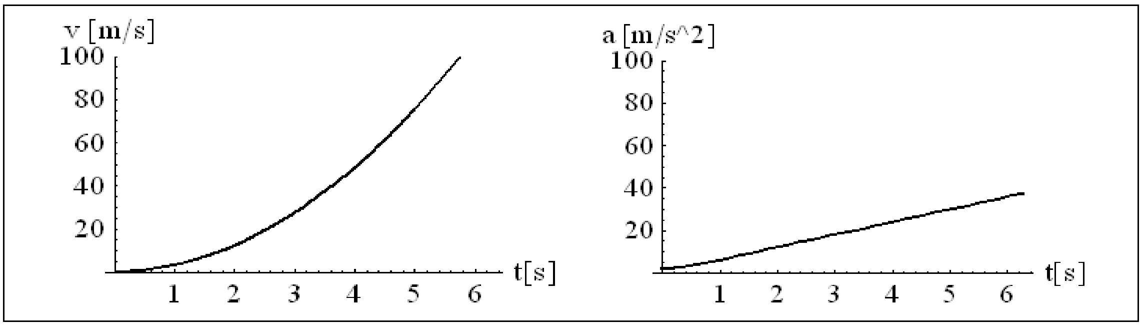
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = a = k \quad [\mathrm{m\,s^{-2}}] \tag{3}$$

Tabuľka 5



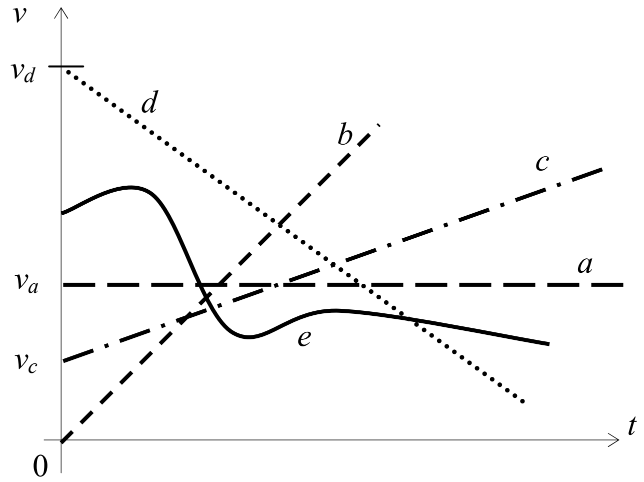
V tab.6 sú grafy pre rovnice pohybu: $x = t^2$; $y = t^3$.

Tabuľka 6



Po zostrojení grafov časových závislostí veľkosti rýchlosti a veľkosti zrýchlenia pre dané pohybové rovnice je vhodné pri analýze týchto grafických závislostí využiť vedomosti z teórie reálnej funkcie jednej reálnej premennej. Z tohto aspektu možno analyzovať zostrojené grafy.

Jednotlivé druhy pohybov (priamočiarych aj krivočiarych) vyskytujúcich sa v bežnej praxi je teda možné zakresliť v diagrame rýchlosť – čas (obrázok 1).



Obr. 1

a - rovnomerný pohyb rýchlosťou v_a

b - rovnomerne zrýchlený pohyb z nulovej začiatočnej rýchlosti

c - rovnomerne zrýchlený pohyb zo začiatočnej rýchlosti o veľkosti v_c

d - rovnomerne spomalený pohyb zo začiatočnej rýchlosti o veľkosti v_d

e - nerovnomerný pohyb

Z matematického hľadiska môžeme grafy znázornené na obr. 1 charakterizovať nasledovne:

a - graf konštantnej funkcie $y = f(t) = v_a = \text{konšt.}, t \geq 0$,

b - graf lineárnej rastúcej funkcie $y = f(t) = k\,t,\ t \geq 0,\ k \geq 0,\ k - \text{konšt.}$,

c - graf lineárnej rastúcej funkcie $y = f(t) = k\,t + v_c,\ t \geq 0,\ k \geq 0,\ k - \text{konšt.}$,

d - graf lineárnej klesajúcej funkcie $y = f(t) = k\,t + v_d,\ t \geq 0,\ k \leq 0,\ k - \text{konšt.}$,

e - graf všeobecnej funkcie $y = f(t),\ t \geq 0$.

4. Záver

Z analýzy danej úlohy vyplýva, že matematické vedomosti a zručnosti sú významnou a dôležitou súčasťou riešenia kinematických, ale vo všeobecnosti aj mechanických úloh. Študenti by sa v technických disciplínach mali zamýšľať hlavne nad technickými princípmi, postupmi a metódami riešenia, matematický aparát by mal byť pre nich samozrejmosťou.

Príspevok sa zaoberá len malou časťou mechaniky tuhých telies. Poukazuje na nutnosť zvládnutia práce s vektorovými funkciami, ich deriváciou a integráciou. V predmete Mechanika tuhých telies, v časti statika sa študenti stretávajú s vektorovými operáciami (súčet vektorov, skalárny a vektorový súčin atď.). V časti statika je taktiež potrebné, aby študenti mali zvládnuté riešenie sústavy lineárnych algebraických rovníc, resp. maticového počtu. V dynamike tuhých telies okrem iného je nutné, aby študenti zvládli aj riešenie diferenciálnych rovníc druhého rádu.

Príspevok prezentuje jeden z mnohých príkladov dôležitého prepojenia a nadväznosti matematických predmetov s odbornými predmetmi pri štúdiu na vysokých školách technického zamerania.

Literatúra

[1] Halabrín M. a kol. *Matematika I.* Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2000, 274 str., ISBN:80-227-1348-1

[2] Halabrin M., Červeňanský J., Palumbíny O. *Matematika II.* Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2005, 213 str., ISBN:80-227-2275-8

[3] Halabrín M. a kol. *Lineárna algebra.* Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2004, 170 str., ISBN:80-227-2275-8

[4] Labašová E. Riešenie prevodových funkcií v kinematike. In *Trendy ve vzdělávaní.* Olomouc. Vydavateľstvo: Votobia. 2008, 567 – 570 str., ISBN 978-80-7220-311-6

[5] Komorníkomá M., Mikula K. *Výpočtový systém Mathematica. Bratislava,* Vydavateľstvo STU, 1998, 198 str., ISBN:80-227-1123-3

GEOMETRIE TENSEGRITŮ

Ondřej Machů[1]

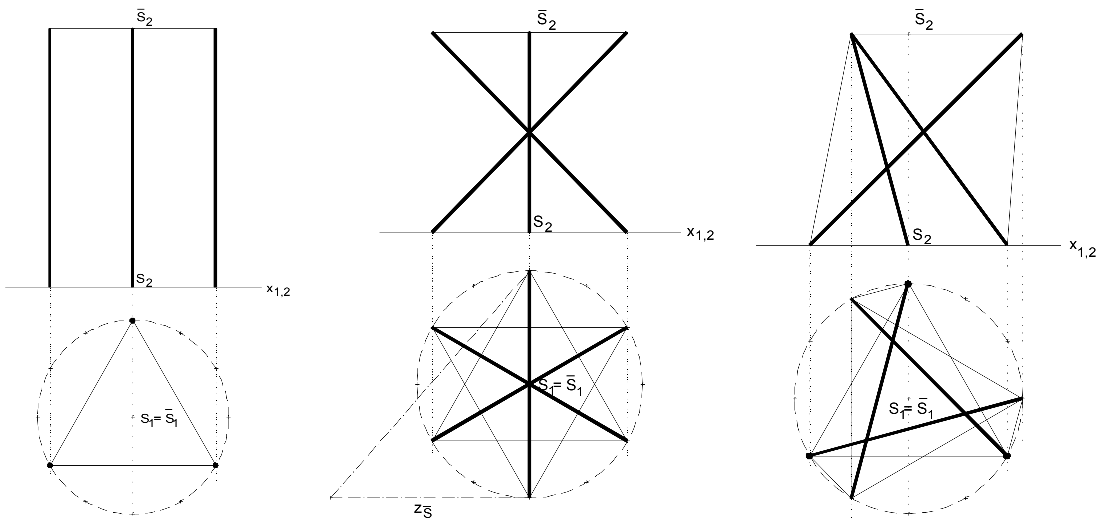
Abstrakt:
Stručné pojednání o tensegritech, krátké objasnění principu tensegrity konstrukce. Geometrický popis dvou vybraných tensegritů.

1. Teorie tensegritů

Slovo tensegrity vzniklo ze slovního spojení „tensional integrity". Tento termín vymyslel Buckminster Fuller jako označení konceptu sochaře Kennetha Snelsona, který v roce 1948 začal tvořit konstrukce na principu tensegrity. Podstata je v nastolení rovnováhy mezi tlakem způsobeným tíhou daných pevných prvků a tahem, který tyto prvky vyvolávají ve svých vzájemných spojeních. V příspěvku se nebudeme zabývat konstrukční povahou tensegritů, ale zaměříme se pouze na geometrickou podstatu. Ze všech možných pravidelných i nepravidelných tensegritů vybereme jako ukázku dva jednoduché tensegrity.

2. Tensegrit tří podpor

Three struts tensegrity structure. Vyjdeme z pravidelného trojbokého hranolu, jehož podstava je tvořena rovnostranným trojúhelníkem. Pobočné hrany jsou tvořeny pevnými podporami (tyče, trámy, …). Rovnostranné trojúhelníky jsou tvořeny lany (obr. 1a). Nyní začneme otáčet horní podstavou kolem osy hranolu. Při zachování délky tyčí horní podstava s tím jak rotuje, také klesá, tudíž vzniká jistý šroubový pohyb. Na konci takovéhoto pohybu bude „kužel", pevné podpory se o sebe zastaví (otočení o přímý úhel π, obr. 1b).



a) **b)** **c)**

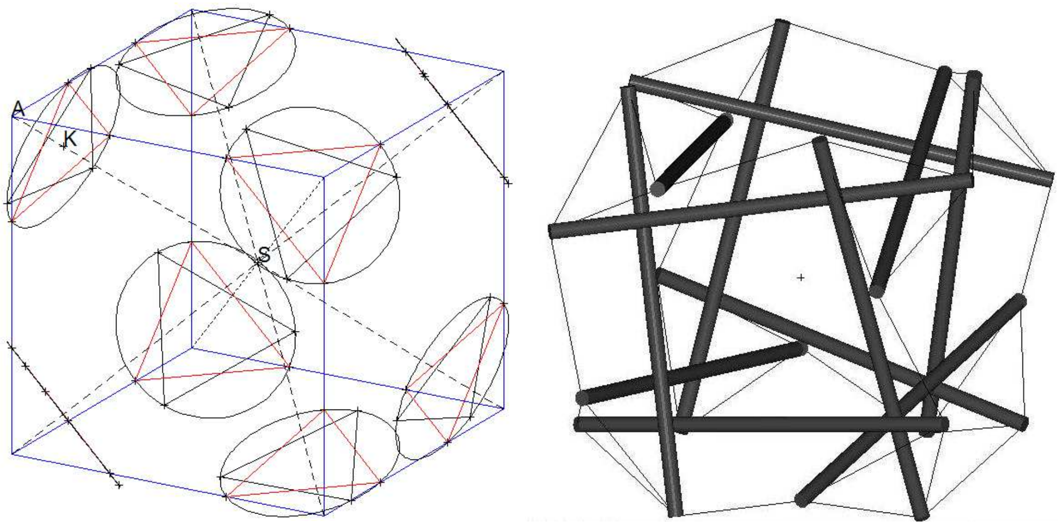
Obr. 1: Tensegrit tří podpor

[1] ČVUT FSv Katedra matematiky, Thákurova 7, 16629 Praha 6, machu@mat.fsv.cvut.cz

My však zastavíme rotaci v úhlu $5\pi/6$. Tyče tensegritu nyní tvoří přímky jednoho regulu rotačního jednodílného hyperboloidu. Lany ještě spojíme konce tyčí tak, aby táhly vrcholy horní podstavy proti směru otáčení (obr. 1c). Podobnou úvahou bychom mohli sestrojit tensegrit s více podporami, kdybychom přímky jednoho regulu nahradili tyčemi a ty pak opět vhodně zafixovali lany proti pohybu dalšího klesání horní podstavy a kroucení struktury.

3. Tensegrit dvanácti podpor

Cube tensegrity structure. Tensegrit vytvořený z krychle. Krychli „uřízneme“ vrcholy, přesněji řečeno sestrojíme řezy rovinami kolmými na tělesové úhlopříčky krychle, které mají vzdálenost od středu krychle menší, než je polovina velikosti tělesové úhlopříčky. Ze symetrie plyne, že takovými řezy jsou rovnostranné trojúhelníky. Vrcholy krychle se tedy rozpadnou na tři body, tzn. že z původních 8 vrcholů krychle získáme 24 vrcholů našeho tensegritu. Získané vrcholy ovšem stále leží na hranách krychle. Vytvořené trojúhelníky tedy otočíme kolem tělesové úhlopříčky o zvolený úhel α (obr. 2a). V případě, že chceme aby tensegritu zůstala opsána stejná kulová plocha jako krychli, promítneme získané vrcholy ze středu krychle na kulovou plochu. Výsledkem je pak tensegrit tvořený 12 podporami a 36 spoji (obr. 2b).



a) b)

Obr. 2: Tensegrit dvanácti podpor

4. Závěr

Tento článek nahlíží na dané téma metodami deskriptivní geometrie. Další má práce se však bude spíše ubírat směrem analytického popisu těchto struktur, zejména pomocí skládání zobrazení.

Literatura

[1] *Kenneth Snelson.*
URL: <http://www.kennethsnelson.net/icons/struc.htm> [cit. 2008-10-15].

[2] *Dynamic 3D Model of Tensegrity Structure.*
URL: <http://complexity.xozzox.de/tensegrity.html> [cit. 2008-10-15].

ŠPECIFIKÁ MATEMATICKEJ PRÍPRAVY GEODETOV V BAKALÁRSKOM STUPNI ŠTÚDIA

Mariana Marčoková[1], Ondrej Kováčik[2], Iveta Vadovičová[3]

Abstrakt:
Počas dlhoročnej výučby matematických predmetov v študijnom programe Geodézia a kartografia v bakalárskom stupni štúdia na Stavebnej fakulte Žilinskej univerzity získali autori dosť dobrý obraz o potrebách matematických vedomostí v odborných predmetoch, ktoré matematiku na tomto študijnom programe používajú. Je známe, že sú tu isté rozdiely (a to dosť podstatné), ktoré by mali odlišovať matematickú prípravu geodetov od matematickej prípravy ostatných „stavbárskych" bakalárov. Matematika na študijnom programe Geodézia a kartografia je zaujímavá aj pre študentov študijného programu Aplikovaná matematika na Fakulte prírodných vied Žilinskej univerzity. Dôkazom toho je aj to, že bola v tomto študijnom programe spracovaná a obhájená diplomová práca z tejto tématiky a pripravuje sa aj dizertačná práca zameraná na špeciálne funkcie v geo-vedách. Autori sa tiež pokúsia poukázať na vplyv výučby špeciálnych matematických oblastí na vedeckú prácu v oblasti aplikovanej matematiky.

1. Úvod a trochu histórie

Na začiatku akademického roku 2008/2009 oslavuje Žilinská univerzita v Žiline 55. výročie svojho založenia. Je to príležitosť k tomu, aby sme sa obzreli späť do histórie, poučili sa z nej a prehodnotili v čom môže mať minulosť pozitívny vplyv na dianie v súčasnosti a v budúcnosti. Tak je to aj so študijnými programami univerzít a vysokých škôl, ktoré sa v minulosti akreditovali ako študijné odbory a dnes (v čase transformácie vysokého školstva) sa akreditujú ako študijné programy v dvoch alebo troch stupňoch.

Žilinská univerzita má svoje korene na Vysokej škole železničnej (VŠŽ), ktorá bola založená 1. októbra 1953 v Prahe. Mala 5 fakúlt: Fakultu dopravnú, Stavebnú fakultu, Strojnícku fakultu, Elektrotechnickú fakultu a Vojenskú fakultu. V roku 1959 bola VŠŽ premenovaná na Vysokú školu dopravnú (VŠD), ktorá už mala len 3 fakulty. Jednou z nich bola Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy (PED), ktorá vznikla zlúčením bývalej Fakulty dopravnej so Stavebnou fakultou. Vtedy sa na Stavebnej fakulte vyučovalo len v jednom študijnom odbore, a to:Stavebná údržba a rekonštrukcia tratí. Bolo to tak aj v roku 1960, keď sa škola presídlila do Žiliny a bola v bývalom Československu jedinou celoštátnou vysokou školou zameranou na dopravu. Od 1.1. 1980 bola VŠD premenovaná na Vysokú školu dopravy a spojov v Žiline (VŠDS).

Stavebná fakulta Vysokej školy dopravy a spojov v Žiline obnovila svoju činnosť v roku 1990 a následne dosiahla akreditáciu svojich študijných odborov vo februári 1991. Od 20.novembra 1996 sa zmenil názov školy na Žilinská univerzita v Žiline. Univerzita má v súčasnosti 7 fakúlt. Stavebná fakulta je jednou z nich. Hneď po akreditácii bola spracovaná pedagogická dokumentácia pre bakalárske štúdium v študijných odboroch:

[1] Fakulta prírodných vied, Žilinská univerzita v Žiline, mariana.marcokova@fpv.uniza.sk
[2] Fakulta prírodných vied, Žilinská univerzita v Žiline, ondrej.kovacik@fpv.uniza.sk
[3] Fakulta prírodných vied, Žilinská univerzita v Žiline, iveta.vadovicova@fpv.uniza.sk

1. Geodézia
2. Staviteľstvo so zameraniami:
    - Železnice
    - Cesty a mosty
    - Pozemné staviteľstvo

s dĺžkou štúdia 3 roky.

Do prvého ročníka na toto štúdium sa začali prijímať študenti od akademického roku 1992/1993. Počas štúdia bolo možné prestúpiť na inžiniersku formu štúdia len z odboru Staviteľstvo, ak študent absolvoval predpísané diferenčné skúšky. Z odboru Geodézia bolo možné takýto prestup uskutočniť len na inú univerzitu alebo inú vysokú školu, kde bol tento odbor akreditovaný ako študijný odbor. Na bakalárske štúdium bolo možné prestúpiť z inžinierskeho štúdia.

Súčasný stav je odlišný. „Staviteľských“ študijných programov bakalárskych aj inžinierskych je viac, ale v tomto článku sa im nebudeme venovať. Bakalársky študijný program Geodézia má už niekoľko rokov iný názov: Geodézia a kartografia.

Obr. 1: Logo 55. výročia založenia Žilinskej univerzity

Ešte v krátkosti zhrnieme 55-ročnú históriu matematickej katedry, ktorej učitelia na Stavebnej fakulte ŽU v celej jej histórii vyučovali. Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie na VŠŽ od 1.októbra 1953 patrila k Elektrotechnickej fakulte, ale zabezpečovala výučbu matematiky na všetkých fakultách VŠŽ. Od akademického roku 1956 – 1957 sa stala súčasťou Stavebnej fakulty VŠŽ ako aj súčasťou Stavebnej fakulty VŠDS (neskôr ŽU) po obnovení činnosti tejto fakulty od roku 1990, ale už pod názvom Katedra matematiky. Tam bola začlenená až do 1.októbra 1998, kedy bola založená Fakulta prírodných vied ŽU (FPV ŽU), na ktorú Katedra matematiky prešla zo Stavebnej fakulty. V súčasnosti zabezpečujú výučbu matematických predmetov na Stavebnej fakulte ŽU matematici z FPV ŽU, čo má svoje pozitívne, ale aj negatívne stránky.

2. Matematika na študijnom odbore Geodézia

Z profilu absolventa tohto štúdia vyplývalo, že po ukončení štúdia má absolvent uplatnenie hlavne na úradoch pozemkového katastra a v štátnej správe geodézie a kartografie. Pre stavebné organizácie je schopný vyhotovovať grafické a číselné podklady pre projektovanie líniových a plošných stavieb a vyprojektované stavby vytyčovať.

Počas štúdia absolvoval študent tohoto odboru skúšky z teoretických predmetov (matematika a fyzika) a predmetov geodézie a kartografie. Štúdium bolo tiež zamerané na automatizáciu meračskej, výpočtovej a zobrazovacej činnosti geodeta.

Matematika sa na tomto študijnom odbore vyskytovala v študijných plánoch prvých 3 semestrov ako Matematika I, Matematika II a Matematika III. Každá bola v rozsahu 2-2 (teda týždenne 2 hodiny prednášok a 2 hodiny cvičení) a končila sa zápočtom a skúškou. Okrem toho si v druhom semestri prvého ročníka mohol študent zvoliť Matematický seminár v rozsahu 0-2 končiaci zápočtom ako voliteľný predmet.

Osnovy predmetu Matematika I obsahovali lineárnu algebru, analytickú geometriu v rovine, analytickú geometriu v priestore a základné pojmy sférickej geometrie. Posledná časť, hlavne sférická trigonometria sa na iných odboroch (či už bakalárskych alebo inžinierskych) nevyučovala, vyžadoval si ju len študijný odbor Geodézia.

Osnovy predmetu Matematika II obsahovali diferenciálny počet funkcie jednej a viac reálnych premenných (pre funkcie viac premenných len v rozsahu – limita funkcie viac premenných a parciálne derivácie), neurčitý integrál a určitý integrál s aplikáciami a približným výpočtom určitých integrálov.

Osnovy predmetu Matematika III obsahovali nekonečné číselné rady a funkcionálne rady a základy teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky.

V Matematickom seminári sa študentom ponúkali tieto oblasti matematiky: štruktúra reálnych a komplexných čísel, postupnosti reálnych čísel a numerické riešenie algebraických rovníc.

3. Matematika na študijnom programe Geodézia a kartografia

Počnúc akademickým rokom 2005/2006 sa študijný odbor Geodézia transformoval na študijný program Geodézia a kartografia. Na Stavebnej fakulte ŽU sa opäť vyučuje len v bakalárskom stupni, ale aj externou formou v rámci celoživotného vzdelávania. Profil absolventa sa v zásade nezmenil, ale pozitívom je to, že v študijných plánoch tohto študijného programu pribudol v prvom semestri voliteľný predmet Deskriptívna geometria a v druhom semestri pribudol voliteľný predmet Metódy zobrazovania. Vyžadovalo si to najmä prispôsobenie obsahu štúdia tak, aby bolo kompatibilné s obsahom štúdia na iných stavebných fakultách, kde sa tento inžiniersky študijný program vyučuje. Väčšina absolventov bakalárskeho študijného programu Geodézia a kartografia chce totiž pokračovať v inžinierskom stupni na Slovenskej technickej univerzite v Bratislave a keď uvedené dva predmety neabsolvovali, tak potom v inžinierskom štúdiu musia z nich urobiť rozdielové skúšky. Okrem toho sa zvýšil rozsah predmetu Matematika I z rozsahu 2-2 na rozsah 3-3 a Matematický seminár si v súčasnosti môžu študenti zvoliť v prvých dvoch semestroch, teda môžu si zapísať Matematický seminár I alebo Matematický seminár II alebo oba semináre.

Vzhľadom na tieto rozsahové zmeny sa musel zmeniť aj obsah matematických predmetov. Matematika I sa v súčasnosti prednáša spolu pre všetky študijné programy Stavebnej fakulty, čo činí v prvom ročníku asi 400 študentov. Z toho je asi 60 študentov zapísaných na študijný program Geodézia a kartografia. V minulosti patrili študenti tohoto študijného programu medzi tých, ktorí prišli zo strednej školy s lepšími študijnými výsledkami, a teda aj matematika bola pre nich zaujímavým predmetom a učitelia matematiky sa tešili, keď ju tam vyučovali. Dnes – v období masového prijímania na vysoké školy – sa aj na tento študijný program dostanú študenti, ktorí matematiku nezvládajú.

A ako je to s obsahom matematických predmetov na študijnom programe Geodézia a kartografia v súčasnosti?

Osnovy predmetu Matematika I obsahujú lineárnu algebru, analytickú geometriu v priestore a diferenciálny počet funkcie jednej reálnej premennej.

Osnovy predmetu Matematika II obsahujú integrálny počet funkcie jednej reálnej premennej s aplikáciami určitého integrálu a diferenciálny počet funkcie viac reálnych premenných.

Osnovy predmetu Matematika III obsahujú nekonečné číselné rady, funkcionálne rady, diferenciálne rovnice prvého rádu, lineárne diferenciálne rovnice vyšších rádov, základy diferenciálnej geometrie a sférickej geometrie, ktorá sa presunula z prvého semestra do tretieho. Teóriu pravdepodobnosti a matematickú štatistiku sme museli prenechať kolegom z Katedry geodézie Stavebnej fakulty, ktorí ich vyučujú v rámci predmetu Vyrovnávací počet.

Matematický seminár I a Matematický seminár II sa musia venovať vyrovnávaniu vedomostí zo strednej školy, keďže študenti prichádzajú študovať na vysokú školu s rôznymi matematickými vedomosťami, a prehlbovaniu učiva preberaného v rámci Matematiky I a Matematiky II.

4. Vplyv výučby matematiky na študijnom programe Geodézia a kartografia na študijný program Aplikovaná matematika Fakulty prírodných vied ŽU

Možno konštatovať, že bakalársky študijný program Geodézia a kartografia má na Stavebnej fakulte Žilinskej univerzity rozsahom aj obsahom viac matematiky (a deskriptívnej geometrie) ako ostatné bakalárske študijné programy tejto fakulty. Pre učiteľov matematických predmetov na tomto študijnom programe je preto inšpiráciou pre vypisovanie tém diplomových prác a tém dizertačných prác v študijnom programe Aplikovaná matematika Fakulty prírodných vied Žilinskej univerzity. Matematické modelovanie v geodézii je aj súčasťou obsahu doktorandského študijného programu Aplikovaná matematika, ktorý sa uskutočňuje aj na iných univerzitách v SR.

Konkrétne v roku 2006 bola na FPV ŽU v magisterskom študijnom programe Aplikovaná matematika úspešne obhájená diplomová práca s názvom „Sférická trigonometria ako zobrazenie z R^N do R^M a jej aplikácie v technickej praxi“. Dôraz bol postavený na súborné zhrnutie poznatkov zo sférickej trigonometrie a tiež na ich aplikáciu s použitím rôznych zobrazovacích metód v geodézii. Diplomant sa v práci venoval matematickému aparátu používanému v geodézii, pričom zvýraznil spôsoby geodetického prístupu k idealizácii geoidu ako reálneho zemského telesa.

V doktorandskom študijnom programe Aplikovaná matematika na FPV ŽU sa v súčasnosti spracováva dizertačná práca s názvom „Ortogonálne polynómy a iné špeciálne funkcie v geo-vedách“. Externý doktorand si vybral túto tému po predchádzajúcom vyučovaní matematických predmetov na študijnom programe Geodézia a kartografia, čo dokazuje, že ho zaujalo matematické modelovanie v geodézii a kartografii. Práca bude zameraná na použitie špeciálnych funkcií pri matematickom modelovaní v geo-vedách. Je známe, že v tzv. geomatematike je dôležitým nástrojom teória aproximácie funkcií, ako je vidieť už z názvu knihy [2]. Tu sa často používajú klasické alebo zovšeobecnené Legendreove ortogonálne polynómy a pridružené Legendreove funkcie. Základné poznatky o nich je možné nájsť v [1]. Aplikácie sú ukázané napríklad v [3] a v [4].

V roku 2005 požiadali niektorí učitelia Katedry matematiky Fakulty prírodných vied Žilinskej univerzity grantovú agentúru KEGA (Kultúrna a edukačná grantová agentúra) SR o financovanie projektu „Matematické predmety niektorých technických študijných programov všetkých troch stupňov vysokoškolského vzdelávania na Žilinskej univerzite z hľadiska nadväznosti odborných predmetov na ne a z hľadiska internacionalizácie štúdia“. Tento projekt grantová agentúra odporučila na financovanie v rokoch 2006-2008. V rámci tohoto projektu vzniklo niekoľko odborných článkov, ktoré sa týkajú vyučovania matematických predmetov na Stavebnej fakulte ŽU a na Fakulte špeciálneho inžinierstva ŽU a ich vzájomnej odlišnosti vzhľadom na rôzne študijné programy, nevynímajúc bakalársky študijný program Geodézia a kartografia. Tu sme všetci konštatovali, že klesá úroveň vedomostí z geometrie maturantov prichádzajúcich študovať na vysokú školu alebo univerzitu technického zamerania. Problematikou potreby zlepšiť geometrické myslenie a predstavivosť študentov niektorých študijných programov na vysokých školách a univerzitách technického zamerania sa zaoberal doc. RNDr. Ondrej Kováčik, CSc., ktorý je vedúcim riešiteľského kolektívu uvedeného projektu. Na túto tému predniesol niekoľko prednášok na význačných konferenciách organizovaných na Žilinskej univerzite ako aj mimo nej. Prednášku „Geometria poznania a poznanie geometrie“ predniesol na medzinárodnej vedeckej konferencii „Riešenie krízových situácií v špecifickom prostredí“ organizovanej Fakultou špeciálneho inžinierstva ŽU v dňoch 28. – 29. mája 2008 v Žiline. Prednáška bola publikovaná v [5]. Ďalšiu prednášku s názvom „Some new denotation for some geometrical objects“ predniesol na medzinárodnej vedeckej konferencii „ Real functions theory“ organizovanej Matematickým ústavom SAV v Starej Lesnej v dňoch 31.8. – 5.9. 2008. Prednášku na tému „A new look on geometrical objects in E_n “ predniesol na medzinárodnej vedeckej konferencii „Spaces between us“ organizovanej Matematickým ústavom Akademie věd ČR a Karlovou univerzitou v Prahe v dňoch 26.-29. septembra 2008.

Sme radi, že výučba matematických predmetov na študijnom programe Geodézia a kartografia je pre nás – učiteľov matematiky pôsobiacich v súčasnosti na Fakulte prírodných vied ŽU, prínosom aj pre študijné programy tejto fakulty a obrátene študijný program Aplikovaná matematika na FPV ŽU poskytuje podnety pre zlepšenie obsahu a metód matematickej prípravy geodetov.

<u>Poďakovanie:</u> Autori ďakujú grantovej agentúre KEGA za finančnú podporu práce v rámci grantu č. 3/4068/06.

Literatúra

[1] ANDREWS, L. C.: *Special functions of mathematics for engineers*. McGraw-Hill, Inc.1992, ISBN 0-07-001848-0.

[2] FREEDEN, W., GERVENS, T., SCHREINER, M..: *Constructive Approximation on the Sphere. With Applications to Geomathematics.* Oxford: Clarendon Press 1998, ISBN 0-19-853682-8.

[3] GULDAN, V.: Nekonečné rady, špeciálne funkcie a študijný program Geodézia a kartografia. *3. žilinská didaktická konferencia DIDZA,* Žilinská univerzita 2006, ISBN 80-8070-557-7, CD ROM, 5. strán.

[4] JANECKI, D., STEPIEN, K.: Legendre Polynomials Used for the Approximation of Cylindrical Surfaces. *Komunikácie – vedecké listy ŽU,* ISSN 1335-4205, 4/2005, 59 – 61.

[5] KOVÁČIK, O.: Geometria poznania a poznanie geometrie. *13. medzinárodná konferencia „Riešenie krízových situácií v špecifickom prostredí"*, Žilinská univerzita 2008, ISBN 978-80-8070-847-4, 407 – 410.

O jednom problému lineární algebry v souvislosti s internetovým vyhledávačem GOOGLE

Ivo Marek *

Abstract

S cílem zaručit dostatečně velkou účinnost iterační agregační metody k výpočtu stránkového ocenění (anglicky PageRank) odpovídajícího Markovovského řetězce systému vyhledávače GOOGLE je zapotřebí zobecnit jisté lemma pomocí něhož lze určit rychlost konvergence odpovídajícího iteračního procesu. Důkazu tohoto tvrzení a stručné diskuzi je věnován tento příspěvek.

1 Úvod

Zájem o vnitřní strukturu vyhledávače GOOGLE až neuvěřitelně vzrostl, když se začaly objevovat některé detaily jeho výstavby a matematického zázemí. Zájem ještě nabyl na intenzitě po vydání monografie [4] věnované zejména matematickým otázkám tohoto pozoruhodného internetového prostředku moderní informační éry. Je pochopitelné, že zmíněný zájem nejen, že neupadá, ale stále narůstá, zejména mezi odborníky z příslušných oborů. Čtenářům, kteří se chtějí seznámit s podrobnějšími informacemi jak o GOOGLE jakožto prostředku komunikace tak s funkcemi jednotlivých jeho částí jakožto aplikací a realizací a vynikajících ideí, můžeme jen znovu a znovu doporučit již citovanou monografii. Je zajisté pozoruhodné, že tvůrci vyhledávače GOOGLE jsou dva studenti na Stanford University, kteří ještě v devadesátých létech byli doktorandy a dnes zaměstnávají své někdejší profesory, kteří jakožto zaměstnanci svých někdejších žáků pobírají platy řádově přesahující jejich platy, když ještě školili své tolik úspěšné žáky. Co zbývá dodat? Jména obou těch nejdůležitějších, dnes slavných bývalých studentů: Larry Page a Sergey Brin.

GOOGLE je navýsost složitý informatický systém mající matematickou či spíše výpočetní složku. Tato součást pracuje na bázi Markovovského řetězce. Výpočet stránkového ocenění je totožný s výpočtem stacionárního vektoru pravděpodobnosti příslušné matice přechodu. Výpočet vektoru pravděpodobnosti se v GOOGLE realizuje pomocí mocninné metody. Je-li tedy $G^{(1)}$ matice přechodu aktuálního Markovova řetězce, pak matice $G(\alpha) = \alpha G^{(1)} + (1-\alpha)ve^T$, kde v je t.zv. *personalizační vektor*, $e^T = (1, ..., 1)$ a $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, se nazývá *GOOGLEovská matice*. Hledaný vektor je tedy dán formulí

$$\hat{x}(\alpha) = \lim_{k\to\infty} [G(\alpha)]^k e. \tag{1.1}$$

*Stavební fakulta, České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, (marek@ms.mff.cuni.cz).

Otázkou je jak často systém GOOGLE aktualizovat. K tomu je nutné znát rychlost konvergence procesu popsaného v (1.1) a pomocí této veličiny určit periodu aktualizace. Výpočet dostatečně přesné aproximace veličiny (1.1) není snadný: GOOGLEovská matice mám (podle aktuálních odhadů cca 5.10^9 řádků! Ukážeme si jak potřebnou rychlost určit. Výsledek je: Aktualizace se provádí jednou za měsíc.

Náš zájem bude samozřejmě směřovat do matematiky a jmenovitě do lineární algebry. Je namístě uvědomit si, že situace v dalších oborech jakými jsou informatika, linguistika, kódování, protože eventuální, byť jediné slabá součást systému GOOGLE, by měla za důsledek jeho oslabení jako celku.

A nyní již k matematice! Jak rychle konveruje posloupnost mocnin GOOGLEovské matice k Perronově projekci? Jinými slovy, jak rychle konveruje posloupnost

$$\left\{[G(\alpha)]^k e - \hat{x}\right\}$$

k nulovému vektoru. Na tuto otázku a nejen na ni odpovídá náš příspěvek. Předkládáme totiž alternativní způsob výpočtu umožňující vnést do výpočtu další informace a pomoci tak eliminovat akce t.zv. hackerů v jejich snaze o nekalé vylepšování svých skore pro výpočet jejich stránkového ocenění. Naše metoda IAD je analyzována v oslední části tohoto pojednání.

2 Definice a značení

Nebude-li explicitně uvedena jiná skutečnost, vyšetřovány budou čtvercové matice rozměru $N \times N$.

Jak je obvyklé, symbolem

$$\rho(C) = \max\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(C)\right\},$$

budeme označovat spektrální poloměr matice C t.j.

$$\rho(C) = \max\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(C)\right\},$$

where $\sigma(C)$ denotes the spectrum of C.

Dále pak klademe

$$\gamma(C) = \sup\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(C), \lambda \neq \rho(C)\right\}.$$

a veličinu $\gamma(C)$ nazýváme faktorem konvergence matice C.

Posléze definujeme veličinu $\tau(C)$, kterou nazýváme *spektrálním pseudopoloměrem* matice C.

2.1 Definice Pro libovolnou $N \times N$ matici $C = (c_{jk})$, kde $c_{jk}, j, k = 1, ..., N$, jsou komplwexní čísla, nechť

$$\tau(C) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(C), |\lambda| \neq \rho(C)\}.$$

POZNÁMKA Pro pseudopoloměr konvergence matice C platí nerovnosti

$$\rho(C) \geq \gamma(C) \geq \tau(C)$$

Budeme předpokládat, že p je celé kladné číslo a B nerozložitelná stochastická matice se spektrálním rozkladem

$$B = Q + Z,\ Q^2 = Q, QZ = ZQ = 0,\ \rho(Z) < 1,$$

v němž

$$Q = \sum_{j=1}^{p} \lambda^{j-1} Q_j,\ Q_j Q_k = Q_k Q_j = \delta_{jk} Q_j, j, k = 1, ..., p.$$

Poznamenejme, že předchozí formule popisují dvě v zásadě odlišné situace. Těmi jsou *případ primitivní* (pro $p = 1$) a *cyklický* (pro $p > 1$).

3 Googleovské aplikace

3.1 Motivační příklad

Vyšetřujme následující systém problémů parametrizovaných parametrem $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$:

$$G(\alpha) = \alpha G^{(1)} + (1 - \alpha) G^{(2)},$$

kde $G^{(1)}$ je (sloupcově) stochastická matice a $G^{(2)}$ je vhodná irreducibilní stochastická matice "malého " řádu.

Jako prototyp našich výsledků může sloužit následující

3.1 Věta *Za předpokladu, že $G^{(2)} = ve^T$, při čemž v je vektor mající všechny komponenty kladné, a $e^T = (1, ..., 1)$, $e^T v = 1$, i.e. $G^{(1)}$ představuje primitivní stochastickou matici hodnosti jedna.*

Potom

$$\gamma(G(\alpha)) \leq \alpha.$$

Snadno prověříme, že

$$Q(\alpha) G(\alpha) Q(\alpha) = G(\alpha) Q(\alpha) = Q(\alpha)$$

a

$$(I - Q(\alpha))\, G^{(2)} \,(I - Q(\alpha)) = \left(G^{(2)} - Q(\alpha)\right)(I - Q(\alpha)) = G^{(2)}\,(I - Q(\alpha)) = 0. \tag{3.1}$$

Platnost tvrzení dokazované Věty plyne z rovnosti

$$G(\alpha) = Q(\alpha) + (I - Q(\alpha))\, \alpha G^{(1)}\, (I - Q(\alpha)).$$

Výše uvedený důkaz otvírá cestu k dalším zobecněním. Jako podstatný se jeví speciální vztah mezi původní maticí přechodu $G^{(1)}$ a poruchovou maticí $G^{(2)}$ spočívající v rovnosti (3.1).

4 Agregační a desagregační komunikace

Nechť $\mathcal{E} = \mathcal{R}^N, \mathcal{F} = \mathcal{R}^n, n < N,\ e^T = e(N)^T = (1, ..., 1) \in \mathcal{R}^N$. Dále nechť $\mathcal{G}$ označuje zobrazení definované na indexových množinách:

$$\mathcal{G} : \{1, ..., N\} \overset{na}{\rightarrow} \{1, ..., n\}$$

S tímto značením lze psát $e^T = (e(r_1)^T, ..., e(r_n))^T)$, kde

$$r_j = \mathrm{card}\left(\left\{\bar{j} \in \{1, ..., N\} : \mathcal{G}(\bar{j}) = j\right\}\right).$$

Iterační agregačně/desagregační komunikační operátory jsou definovány pomocí formulí

$$(Rx)_{\bar{j}} = \sum_{\mathcal{G}(j)=\bar{j}} x_j$$

$$S = S(u),\ (S(u)z)_{\bar{j}} = \frac{u_j}{(Ru)_{\bar{j}}}(Rx)_{\bar{j}}.$$

Z těchto vzorečků okamžitě plyne, že

$$RS(u) = I_{\mathcal{F}}$$

Dále pak pro *agregační projekci* platí $P(x) = S(x)R$

$$P(x)^T e = e \quad \forall x \in \mathcal{R}^N, x_j > 0, j = 1, ..., N$$

a

(4.2) $$P(x)x = x \quad \forall x \in \mathcal{R}^N, x_j > 0, j = 1, ..., N$$

Definujme *agregovanou matici* jakožto

$$\mathcal{B}(x) = RBS(x)$$

Vážnou otázkou je jak vybrat zobrazení $\mathcal{G}$.

Přirozeně, odpověd je jednodušší, má-li B "vhodnou" blokovou strukturu, na př.

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & . & . & . & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & . & . & . & B_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{n1} & B_{n2}, & . & . & . & B_{nn} \end{pmatrix}, \text{ with diagonal } n_j \times n_j \text{ block } B_{jj},\ j = 1, ..., n.$$

V takovém případě, klademe obvykle,

$$\bar{j} = \mathcal{G}(j) \text{ for } n_0 + n_1 + ... + n_{j-1} + 1 \le j \le n_0 + n_1 + ... + n_{j-1} + n_j,\ n_0 = 0.$$

a to značí, že každý z bloků B_{jk} se agreguje do 1×1 matice.

Naopak, zobrazení $\mathcal{G}$ dává možnost vytvořit odpovídající blokovou formu matice B (samozřejmě až na nějakou permutaci).

Obecně, najít "adekvátní" zobrazení $\mathcal{G}$ je velice obtížný úkol a každá dobrá rada je vítána. V praxi se zpravidla využívá informace o problému a často nemající s matematikou příliš společného.

5 IAD Algoritmy

Algoritmus SPV$(B; T; t, s; \mathcal{G}; x^{(0)}; \varepsilon)$

Buď B $N \times N$ irreducibilní stochastická matice a $\hat{x}$ její jediný stacionární vektor pravděpodobnosti. Dále, buď $I - B = M - W$ rozklad takový, že všechny prvky matice $T = M^{-1}W$ jsou nezáporná reálná čísla.

Posléze, nechť t, s jsou kladná čísla, komponenty vektoru $x^{(0)} \in \mathcal{R}^N$ jsou vesměs kladná čísla a $\varepsilon > 0$ je předem daná tolerance.

Krok 1. Položme $k = 0$.

Krok 2. Sestrojme *agregovanou matici* (v případě $s = 1$ irreducibilita of B zaručuje, že $\mathcal{B}(x^{(k)})$ je též irreducibilní)

$$B(x^{(k)}) = RB^s S(x^{(k)}).$$

Krok 3. Nalezněme jediný stacionární vektor pravděpodobnosti $z^{(k)}$ z úlohy

$$\mathcal{B}(x^{(k)})z^{(k)} = z^{(k)},\ e(p)^T z^{(k)} = 1,\ e(p) = (1, ..., 1)^T \in \mathcal{R}^p.$$

Krok 4. Řešme (vzhledem k $x^{(k+1)}$) úlohu

$$Mx^{(k+1,m)} = Wx^{(k+1,m-1)},\ x^{(k+1,0)} = x^{(k)},\ m = 1, ..., t,$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k+1,t)},\ e(N)^T x^{(k+1)} = 1.$$

Krok 5. Prověřme zda

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon.$$

Step 6. Jestliže platí NE v Kroku 6, pak t proveďme

$$k + 1 \to k$$

a jděme na Krok 2.
Step 7. Jest;iže platí ANO v Kroku6, pak položme

$$\hat{x} := x^{(k+1)}$$

a STOP.

6 Vlastnosti IAD metod

Podle definice **SPV** algoritmu formule pro chybu IAD metod $k + 1$ přiblížení vzhledem k aproximaci k má tvar

$$x^{(k+1)} - \hat{x} = J_t(x^{(k)}) \left(x^{(k)} - \hat{x}\right), \tag{6.1}$$

kde [7]

$$J_t(x) = J(B; T^t; x) = T^t \left[I - P(x)Z\right]^{-1} (I - P(x)), \tag{6.2}$$

a Z pochází ze spektrálního vyjádření matice $B = Q + Z, Q^2 = Q, QZ = ZQ = 0, 1 \notin \sigma(Z)$. Dále, $J_t(x) = T^{t-1}J_1(x),\ t \geq 1$, platí pro jakékoliv x mající všechny souřadnice kladné.

Pro naše účely sledujeme možnost obejít se bez předpokladu vyžadujícího konvergenci základní iterační matice t.j. nevyžaduje se toho, že $\lim_{k\to\infty} T^k = 0$ existuje.

Neřešenou zůstává otázka "správné" volby agregačního zobrazení $\mathcal{G}$.

V části 8 ukážeme jistý nový výsledek, který lze považovat za agregačně-desagregační verzi Věty 3.1. Její správné pochopení je umožněno skutečností, že IAD metody jsou konvergentními nezávisle na předpokladu, že příslušný iterační proces je řízen ať už maticí primitivní či maticí cyklickou. Čtenáře zajímajícího se o podrobnosti odkazujeme na naši práci [10], zde uvedeme jen znění nás zajímajícího tvrzení.

6.1 Věta *Buď B irreducibilní stochastická matice a $I - B = M - W$ její rozklad takový, že iterační matice $T = M^{-1}W$ je blokově p-cyclická.*

Potom existuje celé kladné číslo $\hat{t}$ a okolí $\Omega(\hat{x})$ takové, že Algoritmus SPV$(B; T; t, s = 1; \mathcal{G}; x^{(0)}; \varepsilon$ vytváří posloupnpost $\{x^{(k)}(T^t)\}$ takovou, že pro všechna $t \geq \hat{t}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}(T^t) = \hat{x} = B\hat{x} = T\hat{x},$$

kdykoliv $x^{(0)} \in \Omega(\hat{x})$.

7 Třída úloh stochastických matic pro něž IAD konvergují rychle

V této části se zabýváme některými zajímavými vlastnostmi IAD metod, jež byly formálně zavedeny v odstavci **??**. Zejména nás budou zajímat třídy úloh, pro něž lze dokázat rychlou konvergenci. Rychlou konvergencí rozumíme skutečnost, kdy iterační proces nabízí přesné řešení v konečném počtu iteračních kroků. To, že IAD metody mají schopnost rychlé konvergence bylo pozorováno poprvé v práci [7].

7.1 Definice Uvažujme třídu speciálních stochastických matic, jejichž bloková struktura je ve tvaru

$$B_{dyad} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & . & . & . & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & . & . & . & B_{2p} \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{p1} & B_{p2} & . & . & . & B_{pp} \end{pmatrix}$$

kde

(7.1) $$B_{jj}, j = 1, ..., p, \ \text{libovolná substochastická}$$

a

(7.2) $$B_{jk} = v_j\, u_{jk}^T, j \neq k, \ \text{matice hodnosti jedna}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ v_p \end{pmatrix}, \ v_j > 0, \ j = 1, ..., p.$$

Takové matice B_{dyad} budeme nazývat *dyadickými maticemi.*

7.2 Lemma *Předpokládejme, že* $x_{(j)}^{(k)} = c_j \hat{x}_{(j)}$ *s nějakými kladnými konstantami* $c_1, \ldots c_n$ *v kroku* k *algoritmu* $SPV(B; T; t, 1; x^{(0)}; \varepsilon)$. *Potom* $x^{(k+1)} = \hat{x}$.

Důkaz [7] využívá toho, že relace $(I - P(x^{(k)}))(x^{(k)} - \hat{x}) = 0$ platí pro uveden¸$x^{(k)}$.

7.3 Věta [7] *Je-li* $I - B = M - W$ *rozklad takový, že iterační matice* $= M^{-1}W$ *má všechny prvky nezáporné. Dále nechť je* M *rovna blokové diagonále nebo blokové trojúhelníkové čac sti matice* B. *nechť mimodiagonální bloky složené z blokových řádků matice* W *odpovídající jedná každé agregační skupině jsou matice hodnosti jedna a mají týž obor hodnot. Tedy, tyto matice mají právě ty vlastnosti popsané v (7.1) a (7.2).*

Potom algoritmus $SPV(B; T; 1, 1; x^{(0)}; \varepsilon)$ *with* $T = M^{-1}W$ *poskytuje přesné řešení po nejvýše dvou iteračních cyklech.*

Proof [7] Důkaz tohoto tvrzení je důsledkem Lemmatu 7.2. Jeho předpoklady jsou splněny při $k = 1$.

8 Poruchy hodnosti p

Protože citlivost agregačně-desagregačních metod na spektrálních vlastnostech matice řídící celý výpočtový proces je velmi omezená, je vcelku přirozené využít této vlastnosti k výpočtu stránkového ohodnocení (PageRank) pomocí IAD metod

Náležité analýze některých vhodných algoritmů bude předmětem této části našeho pojednání.

Podobně jako v části 3.1 budeme vyšetřovat konvexní kombinaci dvou stochastických matic $B(\alpha) = \alpha B^{(1)} + (1 - \alpha) B^{(2)}$, kde $B^{(1)}$ je daná jinak libovolná stochastická matice zatímco $B^{(2)}$ má některé speciální vlastnosti. Významný rozdíl však bude spočívat v předpokladech kladených na konvergenční vlastnosti matice kombinace $B(\alpha)$ kdy nebude vyžadována konvergence matice řídící výpočtový proces.

Předpokládejme tedy, že matice $B^{(1)}$ i $B^{(2)}$ mají již určenu svou blokovou strukturu. Iterační matici setrojujeme potom tak, že klademe

$$I - B(\alpha) = I - B_{\text{diag}}^{(1)} - \alpha B_{\text{off}}^{(1)} - (1 - \alpha) B_{\text{off}}^{(2)}, \tag{8.3}$$

kde

$$B^{(t)} = B_{\text{diag}}^{(1)} + B_{\text{off}}^{(t)}, \ t = 1, 2,$$

$$(8.4) \qquad B^{(2)}_{\text{off}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & B^{(2)}_{1p} \\ B^{(2)}_{1p} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & B^{(2)}_{1p} & 0 \end{pmatrix}$$

a

$$B^{(2)}_{1p} = v_1 c(n_p)^T, \; B^{(2)}_{jj-1} = v_j c(n_{j-1})^T, j = 2, ..., p$$

s

$$v^T = (v_1^T, ..., v_p^T), \; c^T = (c(n_1)^T, ..., c(n_p))^T, \; e^T = (1, ..., 1) = (e(n_1)^T, .., e(n_p)^T)$$

předpokládajíce, že všechny komponenty vektoru v jsou kladná reálná čísla a vektor c je takový, že

$$\left(I - (B^{(1)}_{\text{diag}})^T\right) e = f, \; f^T = \left(f^T_{(1)}, ..., f^T_{(p)}\right)$$

a

$$f^T_{(j)} v^{(j)} = 1, \; j = 1, ..., p.$$

Rozklad (8.3) definuje iterační matici

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \left(I - B^{(1)}_{\text{diag}}\right)^{-1} \left[\alpha B^{(1)}_{\text{off}} + (1-\alpha) B^{(2)}_{\text{off}}\right] \\ &= \alpha T^{(1)} + (1-\alpha) T^{(2)}. \end{aligned}$$

Snadno se lze přesvědčit, že $T^{(2)}$ is blokově p-cyklická, irreducibilní a

$$(T(\alpha))^T f = f.$$

odtud plyne, že $T(\alpha)$ je irreducibilní, a tudíž má jediný Perronův vlastní vektor $x(\alpha)$. Normalizujeme-li jej kladouce

$$f^T x(\alpha) = 1,$$

obdržíme Perronův projektor $Q_1(\alpha)$

$$Q_1(\alpha) = x(\alpha) f^T = \left(x(\alpha) f^T\right)^2 = [Q_1(\alpha)]^2.$$

Naším cílem je následující

8.1 Věta *Irreducibilita matice $B^{(2)}$ implikuje, že matici $T(\alpha)$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$T(\alpha) = \sum_{t=1}^{p} \lambda^{t-1} Q_t(\alpha) + \alpha(I - Q_1(\alpha)) Z^{(1)}(T)(I - Q_1(\alpha)), \; \lambda = \exp \frac{2\pi i}{p},$$

kde

$$\begin{aligned} Q_t(\alpha) &= y^{(t)} \left(f^{(t)}\right)^T \\ &= (I - Q_1(\alpha)) \left[\alpha Q_t^{(1)} + (1-\alpha) Q_t^{(2)}\right] (I - Q_1(\alpha)) \;, t > 1, \end{aligned}$$

$$T^{(1)} = \sum_{t=1}^{p} \lambda^{t-1} Q_t^{(1)} + Z^{(1)}(T),\ T^{(2)} = \sum_{t=1}^{p} \lambda^{t-1} Q_t^{(2)}$$

a

$$y^{(1)}(\alpha) = x(\alpha),\ \left(y^{(t)}(\alpha)\right)^T = \left(\lambda^t \left(x(\alpha)_{(1)}\right)^T, ..., \lambda^{pt} \left(x(\alpha)_{(p)}\right)^T\right),\ t > 1.$$

Navíc, spektrum $\sigma(T) = \sigma(\alpha T^{(1)}) \bigcup_{t=1}^{p} \{\lambda^t\}$ *a*

$$\tau(T(\alpha)) = \max\{|\,\mu| : \mu \in \sigma(T(\alpha)), \mu \neq \lambda^t, t = 1, ..., p\} \leq \alpha.$$

Dále uvedeme dvě evidentní tvrzení.

8.2 Tvrzení *Z předpokkladu, že* $B^{(2)}$ *jakož i* $T(\alpha)$ *jsou obě p-cyclické, plyne, že* $T^{(1)}$ *je též p-cyklická.*

8.3 Tvrzení *Pro Perronův projektor matice* $T(\alpha)$ *a matici* $T^{(2)}$ *platí*

$$Q_1(\alpha) T^{(2)} = Q_1(\alpha) \tag{8.5}$$

a

$$Q_1(\alpha)\left[T^{(2)} - Q_1(\alpha)\right] = 0. \tag{8.6}$$

Důkaz Obě relace (8.5) a (8.6) jsou bezprostředním důsledkem relací

$$(T(\alpha))^T f = f = \left(T^{(1)}\right)^T f.$$

Důkaz věty 8.1 Relace (8.5) and (8.6) plynou přímo z předpokladu cykličnosti matice $T(\alpha)$ [1].

Na základě Tvrzení 8.3 máme

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= Q_1(\alpha)Q_1(\alpha) + (I - Q_1(\alpha))T(\alpha)(I - Q_1(\alpha))) \\ &= Q_1(\alpha) + (I - Q_1(\alpha))\alpha T^{(1)}(I - Q_1(\alpha)) \\ &= \textstyle\sum_{t=1}^{p} \lambda^{t-1} Q_t(\alpha)) + (I - Q_1(\alpha))\alpha Z^{(1)}(T)(I - Q_1(\alpha)). \end{aligned}$$

Dále vidíme, že

$$\sigma\left(T(\alpha)\right) = \bigcup_{j=1}^{p} \left\{\lambda^j\right\} \cup \sigma\left(\alpha Z^{(1)}(T)\right)$$

a tudíž,

$$\tau(T(\alpha)) = \alpha\rho\left(Z^{(1)}(T)\right) \leq \alpha.$$

Tím je důkaz dokončen.

Poděkování Tento příspěvek je založen na výzkumné práci na projektu podporovaném grantem No. MSM 210000010 Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky.

Literatura

[1] Courtois P.J., Semal P. *Block iterative algorithms for stochastic matrices*, Linear Algebra Appl. **76**, 59-80 (1986).

[2] I. S. Duff, J. K. Reid, An implementation of Tarjan's algorithm for the block triangularization of a matrix. *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol 4, 337 - 147, 1978.

[3] Kamvar S. *Stanford Web Matrix and Stanford-Berkeley Web Martix, Data Sets.*

[4] Langville A.N., Meyer C.D. *Google's PageRank and beyond. The Science of Search Engine Rankings.* Princeton University Press 2006,

[5] Langville A.N., Meyer C. D. *Deeper inside PageRank.* Preprint.

[6] Marek I., Mayer P. *Convergence analysis of an aggregation/disaggregation iterative method for computation stationary probability vectors of stochastic matrices.* Numerical Linear Algebra With Applications, **5** 253-274 (1998).

[7] Marek I., Mayer P. *Convergence theory of a class of aggregation/ disaggregation iterative methods for computing stationary probability vectors of stochastic matrices.* Linear Algebra Appl. **363** 177- 200, 2002).

[8] Marek I., Mayer P. *Iterative aggregation/disaggregation methods for computing stationary probability vectors of stochastic matrices can be finitely terminating,* International Journal of Differential Equations Vol. **3**, 301-313 (2001).

[9] Marek I., Mayer P., Pultarová I. *Convergence issues in the theory and practice of iterative aggregation/disagrregation methods.* Submitted ETNA 2007.

[10] Marek I., Mayer P., Pultarová I. *IAD methods based on splittings with cyclic iteration matrices.* Dagstuhl Seminar Proceedings 07071, 2007, 27 pp.

[11] Marek I., Pultarová I. *A note on local and global convergence analysis of iterative aggregation-disaggregation methods.* Linear Algebra Appl. **413**, 327–341 (2006).

[12] Pultarová I. *Numerical Solution of Principal Eigenvectors of Stochastic Matrices.* Submitted for publication 2007.

[13] Stewart W.J. *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains.* Princeton University Press, Princeton, NJ., 1994.

GEOMETRICKÉ 5-MINÚTOVKY PRE ARCHITEKTOV

Katarína Mészárosová[1]

Abstrakt:

Do prednášok deskriptívnej geometrie na fakulte architektúry zaraďujem krátke 5 minútové „okienka“. Ich cieľom je ukázať študentom geometriu ako bohatý zdroj inšpirácie pre tvorbu architektov. 5 minútovky používam v prvom semestri na spestrenie a obohatenie prednášok, ktorých obsahom sú väčšinou zobrazovacie metódy. Zároveň sa snažím, aby sa študenti oboznámili aj s inými oblasťami geometrie, nie len s deskriptívnou geometriou.

1. Deskriptívna geometria na Fakulte architektúry STU Bratislava

Na Fakulte architektúry Slovenskej technickej univerzity v Bratislave sa vyučuje deskriptívna geometria v prvom a druhom semestri bakalárskeho štúdia. Výmera hodín je 2/2 a 1/1. V prvom semestri musia študenti zvládnuť základy rovnobežného premietania, afinitu, kolineaáciu, kužeľosečky, Mongeovu projekciu, axonometriu, stredové premietanie a perspektívu. Keďže so stredných škôl prichádzajú študenti takmer bez znalostí geometrie, je to dosť náročný a preto aj málo obľúbený predmet. Navyše v tomto období ešte študenti nevidia žiadnu spojitosť a užitočnosť geometrie a ich budúcej profesie. Aby tieto súvislosti začali vnímať a aby prednášky z deskriptívnej geometrie boli pre študentov zaujímavejšie a živšie zaraďujem v prvom semestri do výuky krátke päť minútové „okienka“. Ich cieľom je ukázať študentom ako geometria ovplyvňuje architektúru. Zároveň sa snažím ukázať študentom okrem deskriptívnej geometrie aj iné oblasti geometrie, ktoré môžu byť bohatým zdrojom inšpirácie pre tvorbu architektov.

V druhom semestri je obsah predmetu deskriptívna geometria priamo zameraný na využitie v praxi. Študenti získajú prehľad a základné vedomosti o rotačných, skrutkových a priamkových nerozvinuteľných plochách. Prednášky sú bohato doplnené ukážkami realizovaných stavieb. Krátku informáciu získajú študenti aj o translačných, klinových a kanálových plochách. Na konci druhého semestra sa zaoberáme osvetlením a zrkadlením.

2. Geometrické 5-minútovky

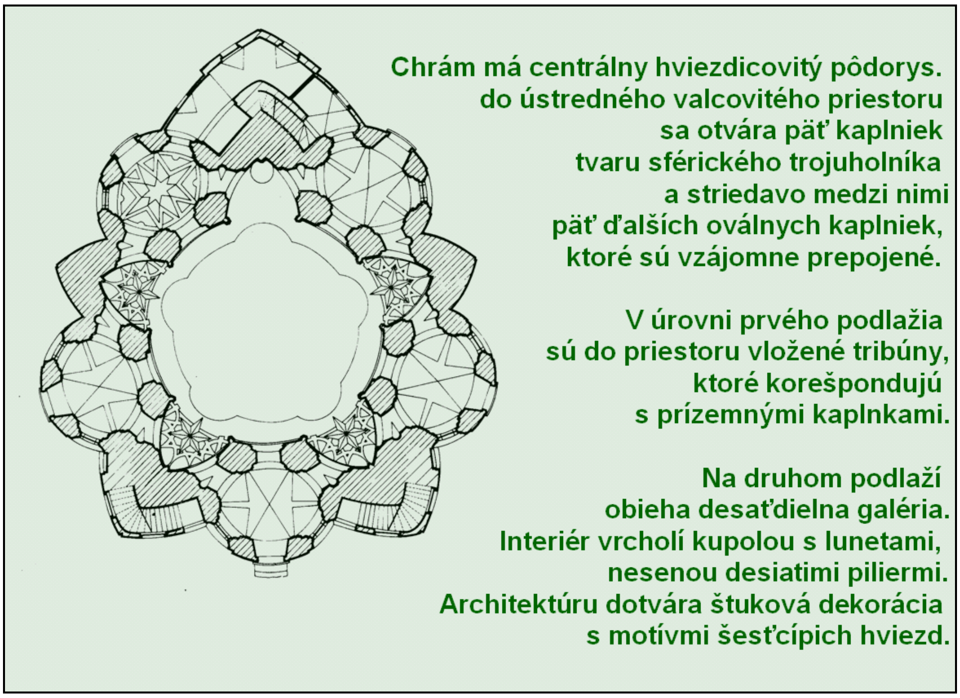
Zatiaľ mám pripravené štyri 5-minútovky:

1. Jan Santiny a geometria
2. Fontány a geometria
3. Geometrická harmónia
4. Fraktálna geometria

[1] Stavebná fakulta, Slovenská technická univerzita, Bratislava Radlinského 11, katarina@math.sk

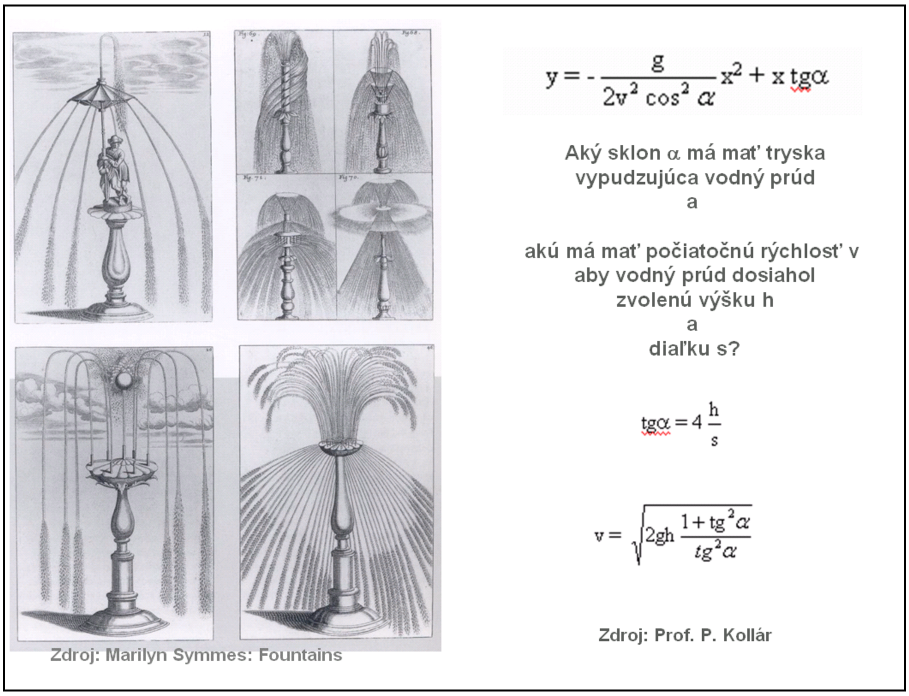
2.1. Jan Santiny a geometria

Táto 5-minútovka vznikla po návšteve kostola sv. Jana Nepomuckého na Zelenej Hore v Žďári nad Sázavou. Jeho architektom je Jan Blažej Santini Ajchl (1677 -1723). Päť-minútovka je bohato doplnená fotografiami. Je zameraná na geometrickú symboliku v diele Jana Santiniho, dokumentovaná pôdorysmi viacerých kostolov, kláštorov a zámku. Ukážky sú z literatúry [1] a [2]. Autorkou fotografií je Z. Študencová. Na obrázku je pôdorys kostola sv. Jana Nepomuckého na Zelenej Hore



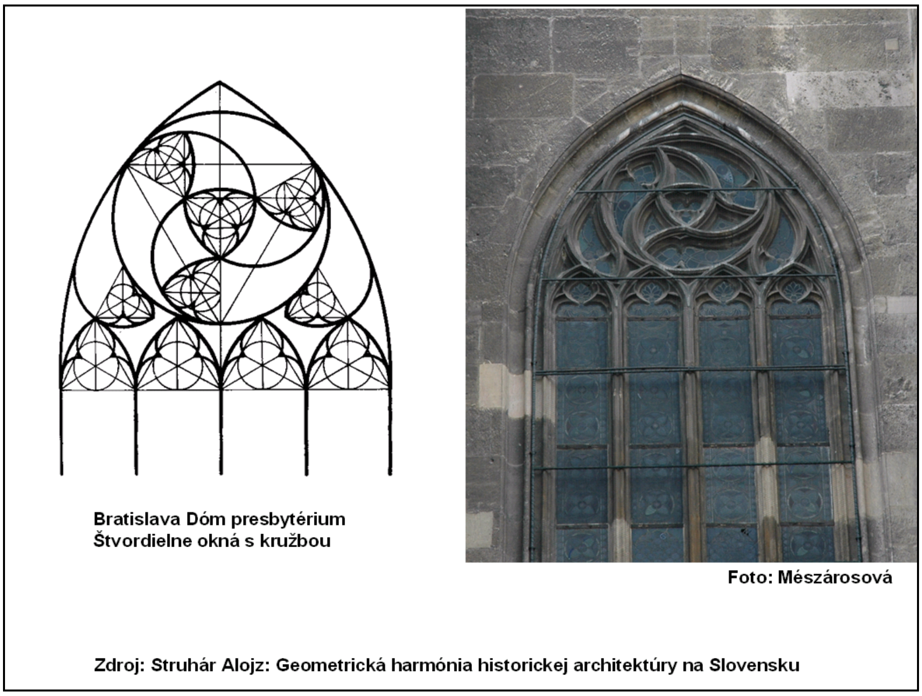
2.2 Fontány a geometria

Fontány spríjemňujú život v meste. V horúcich letných dňoch osviežujú vzduch a pôsobia na všetky naše zmysly. Počas celého roka ich vnímame ako umelecké výtvarné dielo. Z hľadiska urbanistického, mestské fontány bývajú často významným orientačným bodom, miestom stretávania sa ľudí, dominantou námestia alebo pešej zóny. Druhá 5-minútovka „Fontány a geometria“ ponúka netradičný pohľad na fontány a to z hľadiska geometrie. Upriamuje pozornosť na tvar vodného prúdu fontán. Rovnice popisujúce krivku vodného toku sú od prof. Ing. Pavla Kollára DrSC. Päť-minútovka je bohato doplnená fotografiami z knihy M. Symmes [3] a mojimi fotografiami.



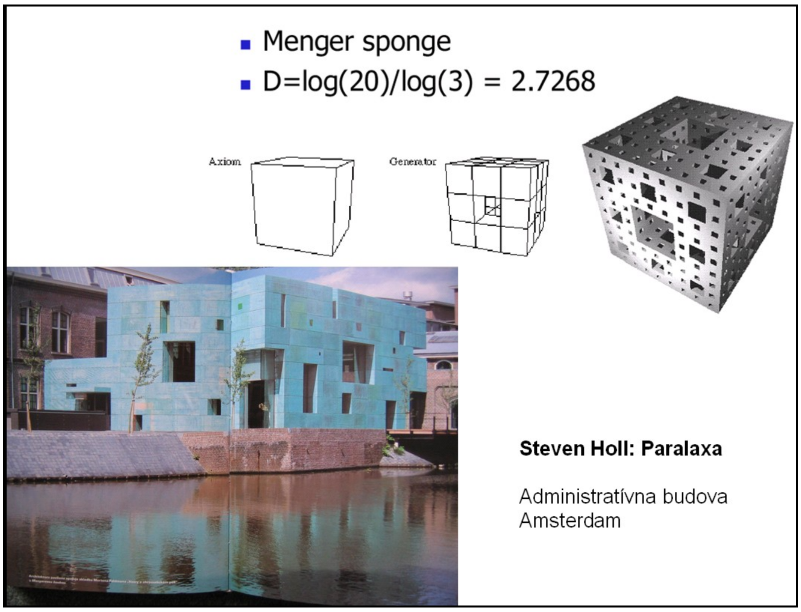
2.3. Geometrická harmónia

Tretia 5-minútovka „Geometrická harmónia“ je inšpirovaná knihou Alojza Struhára: Geometrická harmónia historickej architektúry na Slovensku [4]. V nej sú ukážky presných geometrických konštrukcií, ktoré slúžili ako podklad pre návrh gotických okien, roziet ale aj kamenárskych značiek. Obrázky z uvedenej knihy sú doplnené mojimi fotografiami Dómu sv. Martina v Bratislave.



2.4. Fraktálna geometria

Štvrtá 5-minútovka „Fraktálna geometria" umožní študentom oboznámiť sa s niektorými základnými pojmami fraktálnej geometrie. V krátkej ukážke majú možnosť intuitívneho pochopenia pojmov sebapodobnosť a fraktálna dimenzia. Uvidia nádhernú Mandelbrotovu množinu a jej súvis s komplexnými číslami. V ukážke realizovanej stavby sa môžu presvedčiť o tom, že fraktálna geometria môže byť podnetom k tvorbe modernej neobvyklej architektúry.



Záver

Príprava päť minútových „okienok" je veľmi náročná. Ak chcem študentom v tak krátkom čase podať zaujímavú informáciu, musím zozbierať a následne vyselektovať množstvo materiálu a rozmyslieť si každé slovo. Odozva študentov na 5-minútovky bola prekvapivo dobrá.

Poďakovanie:
Príspevok bol vypracovaný v rámci riešenia grantového projektu VEGA 1/4026/07

Literatura

[1] *Sprievodca expozíciou: Jan Santini život a dielo*. Štátny zámok Žďár nad Sázavou. 1977
[2] SEDLÁK, J. a kol.: *Významné pamiatky okresu Žďár nad Sázavou*. 1982
[3] SYMMES, M. and co.: *Fountains – Splash and Spectacle* . Smitsonian Institution 1998, ISBN 0-500-23758-1
[4] STRUHÁR, A.: *Geometrická harmónia historickej architektúry na Slovensku* Vydavateľstvo Pallas, Bratislava 1977. 94-217-77
[5] HOLL, S.: *Paralaxa*. vydavateľstvo Era; ISBN 80-86517-68-3

MATH – WHY YES?!

Karina Mužáková[1]

Abstract:
This paper deals with utilization of knowledge from mathematics education within the frame of field of Insurance Management at the Faculty of Economics of Technical University of Liberec. Why is math support in the study of Insurance System important? Why have students to much of math? Is this education for practice effective? Used students this knowledge from this study in practice?

1. Introduction

The mathematics support is for insurance management very important, because the Insurance Management is used a lot in mathematical methods not only by the calculation of mortality tables and insurance calculation in life/non-life insurance, but also in the financial mathematics framework. Here we mustn't forget about mathematics education, what graduated the students at high school. Different mathematics support is at the commercial Academies and gymnasiums. Math support is supplied at the Faculty of Education, Faculty of Economics – Department of Economic Statistics and Department of Insurance Management.

2. Math and statistics support

In the first and second semesters of the bachelor study programme of Insurance Management students have Mathematics I and Mathematics II. At the first semester students have also Theory of Probability. Next the students used mathematics knowledge during the third semester in Financial Mathematics, where the base is functions, sequences and number series. In the fifth semester students have Demography, this course is the base for Mathematics of Life Insurance, which students have in the master study programme. In the seventh semester students have Insurance Mathematics of Life Insurance and Selected Topics of Mathematics and in next semester have Non-life Insurance. In the Selected Topics of Mathematics must the students must use knowledge from courses Mathematics I and Mathematics II, because in this course students disseminate knowledge of linear algebra (block matrices, Eigen values …). In the last semester students used knowledge from Insurance Mathematics of Life Insurance in Informatics in Insurance.

2.1. Faculty of Education - Department of Mathematics and Didactics of Mathematics (KMD)

Education for Department of Insurance Management provided from Faculty of Education Department of Mathematics and Didactics of Mathematics (KMD) Mathematics I and Mathematics II (see figure 1). This course of Math is in first and second semesters in the first study year. In this study year ought to reach a unification of knowledge from mathematics. This base is very important, because these levels of mathematical knowledge are connected with the students'next mathematics education.

[1] Technická univerzita v Liberci, Hospodářská fakulta, Studentská 2, 461 17, Liberec 1, karina.muzakova@tul.cz

This department provides education of mathematics for Faculty of Architecture, Faculty of Education, Faculty of Mechatronics, Faculty of Economics and for Faculty of Mechanical engineering. Within the framework of mathematical education for Faculty of Economics provides too this education, but in English for University of Nisa (1), (2). Reader can find more detailed information about the education at University of Nisa at (3), (8). These papers give comprehensive summary of education at University of Nisa.

Course programme of:

Mathematics I

A. Definitions of mapping and function

1. Introduction - used symbols, notations. Basic terms of sentential calculus. Number sets.
2. Mapping, basic terms (domain of definition, image of mapping, types of mapping). Real function, basic properties of functions (monotony, bounded functions, even, odd).
3. Inverse function. Basic elementary functions (including cyclometric).
4. Other functions (absolute value, signum, entire function, Dirichlet's function). Real sequences

B. Differential calculus

5. Limit of sequence (finite, infinite), theorems about limit, calculation of limit, number e.
6. Limit function, one-sided limits, limits at infinite points. Continuity, properties of continuous functions.
7. Derivative, geometric applications, tangent line to a function. Calculation of derivative, derivative of a composite function, derivative of an inverse function.
8. L'Hospital's rule. Monotony, local and global extreme of a function.
9. Convexity, concavity, point of inflexion. Applications of derivatives to studying of graph of a function.
10. Differential of a function. Taylor's formula.

C. Integral calculus

11. Primitive function and indefinite integral. Basic rules, method per partes, substitution method.
12. Integration by partial fractions.
13. Riemann definite integral, Newton-Leibniz's theorem. Infinite integral.
14. Number series, criterions of convergence, absolute convergence.

Mathematics II

A. Linear algebra

1. Arithmetic vectors, linear (in)dependence of vectors. Vector space, dimension and basis of a space.
2. Norm of a vector, inner product of vectors. Matrix, operations with matrixes. Rank of a matrix. Gaussian elimination.
3. System of linear algebraic equations, solutions a system of linear algebraic equations.
4. Inverse matrix, properties, calculation of an inverse matrix. Matrix equations use inverse matrixes to solution matrix equations.
5. Determinant, properties, calculation of determinant. Use: Cramer's rule, calculation of inverse matrix.
6. Eigenvalues and eigenvectors of a matrix. Quadratic forms, properties, Sylvester's criterion.

B. Functions of more variables

7. Euclidean n-space, properties of sets of En. Functions of more variables, domain of definition.
8. Partial derivatives, extremes of functions of more real variables.
9. Constrained and global extremes of functions of two variables.

C. Differential and difference equations

10. Differential equations of order 1, basic terms. Separation of variable method.
11. Linear differential equations of order 1, variation of constant method. Homogeneous linear equation of order n with constant coefficients (characteristic equation, fundamental system).
12. Heterogeneous linear differential equations with special right side.
13. Difference equations, solution of linear difference equations with constant coefficients.

Fig. 1: Courses content of Mathematics I and Mathematics II

2.2. Faculty of Education - Department of Applied Mathematics (KAP)

Next education of Mathematics is supplied from Faculty of Education namely Department of Applied Mathematics (KAP) in fifth semester with Demography and in seventh semester with Selected Topics of mathematics. In this course students used knowledge from first and second semesters of their first study ear. Description of this course - some topics of linear algebra: block matrices, Eigen values, eigenvectors, and the function of the matrix especially exp (A); introduction to the solution of simple differential equations and their systems. (7)

2.3. Faculty of Economics - Department of Economic Statistics (KSY)

This support is not only Mathematics, but especially Statistic (see in figure 2). Department of Economic Statistic (4) supply for Department of Insurance Management following courses: at the firs study year of bachelor study programme Descriptive Statistics I and II, Theory of Probability. Students at the course Statistics I and Statistic II used computer program Statgraphics (5). The members of Department have ideas – Statistic education by the help of e-learning (6).

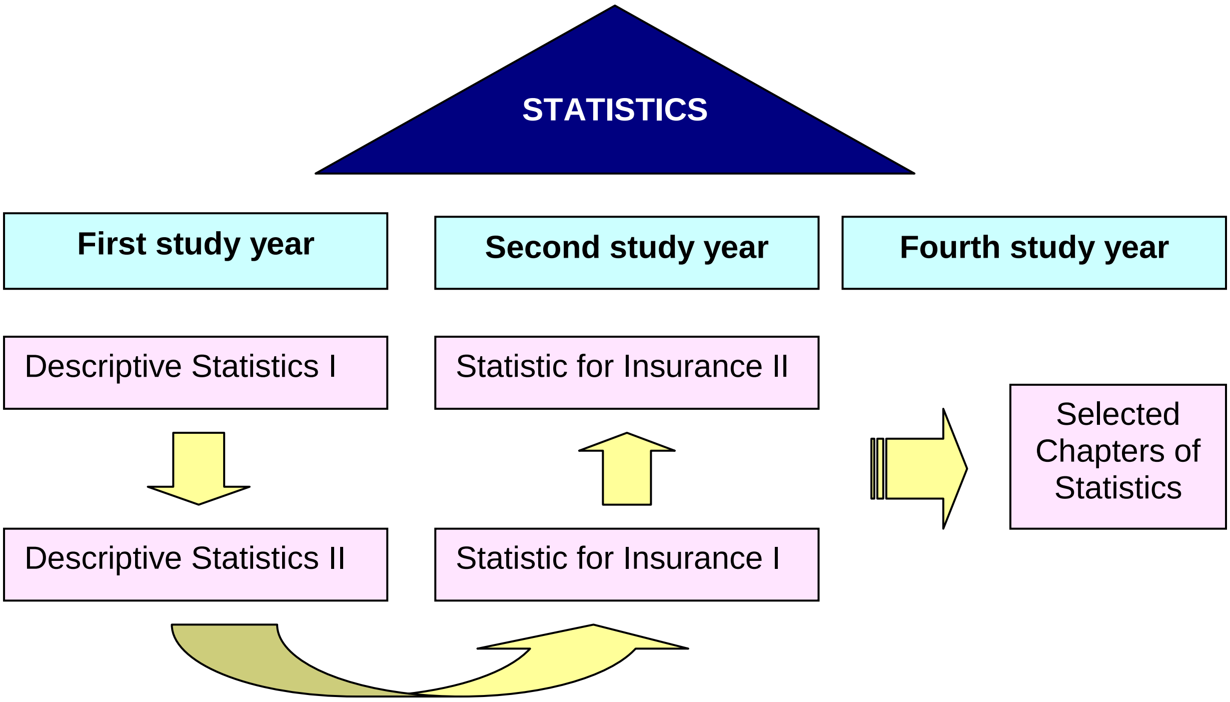


Fig. 2: Statistic

2.4. Faculty of Economics - Department of Insurance Management (KPO)

In bachelor study programme students have Financial Mathematics. In master study programme students have Insurance Mathematics of Life Insurance, which connect at Demography and the knowledge from this course students used in Informatics in Insurance who students applied this knowledge at the construct of mortality tables with the excel programme (see figure 3). The Table 3 illustrates how these three courses are related together.

Course programme of:

Demography	Insurance Mathematics of Life Insurance	Informatics in Insurance
1. The theme and status of demography. The history of demography. 2. The dates of demography. 3. The theory of population. The models of population growth. 4. Lexis diagram. The indexes and measures in demography. 5. The models of mortality. 6. The natality and fertility. 7. The stable and stationary population. The law of J. A. Lotka. 8. The life-table and his construction. 9. The methods for population projections, the forecasting for population. 10. The demographic potential. 11. Shortly about the marriage rate, the migration and the location of population. 12. The state mathematical demography. 13. The multistate demography. 14. The repetition of main ideas.	1. Equivalence principles and experience table; 2. Classification changes in mortality to insurance operation; 3. Classification risks; 4. Life insurance for a lump sum, endowment insurance, structure and analysis; 5. Premium and calculation of life pensions; 6. Combination of saving and insurance; 7. Definition of net premium and gross premium; 8. Multilife insurance; 9. Medical and financial underwriting; 10. Life insurance actuarial reserves, types and forms; 11. Changes during the insurance period (surrender value, surrender of policy, reduction by nonpayment the premium, changes in insurance values); 12. Reinsurance life insurance; 13. Modern insurance products (flexible products, very grave illness insurance); 14. Pension insurance and its forms, calculation, pension insurance financing, pension funds and pension plans; 15. Health insurance, contractual above standard care insurance.	1. Introduction to demography; 2. Intensity of mortality and methods of her statistical leveling; 3. Gompertz-Mackeham leveling; 4. Infant mortality race; 5. Experience tables; 6. Insured-mathematical calculations; 7. Basic insurance types - gross and net premium; 8. Basic pension types -gross and net premium; 9. Insured-mathematical reserves; 10. Changes in insurance.

Fig. 3: Courses content of Demography, Insurance Mathematics of Life Insurance and Informatics in Insurance

How and who provided the mathematical support for Insurance Management see in figure 4.

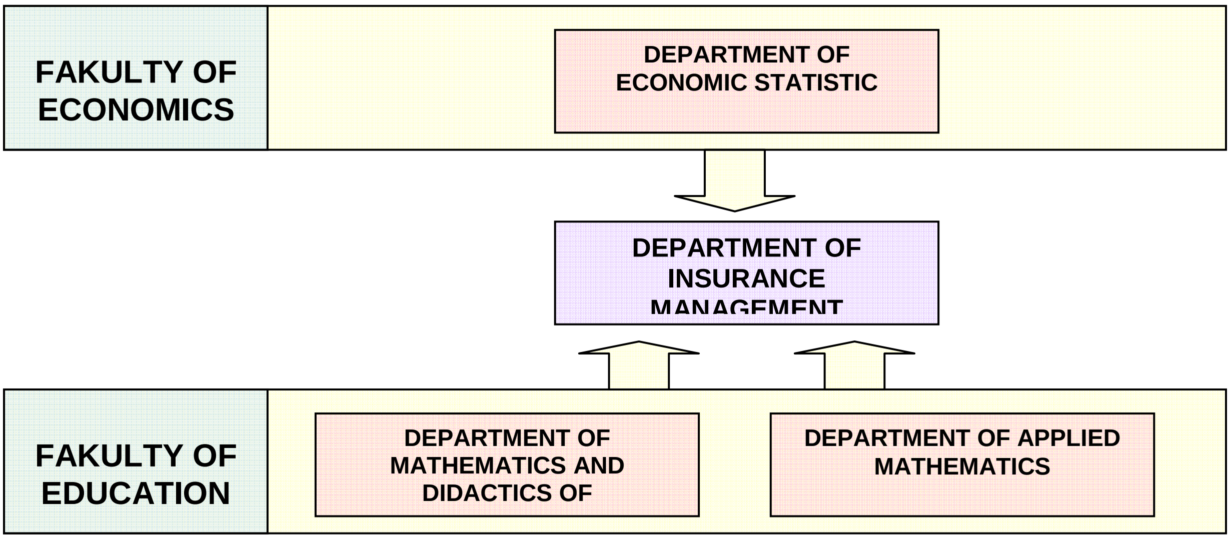


Fig. 4: Scheme of Mathematical support for Insurance Management

3. Conclusion

The construction of mortality table in course Informatics in Insurance in the last semester of master study programme is very interesting. The students must use knowledge from the preceding two courses and apply this knowledge with the aid of computer. After this course can students can construct self mortality table. In this paper we see, why the math support for Insurance Management branch is. After graduation from a place students can go to the praxis with very good basis of math. They can work anywhere within the frame of financial services, especially as insurance actuaries, with which insurance must cooperate by low. To the financial services belong Banks, Investment services and Insurance.

References

[1] BITTNEROVÁ, D.: *Anglická výuka matematiky na UNisa*. 9. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Srní, Vydavatelský servis Plzeň 2004, s. 43-47. ISBN 80-86843-01-7.

[2] BITTNEROVÁ, D.: *Comparative Studies in Multicultural Mathematics*. 2. mezinárodní konference: Education, Science and Ekonomy in Higher Educational Establishments, Vysoké Tatry, 2004, p. 272-276. ISBN 5-209-02479-2.

[3] BITTNEROVÁ, D.: *Management of Information and Communication at "The Neisse University" – Comparative Studies*. In: Kvantitativní metody a modely v ekonomii.ECON, MU Brno, září 2006. ISBN 80-210-4083-1.

[4] CYHELSKÝ, L., VALENTOVÁ, V.: *Nová česká katedra ekonomické statistiky*. Statistika č. 4/2005, Praha, 2005, s. 353 – 354. ISSN 0322-788x (50%)

[5] GURINOVÁ, K., VALENTOVÁ, V.: *Základy práce s programem STAGRAPHICS Centurion XV*. 1.vyd., 118 stran. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2007. ISBN 978-80-7372-275-3.

[6] GURINOVÁ, K., VALENTOVÁ, V.: *Využití e-learningu ve výuce statistických předmětů*. In Mezinárodní ekonomicko-statistické dny na VŠE v Praze, 20. září 2007. Sborník příspěvků. Praha: VŠE v Praze, 2007, 7 stran. ISBN 978-80-254-0275-7.
[7] KRACÍK, V: *Vybrané statě z matematiky*, TUL – FP, 2002, studijní text.
[8] PŘÍVRATSKÁ, J.: – *Management of Information and Communication at „The Weisse University" –Math in the 1st Year.* Proceedings ECON, Brno 2006, s. 87-91.ISBN 80-210-4083-1.

PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA V ANGLIČTINĚ

Gerta Plačková[1]

Abstrakt:
Tento článek navazuje na příspěvky D. Bittnerové a J. Přívratské, v nichž jsou uvedeny zkušenosti s přípravou tištěných i elektronických textů z matematiky a geometrie včetně ukázek. Další tématem dvousemestrového kurzu pro učitele matematiky základních a středních škol je pravděpodobnost a statistika.

1. Kurz Pravděpodobnost a statistika

1.1. Úvod

Kurz Pravděpodobnost a statistika je určen pro stávající učitele matematiky základních a středních škol. Kurz je zaměřen na problematiku výuky v cizím jazyce, v rámci přípravy tohoto kurzu se vytvářejí studijní texty v angličtině pro vybrané oblasti učiva. Studijní texty se skládají ze tří bloků: a) část teoretická včetně řešených příkladů, b) příklady na procvičení včetně výsledků, c) výkladový slovník.

1.2. Obsah předmětu

Kombinatorika:
Úvodní pojmy - faktoriál, kombinační číslo. Permutace, variace, kombinace. Permutace, variace a kombinace s opakováním.

Pravděpodobnost:
Náhodný jev. Závislost a nezávislost jevů. Pravděpodobnost náhodného jevu. Podmíněná pravděpodobnost. Celková pravděpodobnost. Bayesovy vzorce.

Náhodná veličina. Rozdělení diskrétní náhodné veličiny. Distribuční funkce. Hustota pravděpodobnosti. Číselné charakteristiky náhodné veličiny. Nejčastěji používaná rozdělení náhodné veličiny - rozdělení binomické, Poissonovo, normální, normované normální.

Statistika:
Úvodní statistické pojmy – soubor, jednotka, znaky. Typy proměnných. Elementární zpracování dat formou tabulek. Grafické zpracování dat. Charakteristiky polohy – průměry, modus, kvantily. Charakteristiky variability – rozpětí, kvartilové rozpětí, rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient.

Analýza dat – bodový a intervalový odhad. Základní pojmy z testování statistických hypotéz.

Měření závislosti. Základní pojmy regresní a korelační analýzy.Regresní anylýza dvou proměnných. Typy regresních funkcí.

[1] Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci
461 17 Liberec 1, Studentská 2 Tel.: 48 535 2515, Fax: 48 535 2332

1.3 Permutations

► Let be A a set with n different elements. ***A permutation of A without repetitions*** is an arrangement of the elements of A in some order in which each element of A appears exactly once. ◄
This ordered list of elements we write as an n-tuple.

The number of permutations without repetitions of a set with n elements is

$$\mathbf{P}(n) = n!$$

Example 1.4
Write all permutations of A = {1, 2, 3}.

The solution: The number is $\mathbf{P}(3) = 3! = 6$.
All permutations are (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

Example 1.5
The solution: What is the number of arranging 6 people in a line?

$\mathbf{P}(6) = 6! = 720$

Example 1.6
The solution: How many ways we can arrange a set of letters {a, b, c, d}, if each letter can be used only once.

$\mathbf{P}(4) = 4! = 24$

Obr. 1: Ukázka textu

2. Závěr

Kurz Statistika a pravděpodobnost je připravován v rámci grantu FRVŠ zaměřeného na problematiku výuky v cizím jazyce. Ukázka připravovaného textu je uvedena na obr. 1.

Literatura

[1] BITTNEROVÁ D.: Kurz matematiky v angličtině. In. *Sborník 30. konference o matematice na VŠTEZ.* Místo vydání: ČVUT Praha, 2008.
[2] PŘÍVRATSKÁ J.:. Geometrie a fyzika v angličtině. In *Sborník 30. konference o matematice na VŠTEZ.* Místo vydání: ČVUT Praha, 2008.

MATEMATIKA II V CHEMII A V PRAXI

Marie Polcerová[1]

Abstrakt:
Příspěvek se zabývá výukou povinně volitelného předmětu Matematika II v bakalářském studiu na Fakultě chemické v Brně. Pojednává nejen o zkušenostech s takto koncipovanou výukou tohoto předmětu v prezenční a kombinované formě studia, ale i o e-learningových podporách a novém učebním textu „Matematika II v chemii a v praxi“, který je psán netradičním způsobem.

1. Obsah a zařazení předmětu ve výuce

Předmět Matematika II byl na Fakultě chemické Vysokého učení technického v Brně až do akademického roku 2003/2004 předmětem povinným a byl zařazen do letního semestru prvního ročníku. Navazoval na předmět Matematika I a jeho rozsah byl 3 hodiny přednášek a 3 hodiny cvičení týdně a byl zakončen zápočtem a zkouškou, která měla část písemnou i ústní. Obsah předmětu: **Komplexní čísla** – uspořádaná dvojice dvou reálných čísel, algebraický, goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla, aritmetické operace (sčítání a odčítání, násobení a dělení, umocňování a odmocňování), binomické rovnice, elementární pojmy z funkcí komplexní proměnné. **Obyčejné diferenciální rovnic**e – základní pojmy diferenciálních rovnic, klasifikace diferenciálních rovnic, diferenciální rovnice 1. řádu, izokliny, grafické řešení. Separace proměnných (substituce). Homogenní diferenciální rovnice. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu, existence a jednoznačnost řešení. Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty homogenní i nehomogenní, metoda neurčitých koeficientů a metoda variace konstant. **Diferenciální počet funkcí dvou a více reálných proměnných** – definiční obor, grafy, vrstevnice, složená funkce, omezená funkce, limita a spojitost funkce. Parciální derivace, diferencovatelnost funkce, vyšší derivace složených funkcí (transformace), totální diferenciál a jeho užití (tečná rovina a normála plochy, přibližná hodnota výrazu, Taylorův rozvoj). Extrémy funkce dvou reálných proměnných. **Integrální počet funkcí dvou a více reálných proměnných** – integrační obory v kartézských a polárních souřadnicích, dvojné a trojné integrály, jejich vlastnosti, výpočet a transformace. Použití dvojných a trojných integrálů. **Vektorová analýza** – pojem vektorového a skalárního pole, jejich matematický popis, základní a diferenciální charakteristiky polí (hladiny, siločáry, derivace ve směru, gradient, divergence, rotace), Hamiltonův a Laplaceův operátor. Křivkový a plošný integrál prvního a druhého druhu, jejich geometrická a fyzikální interpretace (nezávislost na integrační cestě, potenciál), výpočet a použití. Integrální věty a jejich aplikace. **Úvod do popisné statistiky** – podstata statistiky, základní statistické pojmy, elementární zpracování statistických údajů, tabulky a grafy rozdělení četností u diskrétní a spojité náhodné veličiny, statistické charakteristiky, rozptýlenost rozdělení.

V akademickém roce 2004/2005 přešla Fakulta chemická na tzv. trojstupňový systém studia. Předmět Matematika I zůstal předmětem povinným, ale předmět Matematika II se stal pouze předmětem povinně volitelným. Z tohoto důvodu byl obsah předmětu

[1] Ústav fyzikální a spotřební chemie, Fakulta chemická, Vysoké učení technické v Brně, Purkyňova 118, 612 00 Brno, polcerova@fch.vutbr.cz

Matematika I rozšířen o diferenciální počet funkcí dvou a více reálných proměnných (funkce byly zadávány pouze explicitně), diferenciální rovnice (bez substitucí u separovatelných diferenciálních rovnic a diferenciální rovnice vyšších řádů s konstantními koeficienty nehomogenní byly probírány pouze se speciální pravou stranou metodou neurčitých koeficientů) a část vektorové analýzy (Hamiltonův operátor, křivkové integrály I. a II. druhu včetně nezávislosti na integrační cestě a potenciálu, plošné integrály I. a II. druhu). V předmětu Matematika II byla poslední část první dva roky věnována teorii pravděpodobnosti a matematické statistice. Třetím rokem pak mělo být toto téma nahrazeno nekonečnými řadami, protože vznikl nový samostatný předmět Zpracování experimentálních dat (povinný předmět v letním semestru v rozsahu 2/0 ukončený klasifikovaným zápočtem). Rozsah tohoto předmětu byl první dva roky 3/2 pro prezenční formu studia a 1/1 pro kombinovanou formu studia, třetím rokem pak byl bez našeho vědomí zredukován na 2/2 (prezenční forma) a konzultace (kombinovaná forma). Z tohoto důvodu poslední téma (nekonečné řady) nebylo probíráno.

Do akademického roku 2000/2001 byl rozsah předmětu Matematika I v zimním semestru 4/4, od roku 2001/2002 byl tento rozsah zvýšen na 4/5, protože do něho byla zařazena tzv. Počítačová cvičení z matematiky. S přechodem na trojstupňový systém byl jeho obsah rozšířen o výše uvedená tématu předmětu Matematika II, ale rozsah byl snížen na 4/3. Toto opatření mělo negativní vliv nejen na úspěšnost studentů v tomto předmětu, ale i na jejich vztah k matematice jako takové. Mnoho studentů předčasně ukončilo studium na naší fakultě, mnoho jich podalo žádost o prodloužení lhůty na získání zápočtu a mnoho si jich tento předmět zapisovalo příští rok znovu. Na tuto neúnosnou situaci jsme koncem třetího roku upozornili a podali jsme žádost o změnu programu studijního předmětu Matematika I.

Od akademického roku 2007/2008 předmět Matematika I má rozsah 4/2 a neobsahuje jako svou součást Počítačová cvičení z matematiky, funkce dvou a více reálných proměnných ani vektorovou analýzu. Počítačová cvičení z matematiky jsou samostatným předmětem v rozsahu 0/2, který byl zařazen do letního semestru prvního ročníku a je zakončen klasifikovaným zápočtem. Předmět Matematika II je nově zařazen do druhého ročníku do zimního semestru, zůstal povinně volitelným předmětem v rozsahu 2/2 a je opět zakončen zápočtem a zkouškou, která má část písemnou a ústní.

2. Organizace výuky

Předmět Matematika II je realizován jednak formou klasické přednášky s využitím moderních audiovizuálních pomůcek a jednak formou cvičení. Protože hodinová dotace byla a je i nadále podle nás nedostatečná, tak každý student hned na prvním cvičení dostává zadánu tzv. samostatnou práci. Tato práce obsahuje celkem těchto dvacet témat:

1) Diferenciální rovnice separovatelné (včetně substitucí)
2) Lineární diferenciální rovnice 1. řádu
3) Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů nehomogenní
4) Definiční obor funkce více proměnných
5) Graf a vrstevnice funkce více proměnných
6) Limita
7) Parciální derivace
8) Totální diferenciál a jeho aplikace
9) Složená funkce (transformace)

10) Lokální extrémy
11) Tečna (tečná rovina) a normála plochy
12) Dvojný integrál v kartézských souřadnicích a jeho aplikace
13) Dvojný integrál v polárních souřadnicích a jeho aplikace
14) Trojný integrál a jeho aplikace
15) Operátor Hamiltonův a Laplaceův
16) Křivkový integrál I. druhu a jeho aplikace
17) Křivkový integrál II. druhu a jeho aplikace
18) Plošný integrál I. druhu a jeho aplikace
19) Plošný integrál II. druhu a jeho aplikace
20) Integrální věty a jejich aplikace

Každý student dostane v tištěné podobě své vlastní individuální zadání, to znamená, že žádná úloha se ve skupině nevyskytuje dvakrát a to ani s obměněnými čísly. Každý student má jinou úlohu (délka křivka, hmotnost křivky, plošný obsah části válcové plochy, křivkový integrál I. druhu atd.), jediné, co mají společného, je dané téma. Dále se student na tomto prvním cvičení dozví celou organizaci předmětu včetně požadavků na cvičení, zápočet a zkoušku a kde nalezne veškeré potřebné informace. Student by se měl přihlásit na e-learning školy http://www.vutbr.cz/elearning pomocí svého loginu a hesla a v kurzu Matematika II si projít tyto položky:

1) **Sylaby** – kde jsou sylaby předmětu Matematika II a to jak přednášek, tak i cvičení, včetně požadavků na zápočet a okruhů otázek ke zkoušce.
2) **Hodnocení** – do kterého vyučující průběžně zaznamenává body z testů, ze samostatné práce, aktivity, docházky a jaké je celkové hodnocení jednotlivého studenta.
3) **Učební texty** – zde jsou učební texty v elektronické podobě, nebo odkaz na ně a sbírka příkladů z tohoto předmětu
4) **E-learningové podpory** - Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia, EFS (manažer projektu: doc. RNDr. Zdeněk Boháč, CSc.)
5) **Zkušební testy** - zde si student může nanečisto vyzkoušet, zda je připraven na test, v každém testu student volí ze čtyř možných odpovědí jednu správnou. Po dalším zvolení téhož testu se odpovědi promíchají.
6) **Cvičení** – zde student nalezne před cvičením zadání úloh, které se budou na cvičení řešit. Měl by si je propočítat a připravit si případné dotazy na cvičení. Po skončení cvičení zde nalezne i vzorová řešení těchto úloh.
7) **Příklady k procvičení** – další příklady a jejich výsledky k jednotlivým cvičením
8) **Příprava na testy** – příklady, které jsou potom v ostrých testech
9) **Příklady k procvičení ON-LINE** – zde nalezne jednak odkaz na příklady k procvičení ze ZČU Plzeň (TRIAL) jednak z VUT Brno
10) **Pokyny** – zde nalezne pokyny pro vypracování samostatné práce
11) **Různé** – zde nalezne termíny udílení zápočtu a konzultační hodiny o zkouškovém období a další důležité informace.

Pokud student použije počítač s extrémně pomalým připojením na internet, nebo zapomene své heslo, tak může navštívit webové stránky tohoto předmětu http://www.fch.vutbr.cz/~polcerova, kde ale nenalezne položku Hodnocení a Zkušební testy. Tyto dvě položky jsou přístupné pouze z e-learningového portálu a pouze studentům školy.

Cvičení pak probíhá tak, že se vyučující nejprve zeptá, se kterými příklady studenti měli problémy a zaměří se na jejich vysvětlení. Zpravidla vyzve studenta, aby úlohu řešil na tabuli a pomůže mu objasnit problémy. Takto postupně vyřeší téměř všechny úlohy, které danou tématiku dostatečně postihují. Ke konci cvičení si pak studenti začnou řešit svou úlohu ze samostatné práce, aby se mohli na případné nejasnosti ihned zeptat a mohli pak úlohu sami vyřešit. Cílem je, aby si student sám vypočítal z každého tématu alespoň jednu úlohu, a aby pracoval průběžně. Proto také po třetím cvičení studenti odevzdávají první tři úlohy (nanečisto na volných listech) ze samostatné práce. Vyučující tak pozná, zda studenti dané téma již ovládají, zda úlohy řeší a s jakým úspěchem. Studenti se dozvědí, zda úlohy vyřešili správně a zda látce rozumějí. Po každém tematickém celku studenti píší test.

Celkem studenti píší tři testy. První obsahuje čtyři příklady na diferenciální rovnice (první je separovatelná, druhá lineární diferenciální 1. řádu, třetí vyššího řádu s konstantními koeficienty nehomogenní a u čtvrté musí poznat o jakou se jedná a vyřešit ji). Celkem student může dosáhnou čtyř bodů, aby mu byl test uznán, tak musí dosáhnou alespoň 2 bodů. Pokud bude mít bodů méně, tak si musí napsat opravu. Při první opravě se mu započítává aritmetický průměr (je-li vyšší než dva), při další opravě může dosáhnout maximálně dvou bodů a opravy má pouze tři. První dvě si může napsat kdykoliv v průběhu semestru po domluvě s vyučujícím, tu třetí, poslední možnost, dostane až o zkouškovém období. Pokud ani pak nedosáhne požadovaného počtu bodů, nebo je již konec zimního semestru, tak může podat, ve výjimečných případech (nemoc), žádost o prodloužení lhůty na získání zápočtu do přesně domluveného data a pak píše všechny tři testy znovu. Druhý test obsahuje tři příklady (dva na diferenciální počet funkcí dvou a více reálných proměnných, třetí je pak dvojný nebo trojný integrál či jeho aplikace). Opět může získat maximálně 4 body (1+1+2) a k uznání potřebuje opět dva body. Třetí test obsahuje čtyři příklady (operátor Hamiltonův, křivkový integrál, plošný integrál, integrální věty), student může získat maximálně 4 body, k uznání jsou nutné body dva. Studenti dostávají individuální testy, to znamená, že každý z nich má úplně jiné zadání. Jestliže všichni mají jako druhý příklad křivkový integrál, tak každý počítá něco jiného, jeden délku křivky, jiný její hmotnost, jiný cirkulaci, jiný práci, další potenciál atd. Studenti z těchto testů mají velké obavy, a proto mají na e-learningu jak příklady pro přípravu na testy, tak i možnost si několik variant těchto zadání nanečisto vyzkoušet.

Na druhém cvičení píší minitest, kdy si každý vytáhne jeden příklad, kde má provést příslušnou početní operaci s danými komplexními čísly a výsledek převést do goniometrického tvaru. Mohou dostat jeden bod, který se jim počítá do aktivity, kam se počítají i výsledky z příkladů ze samostatné práce, které po každém celku průběžně odevzdávají. Na posledním cvičení pak odevzdávají ve svázané podobě všech 20 příkladů. Aby byla tato samostatná práce studentovi uznána, tak musí mít vyřešeny všechny úlohy, ale nemusí být všechny úplně správně. Za každý správně vyřešený příklad má 0,25 bodů. Celkem tedy může získat 5 bodů, k uznání mu pak stačí body 3. Celkem tedy student může ze cvičení dosáhnou 20 bodů, které se mu započítávají do bodového hodnocení u zkoušky. Z písemné části zkoušky může získat maximálně 50 bodů a z ústní části zkoušky 30 bodů. Celkem tedy může získat 100 bodů. Aby získal zápočet, tak nesmí mít neomluvenou absenci, musí mít alespoň dva body z každého testu a tři body ze samostatné práce. Aby úspěšně absolvoval zkoušku, tak musí mít nadpoloviční počet bodů jak z písemné, tak i z ústní části zkoušky.

3. Zkušenosti

Matematika II patří mezi předměty tzv. teoretického základu a vědomosti a dovednosti (teoretické i praktické), které zde studenti získávají by měli být schopni využívat v předmětech jako je fyzikální chemie, fyzika, chemické inženýrství atd. Měli by být schopni je aplikovat i na neznámé problémy, se kterými se setkají nejen v odborných předmětech zde na fakultě resp. při řešení bakalářské práce, ale i později v praxi resp. ve výzkumu. Protože hodinová dotace tohoto předmětu se neustále snižuje, tak se snažíme všemi výše uvedenými způsoby dosáhnout toho, aby tato redukce vyučovacích hodin neměla vliv na kvalitu předávaných poznatků. Narážíme zde ale na houževnatý odpor studentů, kteří nechtějí ani sami sobě otevřeně přiznat, že mají již slabé základy, protože předmět Matematiku I hrubě podcenili (někteří i střední ba dokonce i základní školu), že se jim nechce poctivě a pravidelně se připravovat na každou vyučovací hodinu, že raději dělají cokoliv jiného, než aby se učili matematiku a dobrovolně řešili úlohy z tohoto předmětu, že se snaží co nejrychleji zapomenout získané vědomosti, aby se mohli věnovat jiné činnosti, že jim většinou vůbec nejde o získání potřebných vědomostí a dovedností, ale jenom o to, udělat zkoušku a mít od tohoto předmětu pokoj.

Dozvídáme se proto od studentů, že jsou přetěžováni, že toho chceme od nich strašně moc, že přednáškám nerozumějí, protože jsou příliš teoretické, že literatura je příliš obsáhlá a příliš náročná, že nemohou nalézt žádné řešené příklady, že jsou na Fakultě chemické a že nejdůležitější jsou odborné předměty, že vůbec nevědí, k čemu jim tyto znalosti a dovednosti budou při dalším studiu a v praxi, že matematiku nikdy potřebovat nebudou atd. Jak již bylo řečeno výše, v akademickém roce 2006/2007 nebylo již probíráno téma pravděpodobnost a statistika a studenti tedy nemusili zpracovávat projekt, ve kterém statisticky zpracovávali naměřená data. Z tohoto projektu mohli získat celkem dva body, které jsme se rozhodli, že jim udělíme za to, že vypracují a přednesou referát. Celé učivo bylo rozděleno do 25 témat, aby si každý student mohl jedno vybrat a na toto téma si měl připravit krátký referát, ve kterém by spolužákům svými vlastními slovy objasnil danou teorii, ukázal, jak se s její pomocí řeší „matematické“ příklady, uvedl alespoň jeden praktický příklad využití a alespoň jeden příklad ze svého oboru. Referát pak mohl obohatit o informace z historie matematiky tj. tím, který matematik se danou tématikou zabýval, jakých dosáhl výsledků atd. Domnívala jsem se, že se z těchto referátu dozvím, jak studenti chápou definice a věty a jakým „jazykem“ si je mezi sebou objasňují, jaké příklady jsou schopni okamžitě z odpřednášené teorie pochopit a vyřešit, jaké praktické úlohy je nejvíce zajímají, ale hlavně jsem si od nich slibovala, že získám další příklady z jejich oboru, kterými bych mohla obohatit výuku. Dokonce jsem doufala, že by tyto referáty mohly vzbudit jejich zájem a že by nebyly takové problémy se zápočty. A jak to dopadlo? Katastrofálně. Prakticky ani jeden student nebyl schopen si samostatně referát připravit, nejen že nebyli schopni vysvětlit podstatu teorie, ale nebyly schopni ani vybrat příklady, které by dané téma reprezentovaly. Vůbec se nepozastavili nad tím, že první část vztahu mají v jiné symbolice, než druhou část, že jim jejich věty nedávají smysl a co se pak týče příkladů z praxe a z teorie, tak to bylo již úplné fiasko. Většinou jsem slyšela větu: „Nic jsem nemohl(a) najít a nikdo mi nebyl schopen poradit.“ Když jsem jim nějakou úlohu z praxe našla, tak ji zase nebyli schopni vyřešit, nebo opsali nějaké řešení, které svou symbolikou a zápisem vůbec nekorespondovalo s tím, co dosud napsali. Takže jsem jim musila s referáty pomáhat, chystat materiály, zdroje, ze kterých mají čerpat a nakonec i řešit úlohy. Došlo mi, že by studenti potřebovali nějakou literaturu, kde by: 1) měli stručně a pokud možno pochopitelně, ale přitom správně, vysvětlenu teorii, bez důkazů, protože ty většina z nich považuje za zbytečné, nerozumí jim, nečte je a pouze je děsí jejich složitost a matematický jazyk v nich použitý, 2) vhodné celkem jednoduché vzorově vyřešené příklady, které by obsáhly celou tématiku a vhodně ji reprezentovaly, 3) měli k dispozici alespoň jeden praktický příklad, aby viděli, kde se daná teorie v praxi může použít, 4) měli alespoň jeden příklad z nějakého chemického oboru, aby věděli, že v chemii se tato teorie používá a například kde 5) že by bylo vhodné je seznámit i s významnými matematiky, kteří se danou problematikou zabývali. Ponechala jsem všech 25 „referátů" a pokusila jsem se taková skripta sepsat. Nejprve jsem se rozhodla, že vše budu psát podle platné normy ČSN ISO 31-11, která nahrazuje ČSN 01 1001 z 3. ledna 1961. Tato norma je českou verzí mezinárodní normy ISO 31-11:1992, která má status české technické normy a která vyšla v roce 1999. Skripta obsahují celkem 25 kapitol, které odpovídají tématům předmětu Matematika II a to v rozsahu, v jakém se vyučují na naší fakultě. Každá kapitola (referát) obsahuje celkem pět částí: teorii, příklady, praktický příklad, příklad z oboru a historickou poznámku. Za předmluvou je přehled používaných symbolů, pak následuje podrobný obsah, který obsahuje heslovitý popis jednotlivých příkladů, aby student resp. vyučující věděl, jaká problematika je zde řešena i jména matematiků, o kterých se zde hovoří. Na konci je pak nejen seznam použité literatury a internetové zdroje, ale i rejstřík věcný a jmenný. Oba rejstříky by měly usnadnit rychlé vyhledávání konkrétní informace v textu. Protože původní rozsah stránek se vyšplhal k číslu 500, tak bylo nutné celou práci přepracovat. Písmo celého textu bylo změněno na Times New Roman velikost 10 a do této velikosti i typu písma byly přepsány všechny rovnice, obrázky byl zmenšeny a co šlo, tak bylo zredukováno, nebo odstraněno. I po této úpravě zůstal text značně rozsáhlý. Použité obrázky, které jsou barevné, by při černobílém tisku ztratily hodně ze své vypovídající hodnoty, a navíc by barevně vytištěná skripta byla tak drahá, že by si je studenti těžko koupili, obzvláště pro povinně volitelný předmět. Z těchto důvodů byla skripta vydána na CD nosiči a studenti si je mohou zakoupit cca za 100 Kč. Tři exempláře pak byly na naší fakultě také barevně vytištěny a svázány.

Tato netradičně napsaná skripta jsem letos ve svých cvičeních používala poprvé a zatím jsem na ně zaznamenala pouze kladné ohlasy a to nejen od studentů, ale i od vyučujících, se kterými jsem konzultovala použitou terminologii v příkladech z jejich oboru a i od ostatních vyučujících. Protože první tři témata jsou obsahem i předmětu Matematika I (i když ne v plném rozsahu), a protože v těchto skriptech je jedna kapitola věnována pouze křivkám, jejich popisu a použití a jedna pouze plochám, jejich popisu a aplikacím, tak je s výhodou používám i v tomto předmětu a snažím se tak studenty motivovat pro volbu tohoto předmětu.

4. Závěr

Přes všechno naše snažení zůstává matematika jako taková na naší fakultě předmětem neoblíbeným a počet studentů, kteří si zapisují předmět Matematika II neustále klesá.

Literatura

[1] POLCEROVÁ, M.: *Matematika II. v chemii a v praxi.* Místo vydání: Brno, Vydavatel Vysoké učení technické v Brně, Fakulta chemická, Rok vydání 2007. ISBN 978-80-214-3451-6 .

[2] POLCEROVÁ, M., POLCER J.: Sbírka příkladů z matematiky II. Místo vydání: Brno, Vydavatel VUTIUM, Rok vydání 1999. ISBN 80-214-1274-7 .

GEOMETRIE A FYZIKA V ANGLIČTINĚ

Jana Přívratská[1]

Abstrakt:
Článek navazuje na příspěvky D. Bittnerové a G. Plačkové. V rámci grantu FRVŠ připravujeme dvousemestrový kurz pro stávající učitele matematiky a fyziky základních a středních škol, kde se zaměřujeme na problematiku výuky matematiky, geometrie, fyziky, statistiky a pravděpodobnosti v angličtině. V článku jsou prezentovány zkušenosti s přípravou tištěných i elektronických textů z geometrie a fyziky včetně ukázek.

1. Úvod

V poslední době roste počet středních škol se speciálně připravenými programy, v rámci kterých probíhá výuka vybraných předmětů v cizím jazyce. Na tento trend by měly reagovat nejen pedagogické fakulty, ale i další vysoké školy, na kterých jsou akreditovány učitelské obory. Je nezbytně nutné, aby tyto školy alespoň některé ze svých absolventů připravily na výuku v cizím jazyce.

Na Katedře matematiky a didaktiky matematiky Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci se již mnoho let skupina pedagogů zabývá výukou matematiky, deskriptivní geometrie, statistiky i fyziky v angličtině [1,2,3]. Někteří pedagogové působí externě i na jazykových gymnáziích.

V současné době, v rámci grantu FRVŠ, zpracováváme materiály pro kurz určený učitelům základních a středních škol, který by je připravil na výuku matematiky a fyziky v angličtině [4, 5, 6, 7, 8]. Naším cílem je, aby zájemci z řad učitelů byli schopni poskytnout kompletní středoškolský výklad v angličtině, případně alespoň doprovodný komentář k anglickému odbornému textu. Předpokládáme, že učitelé na nižších stupních jazykových gymnázií by žáky v hodinách matematiky a fyziky postupně seznamovali se základní terminologií a anglické texty používali jen jako doplněk probírané látky. Tomu také bude odpovídat zpracování jednotlivých témat. Kromě samotných "výkladových" textů se k jednotlivým předmětům bude postupně kompletovat výkladový česko-anglický a anglicko-český slovníček. Připravuje se i sbírka úloh.

Současně připravujeme i studijní materiály pro zahraniční studenty, kteří u nás studují v angličtině v rámci projektu Erasmus. Počítáme i s rozšířením nabídky pro doktorandy nebo studenty, kteří se připravují na studium v zahraničí. Předpokládá se, že zahraniční studenti i naši doktorandi mohou využívat i materiály určené pro přípravu učitelů, především pro zopakování a sjednocení terminologie.

Kromě speciálních distančních textů se vytvářejí i vlastní e-learningové moduly. Zvolili jsme stále více využívané prostředí Moodle, do něhož se postupně materiály pro studenty budou vkládat. Tento modulární systém umožní doplňování předložených textů, jejich obměnu a aktualizaci odkazů na internetové zdroje. Tento systém umožňuje pružně reagovat na specifické potřeby jednotlivých skupin studentů.

[1] Katedra matematika a didaktiky matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci,, email: jana.privratska@tul.cz

2. Geometrie

Příprava textů i přednášek je rozdělena podle zaměření studentů do dvou skupin:

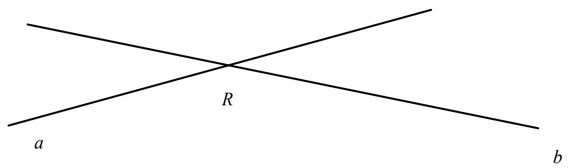
- **Příprava učitelů pro výuku matematiky na ZŠ a SŠ v angličtině,**

  případně volitelný předmět GEG (Geometrie anglicky)

  - Planimetrie
  - Stereometrie
  - Deskriptivní geometrie

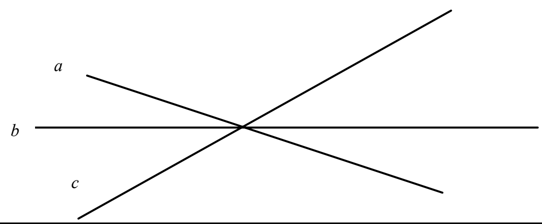
intersecting lines

Two lines a and b are said to be intersecting ($a \times b$) if they have one and only one common point, the **point of intersection** ($R = a \cap b$).



concurrent lines

Three or more lines are said to be concurrent if they intersect at a single point.



Obr. 1: Ukázka textu k oddílu planimetrie
(RELATIVE POSITION OF STRAIGHT LINES)

- **Výuka pro zahraniční studenty nebo doktorandy**

  Texty připravované pro tuto cílovou skupinu jsou většinou jazykové mutace skript či dalších studijních materiálů běžně využívaných při výuce v češtině. Předpokládáme, že studenti již zvládli základní anglickou terminologii daného předmětu.

  - Deskriptivní geometrie
  - Diferenciální geometrie křivek a ploch
  - Kinematická geometrie
  - Projektivní geometrie

Theorem 2.2
The images of parallel straight lines intersect each other on the vanishing straight line, and
a) if straight lines a, b are not parallel to the axis o, then $U' = a' \cap b'$ is a classical point,
i.e. a', b' are intersecting straight lines (Fig. 2.7a),
b) if straight lines c, d, and o are parallel, then $U'_\infty = c' \cap d'$ is a point at infinity,
i.e. c', d' are parallel straight lines (Fig. 2.7b).

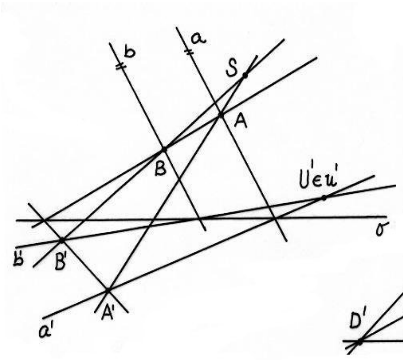


Fig. 2.7a

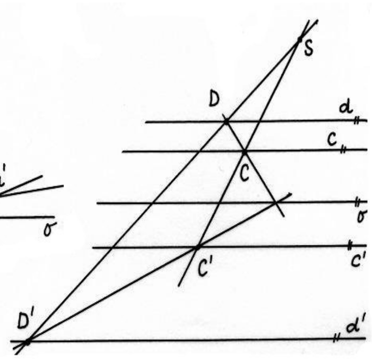


Fig. 2.7b

Obr. 2: Ukázka textu k oddílu Deskriptivní geometrie (CENTER COLLINEATION)

3. Fyzika

Protože výuku pro doktorandy a zahraniční studenty zajišťuje Katedra fyziky, omezili jsme se jen na přípravu učitelů pro výuku fyziky na ZŠ a SŠ v angličtině. Vytvářené materiály kopírují především látku probíranou na vyšších stupních gymnáziích. Pro základní školu a nižší třídy víceletých gymnázií se připravují jen jednoduché texty vybraných partií tak, aby se mohly zařadit i do hodin angličtiny.

U textů přejatých z internetu i z anglických učebnic je většinou nutná revize znační fyzikálních veličin a jednotek tak, aby odpovídalo našim normám.

- mechanika
- gravitační pole
- molekulová fyzika a termodynamika
- elektromagnetické pole
- kmitání a vlnění
- optika
- atomová a jaderná fyzika
- kvantová fyzika
- speciální teorie relativity

4. Závěr

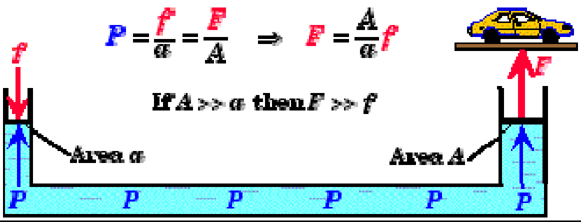
S e-learningovou podporou výuky učitelů geometrie a fyziky v angličtině i s tvorbou distančních textů teprve začínáme. Předpokládáme, že v této práci budeme pokračovat a studijní materiály průběžně dotvářet a doplňovat.

PASCAL'S PRINCIPLE (PASCAL'S LAW)

Any external pressure applied to a fluid is transmitted undiminished throughout the liquid and onto the walls of the containing vessel.

http://www.google.cz/search?hl=cs&lr=&q=Pascal%27s+Law&start=40&sa=N

Example :
A hydraulic pump used to lift a car. When a small force **f** is applied to a small area **a** of a movable piston it creates a pressure **P = f/a**. This pressure is transmitted to and acts on a larger movable piston of area **A** which is then used to lift a car.



Obr. 3: Ukázka přejatého textu k oddílu Mechanika kapalin (PASCALŮV ZÁKON)

Poděkování
Tento článek vznikl za podpory grantu FRVŠ č. 1544 – Příprava učitelů ZŠ a SŠ pro práci s nadanými žáky a cizinci v angličtině.

Literatura

[1] VILD, J., PŘÍVRATSKÁ, J., VOLF. P.: Výuka kateder matematiky TU v Liberci na "Univerzitě NISA". In. *Sborník 27. konference VŠTEZ Matematika v inženýrském vzdělávání.* Hejnice: ČVUT, 2002. ISBN 80-7015-864-6°, s.198-201.

[2] PŘÍVRATSKÁ, J: Management of information and communication at "the Neisse university"- Math in the 1st year. In. *Proceedings ECON.* Brno: Masarykova univerzita, 2006. ISBN 80-210-4083-1, s. 87-91.

[3] BITTNEROVÁ, D.: Management of information and communication at "the Neisse university"- Comparative studies. In. *Proceedings ECON.* Brno: Masarykova univerzita, 2006. ISBN 80-210-4083-1, s. 12-16.7

[4] BITTNEROVÁ, D., PLAČKOVÁ, G., PŘÍVRATSKÁ, J: Volitelný předmět MAG. In. *XXVI International Colloquium on the Management of Educational Process*. Brno: Univerzita obrany, 2008. ISBN 987-80-7231-511-6, s.1-4 on CD-ROM.

[5] BITTNEROVÁ, D.: Práce s nadanými žáky a cizinci v angličtině. In. *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008*. V tisku.

[6] PŘÍVRATSKÁ, J: Výuka geometrie anglicky. In. *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008*. V tisku.

[7] BITTNEROVÁ, D.: Kurz matematiky v angličtině. In. *V tomto sborníku.*

[8] PLAČKOVÁ, G.: Příprava učitelů pro výuku pravděpodobnosti a statistiky anglicky. In. *V tomto sborníku*.

Iracionální rotace kružnice a ergodická věta

Martin Soukenka[1]

Abstrakt

Příspěvek pojednává o dynamickém systému na kružnici z pohledu Birkhoffovy ergodické věty. Je uveden důsledek ergodicity iracionální rotace v teorii čísel a některé jiné důsledky.

Iracionální rotace kružnice je speciálním případem dynamických systémů na kružnici, které prvně definoval A.N.Kolmogorov. Jeho motivací byla snaha modelovat dynamické vlastnosti hnaného mechanického rotoru, systém však modeluje rovněž kontrolní obvod s negativní zpětnou vazbou, užívaný v elektronice. Později Kolmogorův žák V.I.Arnold modeloval pomocí systému na kružnici dynamické vlastnosti srdeční činnosti.

Definice 1. Buď $\alpha \in (0,1)$ iracionální číslo a nechť zobrazení $T : [0,1] \to [0,1]$ je dáno předpisem

$$T(x) = x + \alpha \pmod 1.$$

Pak T se nazývá *iracionální rotace kružnice.*

Pojem *rotace* pochází z rotace kružnice délky jedna o úhel α, přičemž krajní body intervalu $[0,1]$ se na kružnici ztotožňují. Základní vlastností dynamického systému daného opakovaním zobrazení T na libovolný bod $x \in [0,1]$ je skutečnost, že množina $\{x, T(x), T^2(x), \ldots, T^n(x), \ldots\}$, nazývaná *orbitou bodu* x, je hustá na $[0,1]$. Jinými slovy, pro libovolné $x \in [0,1)$ je množina

$$\{x + n\alpha : n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

hustá na kružnici $[0,1)$. Systém nemá žádné periodické body: kdyby byla orbita nějakého bodu periodická s periodou p, pak by platilo $p\alpha = 0 \pmod 1$, což by znamenalo $p\alpha = k \in N$ a úhel α by byl racionální.

[1]KM FSv. ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: SoukenkaM@mat.fsv.cvut.cz

Uvažme konečnou část orbity, řekněme délky n, libovolného bodu $x \in A \subset [0,1]$. Ptejme se po *budoucím vývoji* iterací bodu x: kolik členů této části orbity padne do A? Je tento počet v nějakém vztahu k délce množiny A?

Uvažujme Lebesgueovu míru μ na $[0,1]$. Nakreslíme-li si graf zobrazení T na $[0,1]$, lze snadno nahlédnout, že pro každou podmnožinu $A \subset [0,1]$ platí $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, tedy *délka vzoru množiny je rovna délce této množiny.* Platí-li tato vlastnost pro každou podmnožinu $A \subset [0,1]$, říká se, že zobrazení T je *míru zachovávající* nebo také, že míra μ je *T–invariantní.* Platí-li pro nějakou podmnožinu $A \subset [0,1]$ inkluze $T(A) \subset A$, říká se, že množina A je *T–invariantní* (nebo zkráceně *invariantní*). Pravděpodobnostní míra μ je *ergodická*, jestliže každá měřitelná invariantní množina má míru 0 nebo 1.

Zajímavost 1. (Gaussův dynamický systém). Pro zobrazení $g : (0,1) \to (0,1)$ dané předpisem

$$g(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right],$$

sestrojil C.F.Gauss invariantní míru. Zobrazení g ale není bijekce!

Ergodicita míry, tj. ergodicita transformace tvořící dynamický systém, v němž skrze tuto míru měříme průběh událostí, zodpoví na výše položené otázky. Platí následující věta.

Birkhoffova ergodická věta. *Buď $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ pravděpodobnostní prostor (tj. $\mu(X) = 1$), $f \in L^1(\mu)$ a $T : X \to X$ míru zachovávající transformace. Potom existuje $f^* \in L^1(\mu)$ tak, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(Tx) + f(T^2x) + \dots f(T^{n-1}x)}{n} = f^*(x)$$

pro skoro všechna $x \in X$. Navíc, je-li T ergodická transformace, platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(Tx) + f(T^2x) + \dots f(T^{n-1}x)}{n} = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

pro skoro všechna $x \in X$.

Poznámka 1. Interpretace poslední rovnosti zní: pro ergodickou transformaci je *časová střední hodnota* rovna *prostorové střední hodnotě* skoro jistě.

Poznámka 2. Ve statistické fyzice hraje ergodická věta ústřední roli. Problémem ale je nalézt pro reálné fyzikální systémy ergodické míry.

Poznámka 3. Podle V.I.Arnolda je ergodický princip stejný princip, podle kterého ke sledování evoluce dřeva v lese není nutné čekat na to, až dřevo vyroste ze semene a uhyne, ale stačí se jednoduše podívat na dřeva různých stáří.

V případě iracionální rotace kružnice je zobrazení T ergodická transformace. Zvolíme-li v ergodické větě $f := \chi_A$ kde $\chi_A(x) = 1$ pro $x \in A$ a 0 pro $x \notin A$, pak ergodická věta říká, že střední hodnota počtu návštěv členů orbity bodu $x \in A$ v této množině A (tj. střední hodnota času stráveného v A) je rovna délce této množiny!

Uvažujme posloupnost prvních cifer císel 2^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, \ldots$$

Ptejme se po statistice jednotlivých cifer 1 až 9 v této posloupnosti. Hermann Weyl dokázal na počátku 20. století následující větu.

Věta (H.Weyl) *Buď $\{nx\}$ zbytková část čísla nx (tj. $\{nx\} = nx - [nx]$). Nechť x je iracionální číslo. Pak posloupnost*

$$\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \ldots$$

je rovnoměrně rozložena na intervalu $[0, 1]$.

Poznámka 4. Poslední tvrzení je důsledkem ergodicity iracionální rotace kružnice. H. Weyl však dokázal toto tvrzení před Birkhoffem a jeho větou.

První cifra čísla je dána zbytkovou částí jeho dekadického logaritmu. Např. první cifra čísla $2008 = 2,008 \cdot 1000$ je dána jako $\{\log 2008\} = \{\log(2,008 * 1000)\} = \{\log 2,008 + \log 1000\} = \{3 + \log 2,008\} = \log 2,008$. Jinými slovy, na intervalu $[\log i, \log(i+1))$ leží ty zbytkové části logaritmů těch čísel, jejichž první cifrou je $i = 1, 2, \ldots 9$. Stačí tedy sestrojit intervaly $A_1 = [\log 1, \log 2)$, $A_2 = [\log 2, \log 3), \ldots, A_9 = [\log 9, \log 10)$.

Protože lze psát $\log 2^n = n \cdot \log 2$ a číslo $\log 2$ je iracionální, jsou podle Weylovy věty zbytkové části $\{\log 2^n\}$ rovnoměrně rozloženy na $[0, 1]$. To ale znamená, že z celého intervalu $[0, 1]$ zabírají zbytkové části logaritmů čísel s první cifrou rovnou i celkově úsek délky $\mu(A_i)$. Vyčíslíme-li přibližně jednotlivé délky

i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
$\mu(A_i)$	$0,301$	$0,176$	$0,125$	$0,097$	$0,079$	$0,067$	$0,058$	$0,051$	$0,046.$

vidíme, že jedniček je přibližně 30 procent, zatímco devítek je jen 5 procent, přičemž statistika cifer postupně klesá. Poznamenejme, že stejnou statistiku prvních cifer má libovolná geometrická posloupnost s výjimkou těch, které mají základ $10^{p/q}$, kde p, q jsou celá čísla.

Podle V.I.Arnolda vykazuje právě uvedené rozložení prvních cifer mnoho přírodních a společenských jevů a formuluje to jako empirický zákon. Např. první cifry počtu obyvatel států světa - zde lze podat vysvětlení skrze zákon populační dynamiky, podle kterého počet obyvatel pevně zvoleného státu vykazuje v čase geometrickou posloupnost. Podle Weylovy věty pak statistika prvních cifer populace tohoto státu v čase je stejná, jako statistika prvních cifer mocnin dvojky. V souhlase s „ergodickým principem“ lze zaměnit časové střední hodnoty prostorovými: statistika prvních cifer populací všech států musí být stejná jako časová statistika jednoho státu. Podobnou zákonitost vykazují první cifry rozloh států, délek řek, výšek hor, kapitálů společností, ale také třeba první cifry počtu stran všech knih ve Vaší knihovně. Proč tomu tak je, nikdo neví.

FRONTÁLNA VS. KOLABORATÍVNA METÓDA VÝUČBY GEOMETRIE NA VŠ

Darina Stachová[1]

Abstrakt
Je zrejmé, že vo vysokoškolskom vzdelávaní je veľa oblastí, nad ktorými by sme sa mali zamyslieť a snažiť sa ich inovovať. Text článku pojednáva o skúsenostiach a výsledkoch pri realizovaní pedagogického experimentu s využitím kolaboratívnej vyučovacej metódy.

1. Úvod

V dôsledku mnohých spoločenských zmien sa na Slovensku vysúva do popredia potreba nového nazerania na proces vzdelávania, ale i na proces nadobúdania poznatkov. Stále viac sa v kruhoch odbornej pedagogickej verejnosti začína hovoriť o problémoch gramotnosti a to nielen tej školskej, ale aj (a najmä) funkčnej. Kľúčovými pojmami týchto zmien, ktoré postupne prerástli do reformy, sú humanizácia, demokratizácia a individualizácia výučby.

Základnou zmenou spôsobu výučby, ktorá úzko súvisí so zmenami požiadaviek v oblasti vzdelávania a výchovy, je posilnenie procesuálnej dimenzie učenia. Toto vyžaduje meniť spôsoby a metódy výučby, ktoré by pomohli študentom naučiť sa učiť sa. Aby študent pochopil, ktoré metódy sú pre jeho učenie najefektívnejšie, musí mať možnosť stretávať sa s čo najväčším množstvom interaktívnych metód a klásť si otázky, ktoré mu objasnia procesuálnu stránku učenia sa.

„Prvou a najhlavnejšou povinnosťou každého vyučovania je získať žiaka na prácu pri vnímaní pojmov a predstáv, priviesť ho k tomu, aby sa aj on pričinil o to, aby pracoval a učil sa.“

(J. Hronec; 1881 – 1959)

Prenos poznatkov od učiteľa k študentovi iba prostredníctvom hovoreného slova často vyvoláva povrchné prijatie vedomostí, t. j. odtrhnutie od skutočnosti a nepochopenie. Študenti si osvojujú informácie bez účasti potrebných zmyslov a manipulácie s objektmi. Chýba im prvosignálna základňa, nevedia si často za slovom predstaviť reálny objekt. Preto už od čias J. A. Komenského volá didaktika po názornom vyučovaní, aby objekt, ktorý študent študuje, vnímal viacerými zmyslami. Učiteľ ukazuje študentom objekty, modely, s ktorými sa majú oboznámiť, a študenti ich pozorujú. To je podstata metódy demonštrovania a pozorovania. Aby študenti porozumeli podstate pozorovaného objektu, je dôležité demonštrovanie spojiť so živým výkladom učiteľa. Demonštrovanie môže vo vyučovacom procese spĺňať rôzne didaktické funkcie. Napríklad motivuje študentov, ak je zaradené na začiatku výučby, slúži na osvojenie učiva v spojení s prednáškou, slúži na potvrdenie platnosti teórie po osvojení učiva, na upevnenie učiva a pod.

[1] KAGD FPV ŽU v Žiline, Hurbanova 15, 01026 Žilina, Slovenská republika,
e-mail: darina.stachova@fpv.uniza.sk

2. Aktivizujúce vyučovacie metódy

Od 80-tych rokov sa stále viac uplatňuje možnosť vlastného aktívneho prístupu študenta k výučbe. Priame vyučovacie metódy sú nahradzované princípom konštrukcie vedomostí. Podľa konštruktivistickej teórie si ľudia nové znalosti *konštruujú*, vytvárajú ich pri interakcii so svojím okolím.

Na splnenie vytýčených cieľov vyučovania geometrie je nevyhnutné používať aktivizujúce vyučovacie metódy, a to predovšetkým individuálnu prácu študentov, prácu vo dvojiciach alebo skupinovú prácu. Okrem individuálnej práce zacielenej na získanie riešiteľských stratégií a ďalších zručností je nevyhnutné, aby študenti objavovali nové poznatky experimentovaním a vlastnou činnosťou. Ťažiskovým princípom všetkých týchto metód preto je *skúsenostné učenie*. Medzi aktivizujúce metódy patria napr.: projektová metóda, problémové vyučovanie, kolaboratívne a kooperatívne vyučovanie, integrované tematické vyučovanie, a participatívne metódy – diskusné, heuristické, situačné, metódy riešenia konfliktov, metóda brainstormingu, didaktické hry a ďalšie. Z nich didaktické hry sú doporučené najmä pre základné školstvo. Kolaboratívne a kooperatívne vyučovanie [2] majú k sebe sémanticky veľmi blízko, preto sa pri nich na chvíľu zastavíme:

- *kolaboratívne vyučovanie* – jedná sa skupinové vyučovanie, kde všetci členovia skupiny majú spoločný cieľ a rovnaké zapojenie, spoločná je zodpovednosť za výsledok, interakcia a komunikácia je dôležitá, spoločné je riadenie zdrojov a syntéza informácie; pre proces kolaborácie je charakteristická synchrónna činnosť; t. j. pri kolaborácii študenti spolupracujú na dosiahnutí jedného cieľa, ktorý by nemohli dosiahnuť individuálne.

- *kooperatívne vyučovanie* – tiež má rozmer skupinového vyučovania, charakteristické je rozdelenie úlohy do nezávislých čiastkových úloh, ktoré sú pridelené členom tímu, samostatná je zodpovednosť za výsledok pridelenej podúlohy, spolupráca sa vyžaduje iba pri zlučovaní čiastkových výsledkov do celkového skupinového výsledku, pre proces kooperácie je charakteristická asynchrónna činnosť.

Ináč povedané kooperácia je deľba práce medzi účastníkmi a kolaborácia je spoločná práca skupiny na splnení spoločného cieľa. Pri kooperácii, na rozdiel od kolaborácie, si študenti hlavnú úlohu rozdelia na čiastkové úlohy a každý z nich nesie zodpovednosť za riešenie jemu pridelenej čiastkovej úlohy. Konečný výsledok vznikne spojením týchto čiastkových úloh. Na ilustráciu oboch pojmov uvádzame nasledujúci príklad. Predpokladajme, že skupine študentov zadáme riešiť konkrétny geometrický problém analytickou aj konštrukčnou metódou. Potom pri kooperácii jeden študent rieši problém analyticky a iný konštrukčne. Skupina predloží spoločné riešenie zložené z oboch častí. Každý diel riešia jednotlivci samostatne. Pri kolaborácii sa všetci členovia skupiny zapájajú aj do analytického, aj do konštrukčného riešenia úlohy.

Pre učiteľa to znamená, že individuálnym prístupom objavuje a usmerňuje rozvoj schopností jednotlivcov a pritom riadi tvorivú prácu kolektívu. Iniciatíva jednotlivých študentov pri riešení úloh a spoluzodpovednosť za pracovné výsledky majú hlboký výchovný význam. Objaviteľský prístup pri získavaní nových poznatkov a radosť zo samostatne vyriešenej úlohy posilňujú pozitívny vzťah študenta k predmetu.

Preto k jej ťažiskovým metódam patria tie, ktoré sú schopné rozvíjať skúsenosť, pocity, emócie, postoje, schopnosti a zručnosti študentov. Aktivizujúce metódy podnecujú študentov k vlastnej práci, k vlastnému aktívnemu prístupu a k samostatnému učeniu sa.

3. Kolaboratívne vyučovanie – experiment

Nespokojnosť s priebehom a výsledkami v štúdiu bola pre nás podnetom k tomu, aby sme sa zamysleli nad možnosťami zefektívnenia výučby geometrie na vysokých školách. Hoci dôsledky nekvalitnej výučby geometrie sa prejavujú už na stredných školách, ešte ostrejšie sa prejavujú na vysokých školách, ktoré sa musia zaoberať aj touto skutočnosťou. Preto sme zrealizovali v akademickom roku 2006/07 experiment vo vyučovaní geometrie v odboroch technického zamerania.

Výber študijných skupín pre experiment bol obmedzený pedagogickými podmienkami. Jednou z takých bola podmienka, aby v nich vykonával výučbu ten istý učiteľ, aby sa dala jednoduchšie zabezpečiť súbežnosť obsahu vyučovania. Ďalšou podmienkou bolo, aby mali experimentálne skupiny výučbu v týždňovom rozvrhu skôr ako kontrolné skupiny, aby si experimentálne skupiny bez kolaborácie nemohli prisvojiť už preverené riešenia úloh vykonaných v kontrolných skupinách, keďže vo všetkých skupinách boli zadávané tie isté úlohy. V kontrolných skupinách sme vyučovali tradičným spôsobom výučby, v experimentálnych skupinách kolaboratívnou metódou vyučovania. Na výučbe v každej z experimentálnych študijných skupín sme počas prvých päť týždňov uplatňovali metódu pozorovania. Počas pozorovania sme sledovali vzájomné vzťahy študentov, výber partnerov a priateľov, ich správanie sa počas cvičení, aktivitu a kreativitu, pozornosť, plnenie si povinností, úroveň ich grafického prejavu a niektoré dôležité charakterové vlastnosti. Pre prípravnú fázu experimentu je totiž dôležité zistiť čo najviac poznatkov o študentoch zúčastnených na experimente.

Ešte v prípravnej fáze sme študentom po zostavení pracovných tímov, ktoré boli zložené z 4 – 5 študentov, vysvetlili podstatu kolaboratívneho vyučovania a ich role v ňom. Za účelom podpory domácej prípravy, motivácie, systematickosti, sústavnosti štúdia a spätnej väzby sme študentom vo všetkých skupinách v priebehu celého semestra zadávali zadania na domáce vypracovanie počtom 20, za ktoré pri správnom vyriešení získavali patričné body, ale len za predpokladu, ak vypracované zadania odovzdali bezprostredne na nasledujúcom bloku výučby. Tento priebeh hodnotenia domácich úloh sme začlenili do vyučovacieho procesu za účelom systematického monitorovania priebehu experimentu a priebežné porovnávanie čiastkových výsledkov v experimentálnych aj kontrolných skupinách. Ak študent na nasledujúcom bloku cvičení vypracované úlohy neodovzdal, pridelili sa mu body zápornej hodnoty, avšak úlohy musel vyriešiť a odovzdať aj tak na kontrolu, lebo boli podmienkou pre udelenie zápočtu. Podmienky pre udelenie zápočtu boli vo všetkých skupinách rovnaké a oznámené študentom na začiatku semestra. Body získané v priebežnom hodnotení boli pripočítavané k hodnoteniu na skúške. Domáce zadania boli frontálne a venovali sa problematike už známeho učiva – odprezentovaného na cvičení. Na dosiahnutie uvedených cieľov sme pripravili na každý blok výučby na zvyšok semestra súbor problémových úloh, ktoré boli rovnocenné, avšak pre každý tím odlišné. Tieto úlohy boli určené na vypracovanie v domácom prostredí len pre experimentálne študijné skupiny. Ich obsahom bola téma ešte neodcvičeného učiva. Varianty skupinových úloh boli určené tak, aby postupovali v zhode s tematickým plánom prednášok.

V úvodnej časti vyučovacieho bloku (cvičenia) študenti odovzdali frontálne zadanú domácu úlohu a súčasne si prevzali ohodnotenú minulú domácu úlohu. Po jej prehliadnutí sme nechali priestor na vysvetlenie nedostatkov a chýb, ktoré sa prípadne v riešeniach vyskytli. Následne sme (učiteľ) uviedli tému hlavnej časti vyučovacieho bloku, jej ciele a podľa potreby stručný prehľad teórie uvádzajúcej problematiku, ktorá podľa plánu mala byť preberaná a precvičovaná na vyučovaní. Po našom úvodnom výstupe prevzali aktívnu rolu pri tabuli študenti – zástupcovia vytvorených tímov. Prezentoval vždy len jeden člen tímu. Podľa vopred stanoveného harmonogramu postupne odprezentoval každý tím riešenie priradenej úlohy pred ostatnými kolegami. Proces prezentácie mohol prerušiť vyučujúci alebo ľubovoľný študent otázkou na prezentujúceho, prípadne žiadosťou o zopakovanie niektorej časti prezentácie. Ak bol sprievodný výklad prezentujúceho neúplný alebo chybný, mohol ho doplniť resp. opraviť učiteľ alebo iný študent z toho istého alebo iného tímu. Súbežne s vystupujúcim študentom si ostatní zaznamenávali a riešili svoje individuálne zadanie úlohy do zošitov, pretože skupinová úloha bola zadaná všeobecne – otvorené zadanie. Každý študent konkretizoval úlohu vlastným zadaním numerických údajov.

Precvičované úlohy boli otvorené, aby si jeden údaj nahradený otáznikom mohli študenti zvoliť sami. Takto boli nútení využívať pri riešení úloh viac svojej tvorivosti a rozvíjať vlastnú priestorovú predstavivosť. Študentom sme prideľovali v súhrne body v rozpätí od 0 až do 40 bodov. Sumarizácia bodov sa vykonala pri udeľovaní zápočtov.

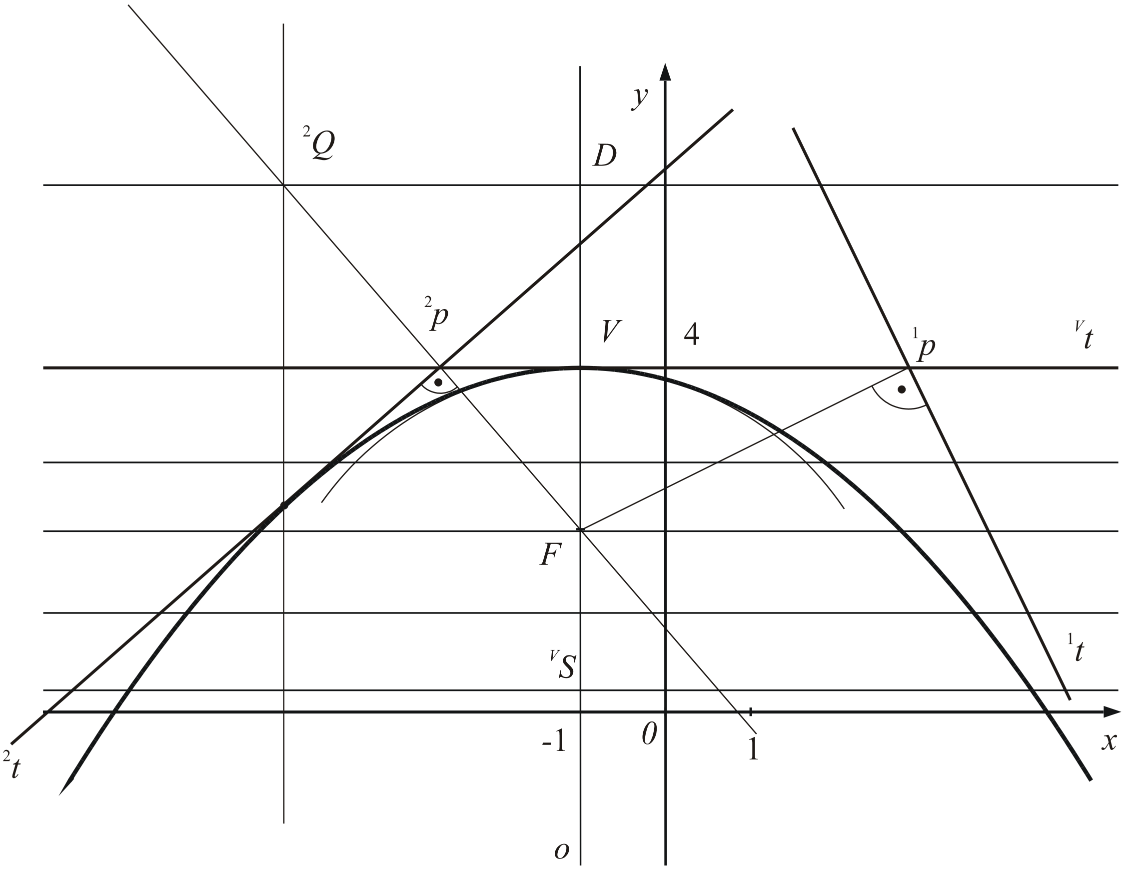
Pre názornosť uvedieme príklad na tému konštrukčné úlohy o kužeľosečkách aj so vzorovým riešením.

Príklad: Nech je daná poloha dvoch dotyčníc ${}^{1}t$, ${}^{2}t$ a vrcholová dotyčnica ${}^{V}t$ paraboly. Narysujte túto parabolu. V rovine paraboly zadefinujte karteziánsku súradnicovú sústavu, napíšte jej vrcholovú rovnicu a vypočítajte vzdialenosť ohniska od riadiacej priamky tejto paraboly.

Riešenie:

Rozbor konštrukčnej časti: Priesečníky dotyčníc ${}^{1}t$ a ${}^{2}t$ s vrcholovou dotyčnicou ${}^{V}t$ sú päty kolmíc ${}^{1}P$ a ${}^{2}P$ z ohniska na dotyčnice. Takže tieto kolmice sa pretínajú v ohnisku F. Tým je už určená os o paraboly, ktorá je kolmá na vrcholovú dotyčnicu ${}^{V}t$ a pretína sa s ňou vo vrchole V paraboly. Direkčnú priamku d zostrojíme ako kolmicu na os o, ktorej vzdialenosť od V sa rovná $|FV|$, pričom neinciduje s F. Konštrukciu paraboly dokončíme bodovou konštrukciou.

Konštrukcia:



Obr. 1

Riešenie analytickej časti: Zvolíme polohu súradnicových osí, kde bude napr. $V[-1;4]$. Keďže je parameter $p = |FD| = 3{,}75$, tak vrcholová rovnica paraboly bude $(x+1)^2 = -7{,}5\cdot(y-4)$.

Výkon študenta vyučujúci vyjadril kvantitatívnou formou ziskom maximálne 5bodov. Ak by sa stalo, že tím nepripraví prezentáciu, každému členovi tímu by sa pridelil mínus jeden bod.

K experimentu sme vybrali skupiny BM11 a BM12 ako experimentálne študijné skupiny a skupiny KM11 a KM12 ako kontrolné študijné skupiny.

Pre štatistické spracovanie bodových ziskov študentov sme vypočítali tieto hodnoty štatistických charakteristík:

Štat.veličina/Štud.skup.	**BM11**	**BM12**	**KM11**	**KM12**	**BM11+BM12**	**KM11+KM12**
rozsah	28	24	25	25	52	50
aritmetický priemer	29,86	28,71	21,32	23,16	29,33	22,24
medián	31	28,5	24	23	30	23,5
modus	35	28	17,25,26	17,33	35	17

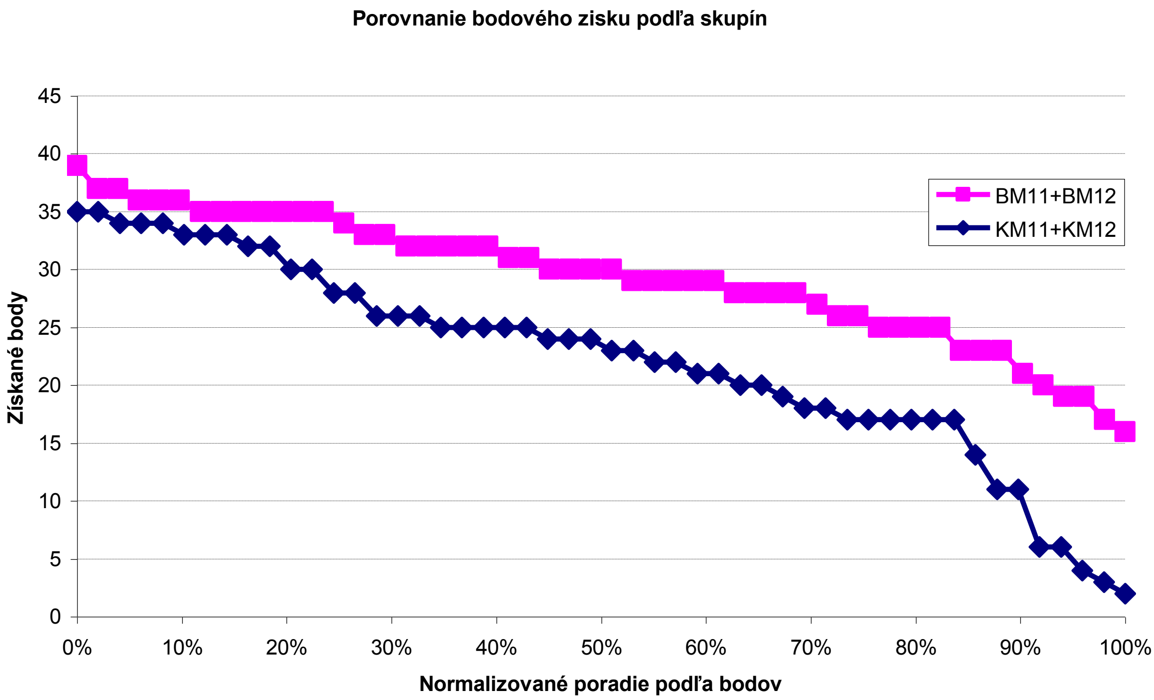
Tab. 1

Hodnoty týchto charakteristík sme použili opäť v párovom *t*-teste na porovnanie stredných hodnôt a jeho výsledky podmienili potrebu aplikovať *F*-test na porovnanie rozptylov skúmaných súborov. F-testom sme testovali nulovú hypotézu H_0: $\sigma_1 = \sigma_2$ oproti alternatívnej hypotéze H_1: $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Keďže F < α, že sa nulová hypotéza H_0 potvrdila. Pretože t štat > t krit, vyplýva, že nulová hypotéza sa vyvrátila.

Takže sme štatisticky potvrdili **platnosť hypotézy H1**, že: *Aplikácia aktivizujúcej – kolaboratívnej vyučovacej metódy vo vyučovacom procese povedie k zvýšeniu efektívnosti vyučovacieho procesu.*

Keďže sú počty študentov v jednotlivých skupinách rôzne, grafické spracovanie výsledkov prezentujeme v normalizovanej forme grafu.

Z grafu je možné usúdiť, že približne 10 % študentov dokáže dosahovať výborné výsledky bez ohľadu na to, aká metóda sa vo vyučovaní použije. Ďalšie skutočnosti, ktoré vyplývajú z grafu, preukazujú, že bodové zisky v experimentálnych skupinách sú vyššie v porovnaní s kontrolnými skupinami. Uvedené zistenia potvrdzuje aj súhrnný normalizovaný graf č. 1. Tento graf informuje aj o jave, že v posledných 15 % je medzi experimentálnymi a kontrolnými skupinami významná diferencia.



Graf 1

4. Záver

V našom experimente sme sa snažili poukázať na metódy vedúce k efektívnejšiemu vyučovaniu geometrie na vysokých školách technického a prírodovedného zamerania. Výsledky experimentu naznačujú, že u nami použitej metóde dochádza k zvýšeniu efektívnosti vyučovania, čo sa prejavilo vo forme zvýšenia bodového zisku študentov počas semestra, ako aj v lepších výsledných známkach z predmetu Inžinierska geometria.

Je zrejmé, že každá doba v súvislosti s okamžitým stavom technologického pokroku poskytuje vzdelávaniu odlišné možnosti. Pre mnohé edukačné metódy sú však technológie iba podpornými elementmi, ktoré môžu niektoré veci uľahčiť alebo zrýchliť, ale neprinášajú nové princípy. K takým metódam isto patrí aktívne učenie sa, problémovo orientované učenie sa, rôzne druhy interaktívneho učenia sa (skupinové projekty študentov, študentmi riadená diskusia).

Je zrejmé, že vo vysokoškolskom vzdelávaní je veľa oblastí, nad ktorými by sme sa mali zamyslieť a snažiť sa ich inovovať. Bez ohľadu na súčasné finančné možnosti v školstve, v centre pozornosti by mal vždy byť študent, ktorý by mal všetkými inováciami získať najviac. Ale zásadne by to nemal byť študent v pozícii zákazníka alebo spotrebiteľa.

Abstract

Certainly, there are many aspects of university education which we should take into consideration and try to improve. This article describes results and experiences from a pedagogical experiment which was carried out using the collaborative learning method.

Literatúra

[1] CIRJAK, M.: *Zbierka divergentných a iných neštandartných úloh (Tvorivosť v matematike)*. PREŠOV. Essox, 2000. ISBN 80-968369-0-0

[2] DILLENBOURG, P., BAKER, M., BLAYE, A., O'MALLEY, C.: *The Evolution of Research on Collaborative Learning*. In: Reimann, P., Spada, H. (Eds): Learning in humans and machines, Towards an interdisciplinary learning science, London. Pergamon, 1995. s. 189 – 211.

[3] MEDEK, V., ZÁMOŽÍK, J.: K*onštruktívna geometria pre technikov.* Bratislava. Alfa, 1978. ISBN 63-552-76

[4] ŠEDIVÝ, O.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky/ Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia.* Nitra. Edícia prírodovedec č. 78, 2001. ISBN 80-8050-417-2

[5] ŠEDIVÝ, O., FULIER, J.: *Úlohy a humanizácia vyučovania matematiky.* Nitra. FPV UKF v Nitre, 2004. ISBN 80-8050-700-7

[6] TUREK, I.: *Zvyšovanie efektívnosti vyučovania.* Bratislava. Združenie pre vzdelávanie EDUKÁCIA, 1998. ISBN 80-88796-89-X

Adresa autora:

RNDr. Darina Stachová, PhD.
Katedra algebry geometrie a didaktiky matematiky
FPV ŽU v Žiline
Hurbanova 15, 01026 Žilina
Slovenská republika
E-mail: darina.stachova@fpv.uniza.sk

PRVNÍ VÝSLEDKY STRUKTUROVANÉHO STUDIA NA FSV ČVUT

Zdeněk Šibrava[1]

Abstrakt:

V roce 2003 byli na Fakultu stavební ČVUT přijati první studenti do strukturovaného, třístupňového studia. Tato forma strukturovaného studia měla za hlavní cíl zvýšit počet vysokoškolsky vzdělaných lidí v ČR. Studenti přijatí v roce 2003 ukončili v roce 2007 první etapu tohoto studia – bakalářské studium. V předloženém článku je proveden první rozbor úspěšnosti těchto studentů a to i v závislosti na absolvované střední škole.

Tento příspěvek by měl navázat na příspěvek, který byl prezentován na konferenci v Mutějovicích a týkajícího se úspěšnosti studentů v nové strukturované formě studia na Fakultě stavební ČVUT. Tato forma během uplynulých dvou let uzavřela první etapu, tj studenti přijatí v roce 2003 do prvního ročníku bakalářského studia ukončili bakalářské studium a měli možnost pokračovat ve studiu v magisterských programech.

Předně si připomeňme počty studentů, kteří se hlásili ke studiu bakalářských programů na Fakultě stavební po nastartování strukturovaného studia.

Rok	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
Přihlášeno	3189	3176	3224 (903)	3165 (855)	2861 (605)	2865 (891)
Nedostavil se	634	616	651	616	575	752
Přijato	2000	2034	2109	1996	1753	1797
Zapsalo se	1507	1567	1581 (713)	1465 (664)	1306 (409)	1238 (511)

Z uvedené tabulky (v závorkách jsou počty studentů, kterým byla prominuta písemná část přijímacích zkoušek) je zřejmý pokles zájemců o studium na Fakultě stavební. Bohužel tento trend potvrdilo o přijímací řízení v roce 2008, kdy se na fakultu přihlásilo přibližně 2600 studentů. Základní důvody jsou pravděpodobně dva. Jedním z důvodů je, že v současné době se na vysoké školy hlásí populačně slabší ročníky. Druhým důvodem je pak stále enormní zájem o studium na vysokých školách humanitního typu jako je filosofická fakulta, fakulta sociálních věd, právnická fakulta apod. a to i přes rostoucí prestiž technických škol, lepší uplatnění v praxi a lepšící se finanční hodnocení absolventů technických škol.

Podívejme se nyní na studenty přijaté ke studiu na fakultu v roce 2003, tj. na studenty, kteří byli jako první přijati na fakultu do strukturovaného studia. Původní představa spojovaná se zavedením strukturovaného studia spočívala v zásadním zvýšení absolventů vysokých škol alespoň na úrovni bakalářského studia. V původním nestrukturovaném studiu absolvovalo FSv přibližně 600 magistrů s titulem Ing. V následující tabulce je uvedeno, jak procházeli studenti bakalářského studia

[1] Fakulta stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, email: sibrava@mat.fsv.cvut.cz

jednotlivými ročníky, resp. počty studentů (přijatých v roce 2003) zapsaných do dalších ročníků studia.

Semestr	1.	3.	5.	7.	Obh. Bc.
Zapsáno	1560	1154	879	770	572

Z uvedené tabulky je vidět, že předpokládaný nárůst počtu absolventů se v žádném případě radikálně neuskutečnil. Je totiž potřeba si uvědomit, že část studentů přijatých v roce 2003 se během studia dostala do „skluzu“ a absolvovali o rok později. V roce 2008 absolvovalo bakalářské studium přibližně 850 studentů. V tomto počtu se právě ještě objevili studenti přijatí ke studiu v roce 2003. Definitivní závěry tedy bude možné udělat až po ustálení celého systému. Z pohledu počtu absolventů je také zajímavá úspěšnost studentů podle střední školy, ze které se na FSv hlásí. V následující tabulce je uvedena úspěšnost studentů FSv, absolventů některých odborných středních škol a gymnázií, ze kterých se na FSv hlásí nejvíce uchazečů.

Škola	Ulice	Místo	Přihl	Přij.	Zaps	7s	Abs2007	Úsp.%
SPŠ stavební	Družstevní ochoz 3	Praha 4-Nusle	184	128	126	42	32	25.40
SPŠ stavební	Resslova 2	České Bud.	110	85	72	40	24	33.33
SPŠ stavební	Chodské nám. 2	Plzeň	105	71	67	45	38	56.72
SPŠ stavební	Dušní 17	Praha 1	98	63	59	30	19	32.20
SPŠ zeměměřická	Pod Táborem 300	Praha 9	74	58	52	22	21	40.38
SPŠ stavební	Pospíšilova tř. 787	Hradec Král. 3	67	38	20	11	11	55.00
SPŠ stavební	Sokolovské nám. 14	Liberec 1	51	25	23	8	5	21.74
SPŠ stavební	Jihlavská 628	Havlíčkův Brod	49	22	16	2	0	0.00
Stř. odb. škola	Cyrila Boudy 2954	Kladno	44	22	21	5	3	14.29

Škola	Ulice	Místo	Přihl	Přij.	Zaps	7s	Abs2007	Úsp.%
Gymnázium	Nám.Fr.Křižíka 860	Tábor	27	20	14	9	8	57.14
Gymnázium	Voděradská 2	Praha 10	25	19	11	8	6	54.55
Gymnázium	Mezi Školami 2475	Praha 5	23	14	6	3	2	33,33
1.čes. gym.	Národní 25	Karlovy Vary	19	11	8	5	2	25.00
Gymnázium	Botičská 1	Praha 2	19	14	10	6	3	30.00
Gymnázium	Připotoční 1337	Praha 10	18	11	7	4	1	14.29
Gymnázium	Nad Ohradou 1700	Praha 3	16	11	10	7	4	40.00
Gymnázium	Litoměřická 726	Praha 9-Prosek	15	11	8	4	3	37.50
Gymnázium	Neumannova 2	Žďár n. Sázavou	15	7	7	6	5	71.43

V uvedených tabulkách jsou uvedeny počty studentů, kteří absolvovali bakalářské studium v souladu s učebními plány, tj za čtyři roky. Část studentů z uvedených škol absolvovala úspěšně bakalářské zkoušky s ročním skluzem. Podle zkušebních komisí u bakalářských zkoušek skutečnost, že v roce 2007 absolvovali pouze ti studenti, kteří úspěšně plnili učební plány, se výrazně projevila v kvalitě absolventů a úrovně zkoušek. V roce 2008, kdy se ke bakalářským zkouškám dostali méně úspěšní studenti, byla úroveň zkoušek a předložených bakalářských prací výrazně horší.

VYUŽITIE NUMERICKEJ MATEMATIKY PRI POPISE VULKANIZÁCIE KAUČUKOVÝCH ZMESÍ

Jaroslava Trúbenová[1], Ondrej Bošák[2], Marian Kubliha[2]

Abstrakt:

Na modelovej kaučukovej zmesi boli uskutočnené merania časových závislostí krútiaceho momentu a tiež časových závislostí elektrickej konduktivity pri rôznych teplotách vulkanizácie (120 °C až 180 °C) s cieľom overiť korelačné vzťahy medzi hodnotami oboch veličín pri procese vulkanizácie. Na základe analýzy a využitím numerických metód pri spracovaní nameraných hodnôt bola pozorovaná výrazná zhoda s teoretickými predpokladmi, ktorá naznačuje, že hodnoty elektrickej konduktivity sú v dominantnej miere ovplyvnené vznikom dočasných nosičov elektrického náboja aktivovaných v procese vulkanizácie.

1. Úvod

Medzi najdôležitejšie operácie výroby pneumatík patrí proces vulkanizácie kaučukových zmesí [1,2]. Výsledkom tohto procesu je vznik vulkanizátu - gumy. Z hľadiska chemického ho môžeme zjednodušene popísať ako zosieťovanie, to znamená vznik priečnych väzieb premosťujúcich pôvodne voľné kaučukové makromolekuly. Vznik priečnych väzieb je sprevádzaný výraznou zmenou mechanických vlastností. Priebeh procesu vulkanizácie závisí najmä od chemického zloženia a časovo-teplotných podmienok [3,4]. Medzi fundamentálne úlohy pri zavedení meraní elektrických veličín pri popise a charakterizácii procesu vulkanizácie je nájsť korelácie medzi zmenami v materiále a hodnotami vybraných elektrických parametrov. V ďalších častiach nášho príspevku je prezentované využitie postupov numerickej matematiky pri hľadaní korelácie medzi nameranými hodnotami vybraných elektrických veličín a tradične používanými hodnotami mechanických veličín.

2. Charakteristika procesu vulkanizácie z hľadiska hodnôt mechanických veličín

Pre pozorovanie a hodnotenie priebehu vulkanizácie sa najčastejšie využívajú časové merania vybraných mechanických veličín (modulov pružnosti, krútiaceho momentu) pri konštantnej teplote, na ktorých možno rozlíšiť tri základné fázy (obr. 1):

- indukčnú etapu, ktorá je dôležitou fázou, pretože umožňuje bezpečnú prípravu a spracovanie zmesí pri zvýšených teplotách. Podľa jej priebehu sa posudzuje bezpečnosť zmesi. V tejto etape ešte nedochádza k vzniku priečnych väzieb, ale prebiehajú deje potrebné pre ich následné vznik. Mechanické veličiny prakticky nemenia svoje hodnoty

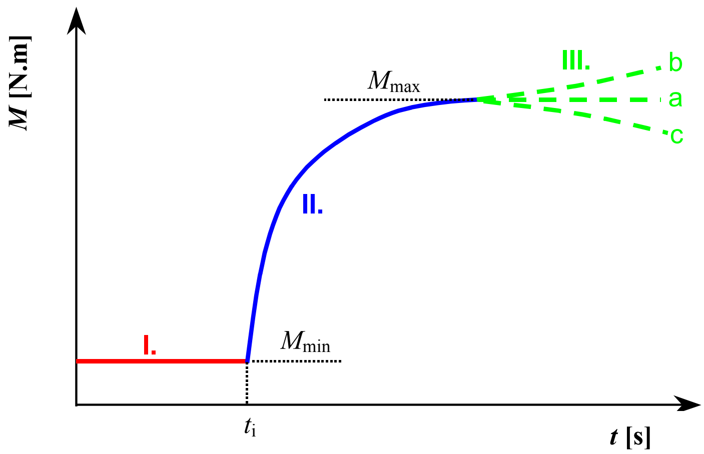
- samotnú sieťovaciu reakciu, ktorú predstavuje proces vytvárania priestorovej siete. Počas sieťovacej reakcie nastáva podstatný úbytok vulkanizačného činidla (sieťovacieho činidla), a tým aj postupné spomalenie vulkanizácie. Táto etapa je

[1] Katedra aplikovanej matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita sv. Cyrila a Metoda, Nám. J. Herdu 2, 917 01 Trnava , Slovakia, e-mail: jaroslava.trubenova@ucm.sk

[2] Ústav materiálov, Materiálovotechnologická fakulta, Slovenská Technická Univerzita, Paulínska 16, 917 24 Trnava, Slovakia

sprevádzaná vzrastom hodnôt mechanických veličín v súlade s nárastom počtu priečnych väzieb.

- zmeny v štruktúre siete, ktorá sa prejavuje ďalším sieťovaním, alebo reverziou sieťovania. V tejto etape môžeme pozorovať ďalšie zmeny v hodnotách mechanických vlastností [1,5].



Obr. 1: Vulkanizačná krivka – časová závislosť krútiaceho momentu pri konštantnej teplote. I – indukčná etapa, II – etapa sieťovacej reakcie, III - etapa ďalších zmien v štruktúre (a – s vulkanizačným plató, b – s kráčajúcim momentom, c - s reverziou) [3;19].

Pri matematickom popise procesu vulkanizácie sa vychádza zo znalosti rýchlosti vulkanizácie r počas sieťovacej reakcie (druhá etapa vulkanizácie). Pod pojmom rýchlosť vulkanizácie sa rozumie rýchlosť tvorby priečnych väzieb [2]. Absolútna hodnota reakčnej rýchlosti v danom čase je daná ako prvá derivácia koncentrácie c reagujúcich látok v závislosti od času t

$$r = \frac{dc}{dt} . \qquad (1)$$

Pri konštantnej teplote je rýchlosť vulkanizácie daná rýchlosťou zmeny stupňa zosieťovania vulkanizovanej kaučukovej zmesi za časovú jednotku. Ako kritérium stupňa vulkanizácie môže byť použitý napr. modul, alebo krútiaci moment M, ako je to dnes bežné u prístrojov kontinuálne zaznamenávajúcich priebeh vulkanizácie – vulkanografov.

Rýchlosť vulkanizácie závisí aj od okamžitého (dosiahnutého stupňa) vulkanizácie, to znamená aj od počtu už vytvorených priečnych väzieb. Vo všeobecnosti túto závislosť možno popísať kinetickou rovnicou v tvare [2]

$$r_M = \frac{dM}{dt} = k \left(M_{max} - M \right)^n \qquad (2)$$

kde k je rýchlostná konštanta vulkanizácie, n je rád vulkanizačnej reakcie (zvyčajne rovný 1), M je okamžitá hodnota modulu, alebo krútiaceho momentu vulkanizátu kaučukovej zmesi po určitej dobe t, M_{max} je maximálne dosiahnuteľná hodnota krútiaceho momentu vulkanizátu kaučukovej zmesi.

Riešenie diferenciálnej rovnice (2) je pre n = 1 možné napísať v tvare

$$M = \quad - \quad - \quad . \tag{3}$$

a pre $n \neq 1$ v tvare

$$M = \quad - \sqrt{\quad - \quad + \quad -} \,, \tag{4}$$

kde t_i je doba indukčnej etapy a M_{min} je minimálna (počiatočná) hodnota krútiaceho momentu vulkanizátu pri sieťovaní.

Ak teda zhrnieme poznatky o zmene mechanických vlastností možno vznik a rast počet priečnych väzieb sledovať ako vzrast hodnoty krútiaceho momentu, resp. modulu pružnosti vulkanizátu v intervale M_{min} (začiatok sieťovania) až M_{max} (ukončenie sieťovania – spotrebovanie vulkanizačného činidla) v súlade s rovnicou (3), alebo (4).

3. Charakteristika procesu vulkanizácie z hľadiska hodnôt elektrických veličín

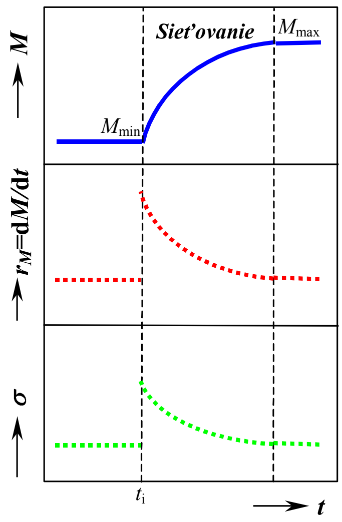
Z teoretického rozboru vulkanizácie je zrejmé, že pri nej vznikajú nosiče elektrického náboja, ktoré by mohli svojím príspevkom zvyšovať hodnotu celkovej elektrickej vodivosti. Veľkosť ich elektrického náboja q je nemenná, pretože vulkanizačná reakcia nemení svoj charakter. Pohyblivosť takýchto nosičov u tiež možno považovať za stálu hodnotu, pretože z hľadiska elektrických vlastností nie je vznik priečnych väzieb medzi makromolekulami sprevádzaný výrazným ovplyvnením najmä pravdepodobnosti vzniku zrážok pri pohybe nosičov elektrického náboja. Výrazne sa však v priebehu vulkanizácie môže meniť počet prispievajúcich nosičov N v objemovej jednotke látky. Tento počet úzko súvisí rýchlosťou vulkanizačnej reakcie, čo znamená, že pri vyššej hodnote vulkanizačnej rýchlosti rastie aj počet N nosičov elektrického náboja schopných zvyšovať celkovú hodnotu elektrickej vodivosti [6]. Treba si tiež uvedomiť, že namerané hodnoty elektrickej vodivosti (konduktivity) sú tvorené príspevkami viacerých druhov nosičov elektrického náboja podľa vzťahu [6]

$$\sigma = \sum N_i q_i u_i \,, \tag{5}$$

kde N_i počet nosičov elektrického náboja v objemovej jednotke látky, q_i je veľkosť elektrického náboja nosiča, u_i je jeho pohyblivosť, i predstavuje príspevok určitého druhu nosičov elektrického náboja. To znamená, že príspevok k celkovej vodivosti kaučukovej zmesi spôsobený vulkanizačnou reakciou je reprezentovaný len relatívnou zmenou hodnôt elektrickej vodivosti.

Ak teda zhrnieme uvedené tvrdenia, môžeme konštatovať, že predpokladaný príspevok elektrickej vodivosti v dôsledku vulkanizačnej reakcie úzko súvisí s počtom N nosičov elektrického náboja vznikajúcich pri vulkanizačnej reakcii a teda s rýchlosťou r vulkanizačnej reakcie ($\Delta\sigma \sim N \sim r \sim r_M$).

Pri porovnaní nameraných hodnôt konduktivity a veľkosti krútiaceho momentu vulkanizátu by sme mali zaznamenať pri hodnotách konduktivity vzrast úmerný prvej derivácii krútiaceho momentu (obr. 2).

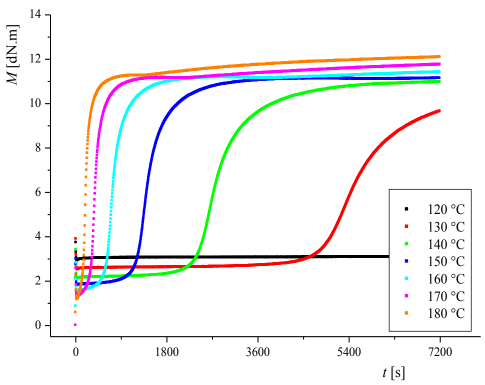


Obr. 2: Schematické znázornenie jednotlivých etáp vulkanizácie na časovej závislosti krútiaceho momentu M a vyplývajúce hodnoty rýchlosti sieťovacej reakcie r_M (určenej z hodnôt krútiaceho momentu) a pravdepodobného zodpovedajúceho priebehu hodnôt elektrickej konduktivity σ.

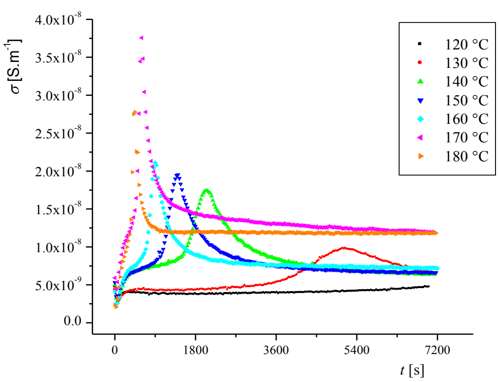
4. Experimentálna časť

Pre overovací experiment bola použitá modelová kaučuková zmes na báze styrén-butadiénového kaučuku, sírou ako vulkanizačným činidlom, urýchľovačom a tiež plnivom na báze sadzí. Na tejto pripravenej zmesi boli uskutočnené časové merania veľkosti krútiaceho momentu a elektrickej konduktivity (meracia frekvencia 1 kHz) pri teplotách 120 až 180 °C. Pri experimente bol pre meranie hodnôt krútiaceho momentu použitý Rheometer MDR 2000 firmy α–ALPHA TECHNOLOGIES [7]. Pre meranie hodnôt elektrickej konduktivity boli pripravené vzorky kaučukovej zmesi zalisovaním medzi dve elektródy z nehrdzavejúcej ocele a merané pomocou mostíka GoodWill LCR 819 [8, 9].

Na obrázku 3 je záznam časových závislostí nameraných hodnôt krútiaceho momentu. Na časových závislostiach je vidieť, že pri teplote 120°C vulkanizácia nepokračovala druhým štádiom – sieťovacou reakciou. Pri ostatných teplotách sú jasne rozoznateľné oblasti inkubačnej etapy a sieťovacej reakcie vulkanizácie, pričom doba inkubačnej etapy sa s rastúcou teplotou výrazne skracuje. Od teploty 150 °C je badateľné aj vulkanizačné plató tretej etapy vulkanizácie.



Obr. 3: Graf časovej závislosti krútiaceho momentu pre všetky zvolené teploty vulkanizácie modelovej kaučukovej zmesi.

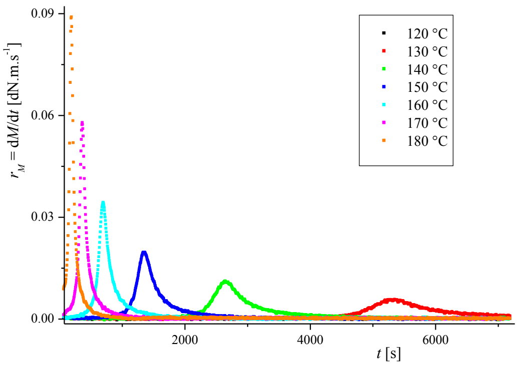


Obr. 4: Časové závislosti elektrickej konduktivity modelovej kaučukovej zmesi pri frekvencii 1 kHz a pri rôznych teplotách.

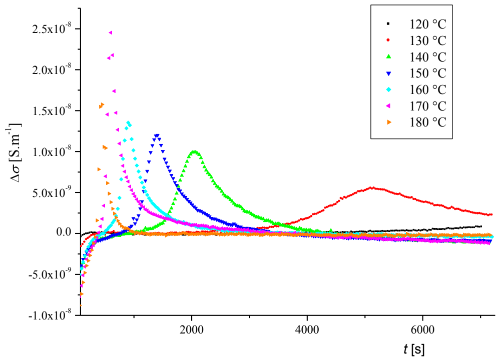
Na obrázku 4 je záznam časových závislostí nameraných hodnôt elektrickej konduktivity. Je vidieť jednotlivé maximá, ktoré predstavujú priebeh vulkanizácie. Pri postupnom zvyšovaní teploty je možné pozorovať maximum, ktorého výška sa s rastúcou teplotou zvyšuje a šírka maxima sa s rastúcou teplotou zmenšuje.

5. Spracovanie výsledkov meraní využitím numerickej matematiky

Pre overenie predpokladov o korelácii medzi hodnotami krútiaceho momentu a a elektrickej konduktivity sme pomocou postupov numerickej matematiky zostrojili dva porovnávacie grafy.



Obr. 5: Graf časovej závislosti derivácie krútiaceho momentu pre všetky zvolené teploty vulkanizácie modelovej kaučukovej zmesi.



Obr. 6: Časové závislosti časti hodnôt elektrickej konduktivity modelovej kaučukovej zmesi spojenej s procesom vulkanizácie pri rôznych teplotách.

Prvý (obr. 5) je vytvorený ako prvá derivácia časových závislostí krútiaceho momentu z obr. 3. Druhý (obr. 6) je vytvorený z obrázku 4, pričom predstavuje tú časť hodnôt konduktivity spojenú s procesom vulkanizácie, teda bez časti pripadajúcej na materiálové pozadie a jeho počiatočný ohrev. Pri porovnaní oboch obrázkov možno pozorovať určité podobnosti medzi oboma obrázkami. Rozdiel je však v miernom posunutí jednotlivých maxím na časovej osi a tiež v relatívne väčšej mohutnosti maxím v prípade časti hodnôt elektrickej konduktivity pri nižších teplotách (130 a 140 °C).

6. Záver

Pri podrobnejšom porovnaní výsledkov zobrazených na obr. 5 a 6 sú znateľné odchýlky najmä v prípade nižších teplôt merania. Tieto sú spôsobené (a boli potvrdené dodatočne vykonanými experimentmi) dvoma faktormi. Prvým faktorom je vplyv rozmerov vzorky použitej pri meraní mechanických a elektrických vlastností spôsobený prestupom tepla a charakterom vulkanizačnej reakcie (exotermickým). Druhým faktorom je pokles účinnosti sieťovacej reakcie. To znamená znižovanie pomeru medzi elektricky nabitými časticami, ktoré sa podieľajú na vzniku priečnych väzieb a ktoré sú len aktivované pri vulkanizácii.

Z doterajších skúseností a poznatkov o uplatnení numerických metód pri popise procesu vulkanizácie pomocou meraní elektrických a dielektrických veličín vyplýva vhodnosť použitia aj pre optimalizáciu jednotlivých parametrov vulkanizácie. Nenáročnosť a názornosť prezentovanej tematiky s podporou softvérového vybavenia otvára možnosti využitia pri riešení nielen výskumných, ale aj pedagogických úloh (najmä diplomových a bakalárskych prác študentov technicky a materiálovo orientovaných študijných programov). Práca vznikla s podporou grantového projektu KEGA 3/5178/07 a APVV-20-043505 .

Literatúra

[1] PREKOP, Š. a kol.: *Gumárenská technológia 1*. Žilina , 1998, 282 s. ISBN 80-7100-483-9

[2] DUCHÁČEK, V.: *Gumárenské suroviny a jejich spracování*, VŠCHT Praha, 1990.

[3] BENISKA, J.: *Chémia a technológia kaučuku*, SVST v Bratislave, 1984.

[4] BENISKA, J., KYSELÁ, G., ROSNER, P.: *Spracovanie kaučukov*. Bratislava: SVŠT, 1989.

[5] MLEDZIVA, J., ŠŇUPÁREK, J.: *Polyméry výroba, štruktúra, vlastnosti a použitie*, Sobotáles, Praha 2000. s. 507-508.

[6] ŠIMEK,I.: *Fyzika polymérov*, SVŠT, Bratislava, 1987.

[7] *MDR2000-UK.PDF* [online]. 2003-2008 [cit. 2007-10-10]. Dostupná z WWW:alpha-technologies.com

[8] MINÁRIK, S, LABAŠ, V., BERKA, M. : *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials.* ISSN 1454-4164. - Vol. 9, No 6(2007), s. 1592-1596

[9] KALUŽNÝ, J., LABAŠ, V., MINÁRIK, S.: Dynamics of dielectrical relaxation of polymers. In: Vedecké práce MtF STU v Bratislave so sídlom v Trnave. - ISSN 1336-1589. - Č. 21(2006), s. 45-52

UČME MATEMATIKU APLIKOVAŤ A VYUŽÍVAŤ POČÍTAČOVÚ PODPORU

Alena Vagaská[1]

Abstrakt:
Článok je venovaný problematike výučby matematickým aplikáciám na fakultách technických univerzít. Taktiež prezentuje možnosti využitia programového vybavenia MS Excel a Matlab v technických aplikáciách matematiky.

1. Výučba aplikáciám matematiky na technických univerzitách

Je viac ako zrejmé, že v rámci vyučovania matematiky na technických univerzitách je žiaduce viesť študentov k jej aplikáciám v odborných predmetoch či v technickej praxi, k matematickému modelovaniu technologických procesov a numerickému riešeniu prevažne inžinierskych problémov. Avšak viacerí matematici by súhlasili s konštatovaním, že vyučovanie matematiky, fyziky a odborných predmetov je na niektorých fakultách technických univerzít v Slovenskej a Českej republike doteraz poznamenané odtrhnutosťou a izolovanosťou navzájom [1], [2]. Rozvoj multidisciplinárnej komunikácie odborníkov prírodovedných a technických disciplín je nedostatočný. Na cvičeniach z matematických predmetov, vzhľadom na súčasný trend znižovania časovej dotácie po zavedení štruktúrovaného štúdia, absentujú motivačné a aplikačné úlohy a úlohy vyžadujúce si nešpecifický transfer: problémové a tvorivé úlohy. Potvrdili to aj výsledky prieskumu zameraného na prehodnotenie súčasného stavu vyučovania matematiky realizovaného na FVT TU v Košiciach. [3]. Až 71,6 % študentov v spomínanom prieskume uviedlo, že matematické poznatky v odborných predmetoch dokážu aplikovať len čiastočne a s problémami; 7,7 % študentov priznalo neschopnosť akejkoľvek aplikácie matematických poznatkov v odborných predmetoch technického zamerania.

Odstránenie týchto nedostatkov vo vyučovaní matematiky je možné dosiahnuť len rozšírením a prehĺbením aplikačného charakteru matematiky v konkrétnych oblastiach techniky, čo sa považuje za jeden z dôležitých aspektov modernizácie vyučovania matematiky. [1], [2]. Preto cieľom spoločných snáh matematikov na technických univerzitách v novom európskom akademickom priestore je, aby študenti lepšie pochopili význam matematiky a jej kľúčovú úlohu v technických disciplínach, našli efektívnejšie metódy a prístupy k štúdiu matematiky, cieľavedome a efektívne využívali matematické poznatky vo svojom odbore a vedeli používať programy CAS pri riešení zložitých aplikačných problémov a pri matematickom modelovaní v technickej praxi. [4].

V kontexte uvedeného sme v rámci inovácie študijných programov štruktúrovaného štúdia uvítali zavedenie nového predmetu „Aplikovaná matematika“ v inžinierskom štúdiu na FVT TU v Košiciach v šk. roku 2008/2009. Tento predmet poskytuje nielen priestor pre prehĺbenie aplikačného charakteru matematických predmetov implementáciou technických aplikácií do výučby, ale taktiež priestor pre zefektívnenie vyučovacieho procesu využívaním IKT a zavádzaním nových foriem výučby, čo je

[1] Technická univerzita v Košiciach, FVT so sídlom v Prešove, Katedra matematiky, informatiky a kybernetiky, Bayerova 1, 080 01 Prešov, alena.vagaska@tuke.sk

vzhľadom na náročnosť matematických výpočtov v technických aplikáciách nevyhnutnosťou a samozrejmosťou. Cvičenia z tohto predmetu sa totiž realizujú v počítačovej učebni. V rámci tohto predmetu sa študenti okrem iného oboznámia aj s numerickým riešením obyčajných diferenciálnych rovníc v prostredí vhodného matematického softvéru. V článku prezentujem ukážku aplikačnej úlohy riešenej na cvičeniach z predmetu Aplikovaná matematika s cieľom podeliť sa o skúsenosti s výučbou matematickým aplikáciám za vhodnej počítačovej podpory.

2. Počítačová podpora riešenia matematických modelov v tvare diferenciálnych rovníc

Uveďme si možnosti, ktoré nám ponúka MS Excel a Matlab pri riešení diferenciálnej rovnice, ktorú získame po aplikácií teórie diferenciálnych rovníc na nižšie nastolený problém [2].

Motorový čln sa pohybuje po jazere rýchlosťou $v_0 = 20 \text{ km/h}$. *Za čas* $t = 40$ *sekúnd po vypnutí motora sa rýchlosť člna zmenšila na hodnotu* $v_1 = 8 \text{ km/h}$. *Odpor vody je priamo úmerný rýchlosti pohybu člna. Určte rýchlosť pohybu člna po* 2 *minútach od vypnutia motora.*

Pri riešení danej úlohy a vytváraní matematického modelu musíme vychádzať z úvahy, že na pohybujúci sa čln pôsobí proti smeru pohybu sila $F = -k\,v$, kde $k > 0$ je konštanta úmernosti. Podľa II. Newtonovho pohybového zákona je sila F rovná súčinu hmotnosti m a zrýchlenia $a = \dfrac{dv}{dt}$ člna, t.j. matematickým modelom uvedenej aplikačnej úlohy je obyčajná diferenciálna rovnica v tvare:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv \tag{1}$$

Ide o separovateľnú diferenciálnu rovnicu, odkiaľ po separácii premenných a zintegrovaní získavame všeobecné riešenie. Ak využijeme počiatočnú podmienku $v(0) = 20$, čo znamená, že v čase $t = 0\,\text{s}$ od vypnutia motora je rýchlosť motorového člna $v_0 = 20 \text{ km/h}$, získame partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice (1) určením všeobecnej konštanty C v tvare:

$$v = 20.e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{2}$$

Použijúc doplňujúcu podmienku $v(40) = 8$ určíme konštantu k z rovnice

$$8 = 20.e^{-\frac{k}{m}40} \Rightarrow k = \frac{m}{40}.\ln\frac{5}{2}. \tag{3}$$

Ak zoberieme do úvahy (1) a (3), dostaneme diferenciálnu rovnicu znižovania počiatočnej rýchlosti motorového člna po vypnutí motora v tvare

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{40}\ln\frac{2}{5}.v \tag{4}$$

odkiaľ separáciou premenných a využitím počiatočnej podmienky získame riešenie rovnice:

$$v = 20.\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{t}{40}} \tag{5}$$

Zo vzťahu (5) je zrejmé, že rýchlosť pohybu člna po 2 minútach od vypnutia motora, je $v = \dfrac{32}{25} = 1{,}28\,\mathrm{km/h}$.

Ukážme si, akoby vyzeralo numerické riešenie vyššie nastoleného problému znižovania rýchlosti člna s využitím MS-Excelu a Matlabu.

Numerické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím MS Excelu

Riešenie rovnice (4) s počiatočnou podmienkou $v(0) = 20$. nezískame v tvare funkcie $v = v(t)$ vyjadrujúcej znižovanie rýchlosti člna, získame len jej aproximáciu v tvare dvojíc $(t_i), (v_i)$ prezentovaných v Exceli v stĺpcovej podobe. Pre približné riešenie použijeme Eulerovu metódu a metódu Runge-Kutta 2. rádu s krokom $h = 10$. Počas riešenia vyplynie, že rovnicu (4) je potrebné riešiť na časovom intervale v sekundách $\langle 0{,}120 \rangle$. Podľa algoritmu Eulerovej metódy riešenia diferenciálnej rovnice $v'(t) = f(t, v)$ na intervale $\langle t_0, t_0 + n.h \rangle$ s krokom h a počiatočnou podmienkou $v(t_0) = v_0$ vpisujeme do buniek Excelu potrebné vzťahy, viď obrázok 1.

Microsoft Excel - VSTEZO8

H5 = =H3+0,5*(K3+K4)

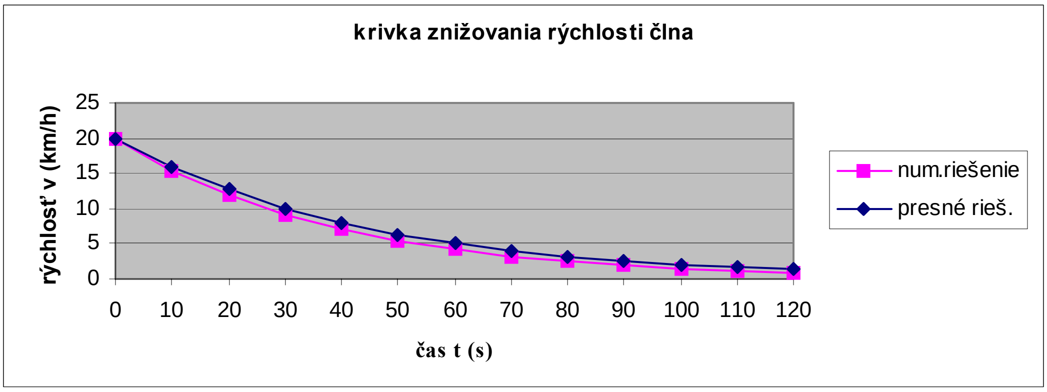
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Eulerova metóda v´=kv,k=1/40*ln(2/5)				presné riešenie		Runge-Kutta 2. rádu v´=kv,k=1/40*ln(2/5)				
2	čas t(s)	rýchlosť	h	df	čas	rýchlosť	čas	rýchlosť	h	df	k
3	0	20	10	-0,458145366	0	20	0	20	10	-0,45815	-4,58145
4	10	15,4185	10	-0,353196778	10	15,9054146	10	15,4185	10	-0,3532	-3,53197
5	20	11,8866	10	-0,272289044	20	12,6491106	10	15,9433	10	-0,36522	-3,65217
6	30	9,16369	10	-0,209915062	30	10,0594674	20	12,2911	10	-0,28156	-2,81556
7	40	7,06454	10	-0,161829256	40	8	20	12,7094	10	-0,29114	-2,91138
8	50	5,44624	10	-0,124758594	50	6,36216583	30	9,79804	10	-0,22445	-2,24446
9	60	4,19866	10	-0,096179808	60	5,05964426	30	10,1315	10	-0,23209	-2,32085
10	70	3,23686	10	-0,074147641	70	4,02378697	40	7,81065	10	-0,17892	-1,78921
11	80	2,49538	10	-0,057162442	80	3,2	40	8,07647	10	-0,18501	-1,8501
12	90	1,92376	10	-0,044068088	90	2,54486633	50	6,22637	10	-0,14263	-1,42629
13	100	1,48308	10	-0,033973293	100	2,0238577	50	6,43828	10	-0,14748	-1,47483
14	110	1,14335	10	-0,02619094	110	1,60951479	60	4,96344	10	-0,1137	-1,13699
15	120	0,88144	10	-0,020191311	120	1,28	60	5,13237	10	-0,11757	-1,17568
16							70	3,95668	10	-0,09064	-0,90637
17							70	4,09134	10	-0,09372	-0,93721
18							80	3,15413	10	-0,07225	-0,72252
19							80	3,26147	10	-0,07471	-0,74711
20							90	2,51436	10	-0,0576	-0,57597
21							90	2,59993	10	-0,05956	-0,59557
22							100	2,00436	10	-0,04591	-0,45914
23							100	2,07257	10	-0,04748	-0,47477
24							110	1,5978	10	-0,0366	-0,36601
25							110	1,65218	10	-0,03785	-0,37847
26							120	1,27371	10	-0,02918	-0,29177
27							120	1,31706	10	-0,03017	-0,3017

DR mot.cln / List1 (4) / List1 (3) / List1 / List1 (2) / List2 / 2B-2pk / 2D-2pk / 2A-2pk

Připraven

Obr. 1: Numerické riešenie diferenciálnej rovnice (4) v Exceli

V stĺpci A si vytvoríme číselnú postupnosť vyjadrujúcu zmenu času od vypnutia motora člna. V bunke B3 je využitá počiatočná podmienka. V D3 je zápis pravej strany diferenciálnej rovnice (4) v tvare $v'(t) = \dfrac{1}{40} \ln \dfrac{2}{5} . v$, čo po prepise do Excelu vyzerá takto: =(1/40)*LN(2/5)*B3. Rýchlosť v_1 v čase $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ vyjadríme podľa algoritmu Eulerovej metódy $v_1 = t_0 + h.v'(t_0) = t_0 + h.f(t_0, v_0)$ v bunke B4 vzorcom v tvare: =B3+C3*D3. Bunku D4 doplníme kopírovaním bunky D3. Ďalšie aproximované hodnoty v_i rýchlosti v získame kopírovaním riadku 4. V stĺpcoch E, F je vyjadrené presné riešenie získané analyticky. Využitím vzťahov algoritmu riešenia diferenciálnej rovnice $v'(t) = f(t,v)$ podľa metódy Runge-Kutta 2. rádu a ich prepísaním do buniek Excelu získame diskrétne riešenie rovnice (4), t.j. aproximované hodnoty rýchlosti v_i v čase t_i. Na obr. 1 sú zvýraznené v stĺpci G, H; v grafe na obr. 2 kvôli prehľadnosti zakreslené nie sú. Porovnaním aproximovaných hodnôt v_i v čase t_i s presnými hodnotami získanými analyticky vidíme, že Eulerova metóda dáva menej presné výsledky.



Obr. 2 Integrálna krivka riešenia diferenciálnej rovnice znižovania rýchlosti člna

Numerické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím Matlabu

Uvažujme o riešení diferenciálnej rovnice (4) na intervale $[0{,}120]$ pomocou Eulerovej a Heunovej metódy s využitím M-funkcií v Matlabe. M-funkcie vytvárame ako užívatelia systému a rozširujeme nimi možnosti systému vzhľadom na naše konkrétne potreby. M-funkcia je (po obsahovej stránke) postupnosť príkazov zapísaná do súboru pod nejakým menom. Jednoduchou implementáciou Eulerovej metódy, v ktorej vstupným argumentom nie je krok siete h, ale počet n uzlov siete, keď $a = x_1$, $b = x_{n+1}$, vytvoríme v Matlabe M-funkciu potrebnú pri riešení našej problematiky nazvanú napríklad „Eulern“, volaním ktorej získame riešenie rovnice (4).

```
function mxy=Eulern(mf,a,b,y0,n)
% mf meno(t.j. string) funkcie f=(x,y)
% y0 zac.podm.: y(a)=y0
% n = pocet uzlov siete ( bez bodu a )
% mxy matica n x 2 [x(i), aprox. y(x(i))]
h = (b-a)/n;          %krok
x = a:h:b;            %x(1)= a
y = zeros(1,n+1);     %pre-alokovanie
y(1)=y0;              %y(a) = y0
for i=1:n
    y(i+1) = y(i) + h*feval(mf,x(i),y(i));
end
mxy = [x',y'];
```

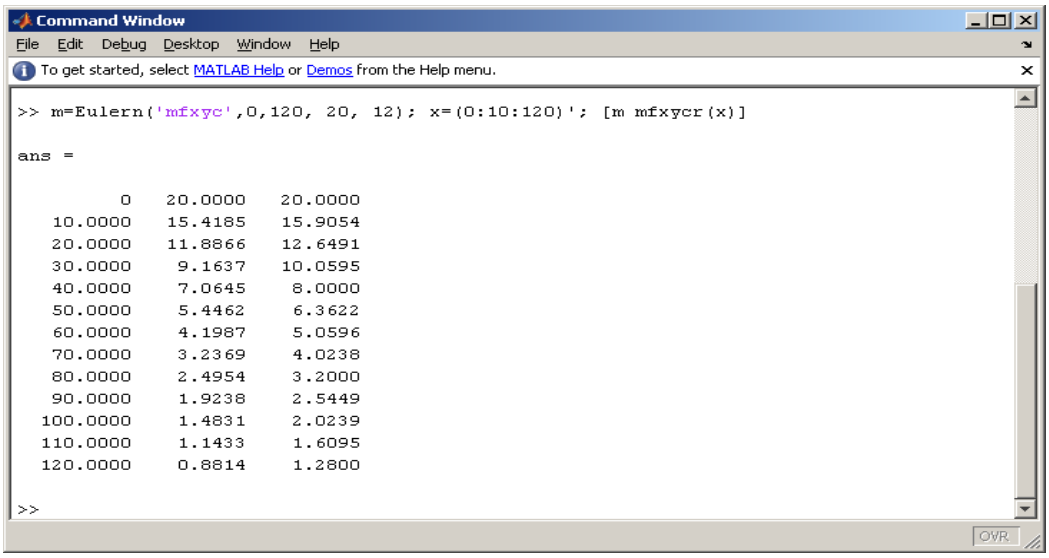
Ďalšou potrebnou M-funkciou bude funkcia „mfxyc“, ktorá vyjadruje rovnicu (4).

```
function z = mfxyc(x,y)
% dif rovnica znizovania rychlosti mot.clna
% v'=(-1/40)*ln(5/2)*v  (y'=(1/40)*ln(2/5)*y)
z = (y/40)*log(2/5);
```

M-funkcia „mfxycr“ vyjadruje presné riešenie diferenciálnej rovnice (4)

```
function z=mfxycr(x)
% presne riesenie DR zniz.rychlosti mot.clna
% v=20*(5/2)^(-t/40)
z=20*(2/5).^(x/40);
```

Volaním funkcie „Eulern“ získame diskrétne numerické riešenie rovnice (4):



Obr. 3 Diskrétne riešenie rovnice (4) v Matlabe s využitím M -funkcií

V prvom stĺpci sú časové hodnoty, v druhom diskrétne riešenie rovnice (4), tretí stĺpec predstavuje hodnoty presného riešenia (4). Je zrejmé, že globálna chyba [5] je veľká. Znížiť ju môžeme zmenšením kroku h, čo je aj tak pri tejto metóde dosť neefektívne. Slabým miestom Eulerovej metódy je, že prírastok riešenia na intervale $[x_i, x_{i+1}]$ sa aproximuje prírastkom dotyčnice v bode (x_i, y_i). To znamená, že smerová funkcia nemôže dobre vystihnúť priebeh derivácie Preto treba použiť iné, vhodnejšie metódy. Uvádzam Heunovu metódu, ktorej rekurentný vzorec v tvare

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + h.f(x_0, y_0))\right) \qquad (6)$$

sa získava inou úvahou – integrovaním. Implementáciou vzťahu (6) vytvoríme novú M-funkciu „Heunh“, ktorá je len malou obmenou M-funkcie „Eulern“. Pri tejto metóde je argumentom veľkosť kroku a nie počet uzlov.

Volaním príslušnej M-funkcie získavame následovné diskrétne riešenie:

m=Heunh('mfxyc',0,120, 20, 10); x=(0:10:120)'; [m mfxycr(x)]

ans =

0	20.0000	20.0000
10.0000	15.9433	15.9054
20.0000	12.7094	12.6491
30.0000	10.1315	10.0595
40.0000	8.0765	8.0000
50.0000	6.4383	6.3622
60.0000	5.1324	5.0596
70.0000	4.0913	4.0238
80.0000	3.2615	3.2000

90.0000	2.5999	2.5449
100.0000	2.0726	2.0239
110.0000	1.6522	1.6095
120.0000	1.3171	1.2800

Všimnime si, že teraz je veľkosť globálnej chyby v bode $x = 120$ rádovo menšia v porovnaní s Eulerovou metódou. Ešte presnejšie výsledky možno získať pomocou M-funkcií „ode23" a „ode45", ktoré sú už súčasťou Matlabu, avšak ich použitie nenúti študenta pochopiť a osvojiť si numerické metódy riešenia diferenciálnych rovníc.

3. Záver

Na cvičeniach z Aplikovanej matematiky sa osvedčilo, aby po klasickom výklade, vyriešení príkladu na danú tému a overení, či je pochopený algoritmus, nasledovala etapa využitia výpočtovej techniky s vhodným matematickým softvérom. Implementácia ICT do výučby aplikovanej matematiky nám totiž umožňuje nielen vypočítať viac príkladov, ale aj porovnať jednotlivé metódy z hľadiska odhadu chyby, rýchlosti, konvergencie a vhodnosti danej metódy. Nespornou výhodou je taktiež grafická interpretácia výsledkov numerického riešenia pomocou matematického softvéru. Cieľom však ostáva, aby študenti mali numerické metódy pochopené a osvojené do takej miery, aby ich vedeli samostatne naprogramovať v akomkoľvek vhodnom prostredí matematického softvéru. Nemusí to byť len MS-Excel a Matlab. Na základe pedagogických skúseností môžeme vysloviť presvedčenie, že programové produkty nachádzajú efektívne uplatnenie aj v posilnení aplikačného charakteru matematiky a v podpore medzipredmetových vzťahov.

Literatúra

[1] ČIŽMÁR, J.: Tradičné vyučovanie a modernizačné trendy v matematike. In: *Nové trendy vo výučbe matematiky*. Nitra: FEM SPU Nitra, 2001. ISBN 80-7137-953-0.

[2] FULIER, J.: *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*. Nitra: FPV UKF v Nitre, 2001. 177 s. ISBN 80-8050-418-0.

[3] VAGASKÁ, A.: *Niektoré špecifiká vyučovania matematiky na fakultách technických univerzít*. Dizertačná práca. 2004.

[4] VELICHOVÁ,D.: Európa, e-learning a matematika: straty a nálezy. In: *Matematika v inženýrskem vzdělávaní*, Sborník 29. konference o matematice na VŠTEZ, Mutěnice, 4.-8.9.2006. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. ISBN:80-7318-450-8

[5] VOLAUF, P.: Numerické a štatistické výpočty v Matlabe. Bratislava: STU, 2005. ISBN 80-227-2259-6

METÓDY ZOBRAZOVANIA V GEODÉZII A KARTOGRAFII

Margita Vajsáblová [1]

Abstrakt:
Riešenie úloh geodézie a kartografie je často založené na aplikáciách matematiky a geometrie. V tomto príspevku ukážeme geometrické základy fotogrametrie a kartografie a s nimi súvisiace témy, ktoré sú obsahom predmetu Metódy zobrazovania pre študijný program Geodézia a kartografia na Stavebnej fakulte STU v Bratislave. Hlavým cieľom príspevku je stručný prierez obsahom predmetu s poukázaním na interdisciplinárne aspekty, motiváciu, práce študentov a používané počítačové prostredie.

1. Úvod

Predmet Metódy zobrazovania vyučovaný v 1. ročníku bakalárskeho štúdia odboru Geodézia a kartografia nadväzuje svojím obsahom na predmet Deskriptívna geometria, avšak jeho obsah tvoria aplikácie geometrie v geodézii a kartografii. Predmet je zaradený do skupiny odborných predmetov a jeho úlohou je oboznámiť študenta s geometrickými základmi fotogrametrie a kartografie, ukázať interdisciplinárne aspekty tejto problematiky s využitím nástrojov syntetickej a analytickej geometrie. Vyššia odbornosť študenta v týchto oblastiach je ďalej rozvíjaná predmetoch bakalárskeho a inžinierskeho štúdia špeciálne zameraných na problematiku fotogrametrie a kartografie.

Metódy zobrazovania v geodézii a kartografii je možné rozčleniť do základných kapitol:

1. Lineárna perspektíva
2. Dvojstredové premietanie
3. Geometrické základy fotogrametrie
4. Cylindrická a kónická perspektíva
5. Geometrické základy kartografie

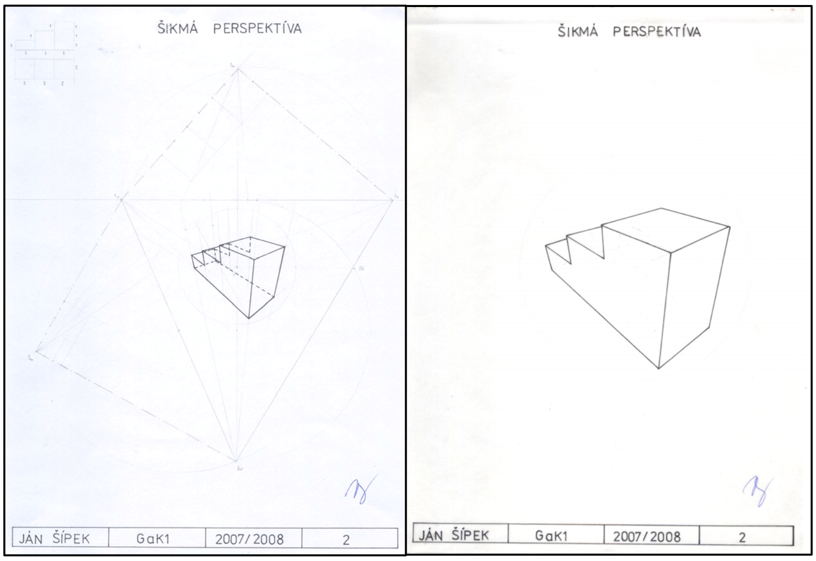
2. Lineárna perspektíva

Lineárna perspektíva ako zobrazovacia metóda tvorí základ geometrických vlastností snímok. V definícii základných pojmov lineárnej perspektívy je vhodné pripraviť študentov na súvislosti s fotografiou, a tiež vlastnosti obrazu reálnych objektov ukázať na vhodných fotografiách (obr. 1).

Obr. 1: Zvislá a šikmá snímka ako ukážky lineárnej perspektívy objektov

[1] Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Stavebná fakulta, Slovenská technická univerzita, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, SR, margita.vajsablova@stuba.sk

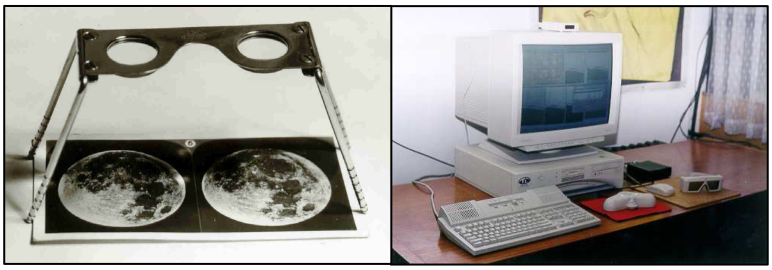
Na konštrukciu obrazu objektu v lineárnej perspektíve sme sa zamerali na voľné metódy, a to v zvislej perspektíve na metódy štvorcových sietí a v šikmej perspektíve na trojúbežníkovú metódu. Na obr. 2 je ukážka študentskej práce, na ktorej je obraz objektu v šikmej vtáčej perspektíve trojúbežníkovou metódou, kde vpravo na priesvitke je zväčšený obraz objektu.



Obr. 2: Študentská práca: Šikmá perspektíva objektu

3. Dvojstredové premietanie

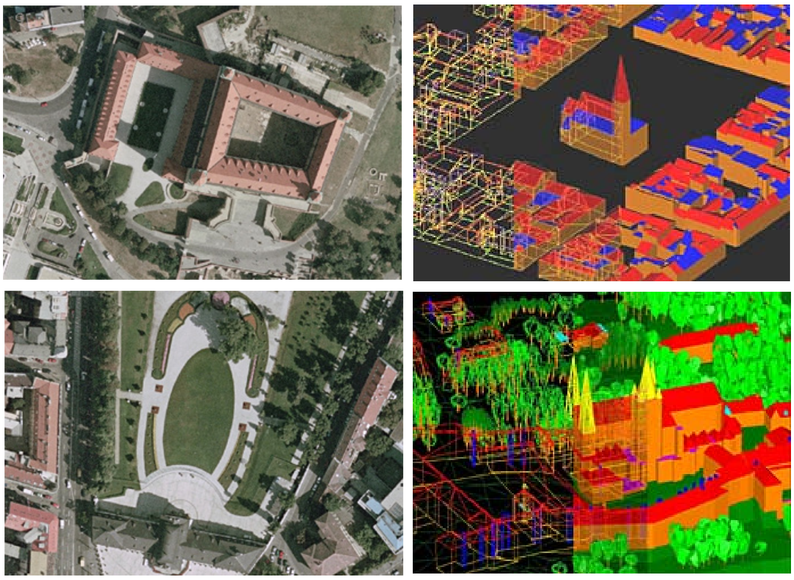
Z hľadiska spracovania obrazu z viacerých snímok, je nutné sa oboznámiť so základnými pojmami dvojstredového premietania (uzlové body, združené základné priamky, uzlové roviny), a tiež špeciálne s normálnym stereoskopickým zobrazovaním, prirodzeným a umelým stereoskopickým videním [1]. Aplikácie dvojstredového premietania majú skutočne veľmi široký záber, a to anaglyfy, stereogramy, technológie založené na polarizačných filtroch, ktoré sú používané v 3D kinách, a tiež stereoskopy na pozorovanie stereoskopických dvojíc vo fotogrametrii (obr. 3 vľavo). V súčasnosti sú na vyhodnotenie fotogrametrických údajov používané digitálne stereoskopické stanice (obr. 3 vpravo).



Obr. 3: Šošovkový stereoskop a digitálna stereoskopická stanica ImageStation.

4. Geometrické základy fotogrametrie

Úloha fotogrametrie je tvorba pravouhlých priemetov objektov zo známych fotografických snímok. Aplikácia fotogrametrie sa z dôvodu počítačových aplikácií rozširuje. Na obr. 4 je vľavo ukážka ortofotomapy Bratislavy a vpravo 3D model zástavby mesta, ktorý bol vytvorený z leteckého snímkovania a stereometrického vyhodnotenia snímok.



Obr. 4: Ortofotomapa Bratislavy a 3D model zástavby mesta, ©GEODIS SLOVAKIA s.r.o.

Projekcia na snímke je považovaná za stredový priemet (dierková komora), kde pri ideálnom optickom zobrazení nahrádzajú projekčné centrum dva uzlové body objektívu, avšak fotogrametria používa ako projekčné centrá stredy vstupnej a výstupnej pupily objektívu. Pri fotografovaní veľkých priestorových objektov a terénu je fotoaparát zaostrený na nekonečno, teda rovina snímky (filmu) je v obrazovej ohniskovej rovine, teda konštanta komory je rovná ohniskovej vzdialenosti *f*. Charakteristika pojmov a metód fotogrametrie je spracovaná v [2], preto uvedieme len stručný popis obsahu v predmete Metódy zobrazovania.

V pochopení pojmov v tejto oblasti je dôležité ukázať na súvislosti pojmov používaných v deskriptívnej geometrii, optike a fotogrametrii, a tiež poznať nástroje analytických a syntetických metód. K základným pojmom fotogrametrie patria prvky vnútornej a vonkajšej orientácie snímky, súradnicové sústavy - objektová a snímková, ich transformácie a výpočet priestorových súradníc bodu zo snímkových súradníc.

Projektívne vlastnosti snímky sú využívané nielen na rekonštrukciu objektov, ale hlavne vo viacsnímkovej fotogrametrii na doplnenie prvkov do snímky prenášaním dvojpomeru, príp. metódou projektívnych sietí. Z tohto pohľadu sú potrebné poznatky o dvojpomere usporiadanej štvorice bodov na priamke, usporiadanej štvorice priamok zväzku, poznať definície perspektivity, projektivity, harmonickej štvorice.

Základným princípom dvojsnímkovej fotogrametrie je prieseková metóda (tzv. metóda pretínania napred). Stereofotografie rozlišujeme podľa polohy osí záberu, a to: normálne stereoskopické snímky, rovnobežné stočené snímky, konvergentné a všeobecné.

Rekonštrukcia prvkov vnútornej orientácie, teda hlavného bodu *H* a ohniskovej vzdialenosti *f*, sa používa hlavne v jednosnímkovej fotogrametrii. Podmienkou na rekonštrukciu prvkov vnútornej orientácie je nutnosť poznať na snímke 3 páry úbežníkov takých smerov, ktorých uhly sú známe, pričom z každého páru je aspoň jeden úbežník vlastný a aspoň jeden zo všetkých známych úbežníkov neleží s ostatnými na jednej priamke.

Jednosnímková fotogrametria sa používa hlavne na fotoplány fasád, príp. krajiny. Na rekonštrukciu objektov zo zvislej, príp. šikmej snímky je nutné tiež poznať údaje o objektoch na snímke, teda niektoré uhly a dĺžky. Z pohľadu geometrického je pri rekonštrukcii dôležité chápať pojmy lineárnej perspektívy. Na obr. 5 je práca študenta, kde urobil rekonštrukciu základných obrysov objektu zo zvislej snímky.

Obr. 5: Práca študenta z rekonštrukcie objektu zo zvislej snímky.

5. Cylindrická a kónická perspektíva

Aplikácie cylindrickej perspektívy je možné nájsť v kultúre a umení (panoramatické kiná, panoramatické obrazy), na panoramatických snímkach, ktoré sa v súčasnosti vyrábajú z digitálnych fotografií. Znalosť pojmov z cylindrickej a kónickej perspektívy a obrazov objektov je dôležitá v kartografii, a to na zobrazovanie referenčnej plochy na valcovú a kužeľovú plochu.

Obr. 6: Panoramatická snímka a práca študenta z obrazu objektu v cylindrickej perspektíve.

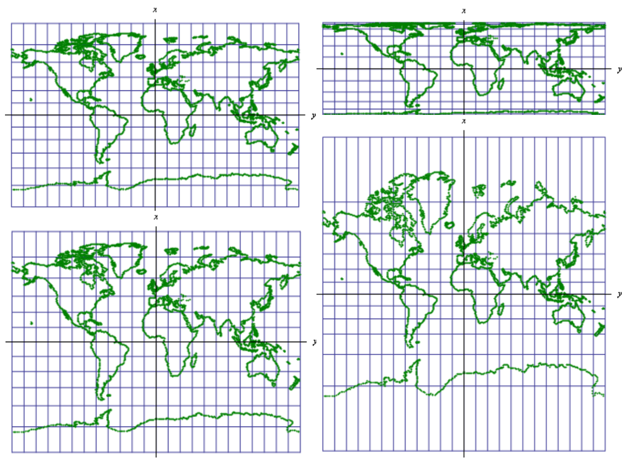
Na obr. 6 je ukážka panoramatickej snímky a práce študenta z obrazu objektu v cylindrickej perspektíve. Problematika cylindrickej a kónickej perspektívy a ich aplikácií je spracovaná v [3].

6. Geometrické základy matematickej kartografie

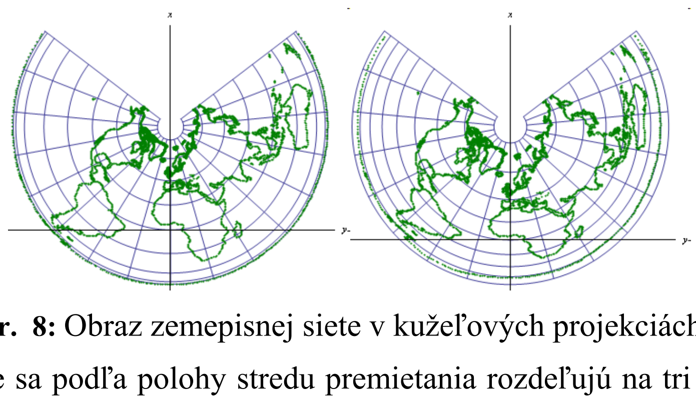
Matematická kartografia zahŕňa teóriu kartografických zobrazení, ich tvorbu, skreslenia prvkov a ďalšie špeciálne úlohy. Viaceré typy kartografických zobrazení majú geometrickú podstatu, v kombinácii s jednoduchými výpočtami sú konštruovateľné. Významnú kategóriu tvoria premietania referenčnej plochy do roviny (azimutálne projekcie), na valcovú a kužeľovú plochu (cylindrické a kónické projekcie)[ ]. V predmete Metódy zobrazovania si študent osvojí základné pojmy (referenčné plochy, súradnicové sústavy, klasifikáciu kartografických zobrazení), princípy, vlastnosti a obraz zemepisnej siete v cylindrických, kónických a azimutálnych projekciách, v pseudocylindrických a polykónických zobrazeniach.

Azimutálne projekcie patria k najznámejším kartografickým zobrazeniam, ich história siaha do starého Grécka. Podľa spôsobu premietania sú známe - ortografická, stereografická, gnómonická a externá projekcia a podľa polohy priemetne – pólová, rovníková a všeobecná. Aplikácie týchto projekcií sú okrem kartografie aj v iných odboroch. Stereografická projekcia, ktorá zachováva uhly, sa používa v matematike komplexnej roviny, či v modeloch neeuklidovskej geometrie, a tiež v kryštalografii, astronómii, v umení a pod. [4]. Obraz zemepisnej siete v gnómonickej projekcii sa používa napr. na slnečných hodinách.

Cylindrické projekcie sa podľa polohy stredu premietania rozdeľujú na dva typy, a to s tzv. pevným stredom ležiacim na zemskej osi a s tzv. pohyblivým stredom, ktorý leží v rovine rovníka a z každej polohy zobrazuje poludník ležiaci v opačnej polrovine vzhľadom na os. Príklady známych cylindrických projekcií vykreslených v prostredí Mathematica 6.0 sú na obr. 7.



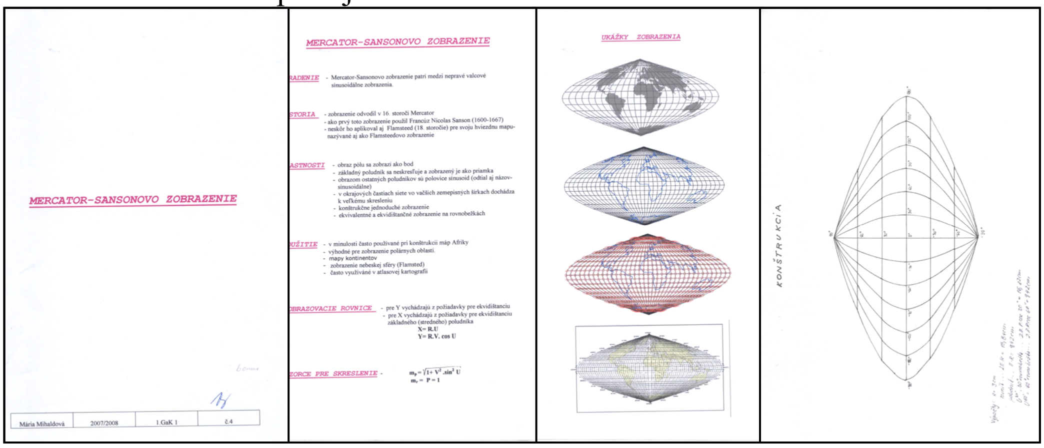
Obr. 7: Obraz zemepisnej siete v cylindrických projekciách – Braunovej, Gallovej, Lambertovom izocylindrickom a Mercatorovom modifikovanom zobrazení.



Obr. 8: Obraz zemepisnej siete v kužeľových projekciách.

Kónické projekcie sa podľa polohy stredu premietania rozdeľujú na tri typy, a to s tzv. pevným stredom ležiacim na zemskej osi, s tzv. pohyblivým stredom, ktorý leží v rovine rovníka a z každej polohy zobrazuje poludník ležiaci v opačnej polrovine vzhľadom na os, a tiež na projekcie s pohyblivým stredom, ktorý leží v rovine rovnobežkovej kružnice. Príklady kónických projekcií vykreslených pomocou zobrazovacích rovníc podľa [6] v prostredí Mathematica 6.0 sú na obr. 8.

Nepravé a polykónické zobrazenia patria k zobrazeniam, ktoré je možné konštruovat a majú zaujímavé geometrické vlastnosti. Na obr. 9 je ukážka študentskej práce na tému nepravé zobrazenia, kde študent popisuje teóriu Mercator-Sansonovho zobrazenia, uvádza ukážky obrazu siete vytvorených pomocou rôznych softvérov, a tiež vlastnú konštrukciu obrazu zemepisnej siete.



Obr. 9: Práca študenta z obrazu zemepisnej siete v nepravých zobrazeniach.

7. Záver

Zobrazovanie v geodézii je veľmi široká, preto tento článok poskytuje iba stručné informácie o tejto problematike. Prezentácie na spomenuté témy sú publikované v e-learningovom systéme moodle na stránke: www.math.sk/moodle ako kurz s názvom Metódy zobrazovania [5].

Poďakovanie

Príspevok vznikol za podpory grantovej výskumnej úlohy VEGA 1/4026/07.

Literatúra

[1] VAJSÁBLOVÁ, M.: Stereoskopické videnie, In: *Proceedings of Symposium on Computational Geometry 2000*, Kočovce, 2000. ISBN 80-227-14587-7. s.146-151.

[2] VAJSÁBLOVÁ, M.: Geometrické základy fotogrametrie. In. *Konferencia VŠTEZ 2004*, Rožňava, 2004. ISBN 80-8070-287-X. s. 349-360.

[3] VAJSÁBLOVÁ, M., Cylindrická a kónická perspektíva. In. *Zborník VII. Vedeckej konferencie Stavebnej fakulty v Košiciach*, Košice, 2002. ISBN 80-7099-812-1. s. 85-90.

[4] VAJSÁBLOVÁ, M.: Interdisciplinárne aspekty stereografickej projekcie. In: *Zborník 26. Konference o geometrii a počítačové grafice.* Nové Město na Moravě, 2006. ISBN 80-7040-902-9. s. 283 - 288.

[5] VAJSÁBLOVÁ, M.: Nástroje systému moodle vhodné pre výučbu geometrie. In: *Proceedings of Symposium on Computational Geometry 2006*. Kočovce, 2006. ISBN 80-227-2489-0. s. 148-153.

[6] VAJSÁBLOVÁ, M.: Kužeľové projekcie. In: *Proceedings of Symposium on Computational Geometry 2007*. Kočovce, 2007. ISBN 80-227-22734-0 s. 128-135.

PLOCHY VE VÝUCE GEOMETRIE A JEJICH VYUŽITÍ V ARCHITEKTUŘE

Jana Vecková, Milada Kočandrlová, Stanislav Olivík[1]

Abstrakt. Výuka konstruktivní geometrie (dříve deskriptivní) na školách technického zaměření má dlouholetou tradici. Někdy se může zdát, že se nároky na studenta stále snižují. S rozvojem počítačů a softwarů se mění spíše zaměření studenta. Současný trend ve výuce spočívá hlavně v motivaci studenta pro jeho vlastní sebevzdělávání v oboru a v orientaci na praxi. Proto se mění i výuka současné geometrie. Snažili jsme se o vytvoření internetových stránek, které by byly úzce svázané se skripty, která se využívají při výuce konstruktivní geometrie, Konstruktivní geometrie 1A a Konstruktivní geometrie 2 na naší fakultě, ale zároveň by se orientovaly na využití geometrie ve stavebnictví a nabízely by i témata rozšiřující běžnou výuku.

1 Plochy ve výuce geometrie

Naším cílem nebylo a není vytvořit obsáhlou databázi ploch a jejich využití v architektuře, ale spíše rozcestník, který má studenta správně nasměrovat. Studenta při cestě do školy možná asi nenapadne, že tramvajová trať, která křižuje stoupající silnici by mohla být zajímavým geometrickým problémem. Ve svém životě se poměrně běžně setkává např. se zastřešením válcovou plochou, s klenbami, oblouky a dalším, aniž by si uvědomoval, že dané téma slyšel minulý týden na přednášce.

V prvním semestru se setkává s předmětem Konstruktivní geometrie a Konstruktivní geometrie 1A. Jejich obsahem jsou základy zobrazovacích metod, osvětlení a v neposlední řadě i šroubové plochy a kvadriky (speciálně ještě rotační zborcený hyperboloid a hyperbolický paraboloid). Protože pro mnohé studenty je to první důkladnější kontakt s geometrií, nezbývá mnoho času na praktické ukázky ploch v architektuře. Studenty, kteří již to potěšení s geometrií měli nebo jsou více nadaní, naopak mohou stránky motivovat k dalšímu sebevzdělávání.

Předmět Konstruktivní geometrie 2 (ve 2. semestru) se zaměřuje hlavně na plochy stavební praxe. Přímkové plochy (konoidy, oblouky) jsou zde zastoupeny v největší míře a mají i široké praktické využití. Završením kurzu je skupinový projekt, kdy si studenti vyberou již nějakou stojící budovu nebo si sami navrhnou vlastní a aplikují získané znalosti o plochách a výstupem je i skutečný model.

2 Výhody internetové podpory výuky

Při výuce obecně je zcela běžné využívat internet. Je obrovskou zásobárnou informací (bohužel někdy i dosti zkreslených) a obrazové podpory. Fotografie staveb, technické nákresy budov a další a další materiály je možné najít na internetu. Internet je prostě zdrojem rychlých informací pro širokou veřejnost. S rozvojem počítačů se vylepšují i prezentační možnosti probírané látky.

Konstruktivní geometrie, která se vyučuje na naší fakultě, spojuje klasickou deskriptivní geometrii a matematiku. Snažíme se studentům vytvořit dobrý základ pro jejich další práci ve stavebních oborech rozvíjením jejich prostorové představivosti (geometrií) i logického myšlení (matematikou). Pro tento účel byly sestaveny jednotlivé

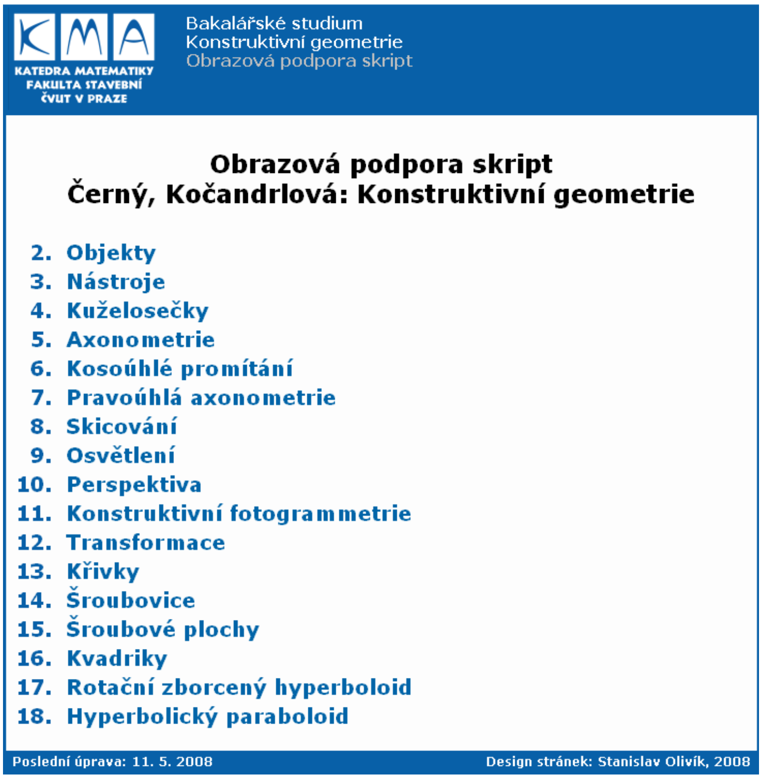
[1] Katedra matematiky, Fakulta stavební ČVUT v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6,
email: veckova@mat.fsv.cvut.cz, kocandrlova@mat.fsv.cvut.cz, olivik@mat.fsv.cvut.cz

moduly skript [4], které na sebe navazují. Naše internetové stránky jsou úzce spjaté se skripty [4] a mají sloužit studentům k rozšíření znalostí, k ukázkám teorie v praxi i k doplnění látky, kterou při výkladu nestihli pochytit. Vyučujícím pak poskytuje rychlý zdroj obrázků a podkladů pro přednášky a cvičení.

V neposlední řadě je tu i estetická hodnota. Vzhledem k tomu, aby skripta byla tištěna s co nejmenšími náklady, jsou na běžném papíře a černobílá. Internetová podpora tak může nabídnou obrázky v plné barvě i dobré kvalitě. V žádném případě se nesnažíme nahradit knihovnický materiál a klasickou literaturu.

3 Struktura internetových stránek

Hlavní stránka bude umístěná na internetových stránkách Katedry matematiky Fakulty stavební ČVUT v Praze na [5] (prozatím je na těchto stránkách stará a útržkovitá obdoba). Spuštění nových stránek je naplánováno na začátek zimního semestru akademického roku 2008/09. Z hlavní stránky vedou odkazy na stránky odpovídající jednotlivým kapitolám skript, Obr. 2.1. Plochám jsou věnovány poslední čtyři kapitoly. Konkrétně se jedná o šroubové plochy (přímkové i cyklické), kvadriky, rotační zborcený hyperboloid a hyperbolický paraboloid. Stránky kapitol jsou vizuálně výrazně rozděleny do skupin: *Přednášky, Řešené příklady ze skript, Obrázky, Odkazy, Ostatní materiály*, Obr. 2.2. Pro užití ploch v architektuře a stavitelství jsou asi nejzajímavější oddíly *Obrázky*, *Odkazy* a *Ostatní materiály*. Proto se s podrobnějším popisem zaměříme hlavně na ně.



Obr. 2.1

Část *Přednášky* obsahuje starší i aktuální prezentace přednášejících, pro jednodušší orientaci studentů roztříděné podle jména přednášejícího.

Část *Řešené příklady* ze skript se zaměřuje na řešení nejběžněji využívaných příkladů ze skript [4] na cvičení i při přednáškách.

Část *Obrázky* je jakousi „zásobárnou“ obrázků různého druhu k danému tématu. Od prostorových řešení základních úloh (některé i s možností trojrozměrného natáčení) až k ukázkám využití daného prvku nebo postupu v architektuře. Pro lepší orientaci a rychlejšímu přístupu jsou na stránce umístěny malé náhledy s popisem, co je na obrázku. Po kliknutí na obrázek se v novém okně zobrazí obrázek v originální velikosti, Obr. 2.2. Popisek záměrně nikdy nevyčerpává veškeré informace a zajímavosti o stavbě, aby se i student musel tématem dále zabývat, pokud se chce něco dozvědět. V této části jsou uvedeny obrázky, jež autor poskytl volně pro akademické účely, což někdy omezuje výběr staveb.

Obr. 2.2

Internetové odkazy (na doplňkové internetové zdroje prohlubující učivo, obrázky, stránky architektů a architektonických kanceláří nebo i Java aplety apod.) jsou umístěny v části *Odkazy*. Do tohoto oddílu spadají i odkazy na obrázky, které jsou chráněny autorskými právy.

Část *Ostatní materiály* obsahuje vše, co se tématicky nevešlo do ostatních částí.

U kapitol týkajících se ploch můžeme najít např. 3D ukázku plochy v softwaru Rhinoceros©. Tento software je volně přístupný v učebnách Katedry matematiky, student si může soubor stáhnout a dále s ním pracovat. Většina souborů má jednotlivé partie probírané látky (řezy, tečné roviny apod.) rozděleny do hladin. Student tak může celou situaci vyřešit sám a pak už si jen svůj výsledek zkontroluje s příslušnou hladinou.

4 Realizace webových stránek

Stránky jsou vytvořeny v jazyce HTML (verze 4.01) s použitím kaskádového stylu CSS (verze 2.0). Pro naše účely jsme vybrali plně postačující jazyk HTML. Propojení html stránky s kaskádovými styly umožňuje používat jednou nadefinované styly ve všech webových stránkách. Případná. změna vzhledu nějakého elementu je pak záležitost editace jednoho souboru a není třeba zasahovat do všech souborů webových stránek.

Jedním z aspektů, na který jsme brali ohled při tvorbě stránek, byla kompatibilita mezi prohlížeči. Cílem je, aby tyto stránky vypadali stejně a byly pokud možno stejně funkční ve většině používaných internetových prohlížečích.

Součástí stránek by mělo být diskuzní fórum. Vzhledem k vývoji na poli volně dostupných diskuzních fór (např. www.ipbfree.com) zvažujeme založení fóra na nejlepším z volně dostupný fór. Studenti by se museli zaregistrovat, registraci by schvaloval administrátor fóra po překontrolování, že má žadatel zapsán předmět KOG. Tento krok je nutný proto, že by to bylo fórum úzce svázané s tímto předmětem. Diskuzní fórum by bylo samozřejmě moderované a uživatelům porušujícím opakovaně pravidla by byl zakázán přístup.

Poděkování

Tato práce je podpořena grantem **FRVŠ F1 2125.**

Literatura

[1] http://geometrie.kma.zcu.cz/
[2] htp://math.fce.vutbr.cz/safarik/vyuka/index.html
[3] http://mdg.vsb.cz/jdolezal/Deskriptiva/Deskriptiva.html
[4] ČERNÝ J., KOČANDLOVÁ M. Konstruktivní geometrie. Praha: Česká technika nakladatelství ČVUT. ISBN 80-01-03296-5.
[5] http://mat.fsv.cvut.cz/BAKALARI/kog/default.html

CENTRÁLNY A SLOVENSKÝ PORTÁL EVLM A KONZULTAČNÉ CENTRUM MATEMATIKY

Daniela Velichová[1]

Abstrakt
Príspevok je informáciou o výsledkoch projektu európskeho programu Leonardo da Vinci „EVLM – Európske virtuálne laboratórium matematiky“, ktorého hlavným cieľom je vytvorenie a udržiavanie siete konzultačných centier matematiky na participujúcich európskych univerzitách s voľne prístupnou on-line databázou elektronických učebných materiálov z matematiky. Centrálny portál EVLM sprístupňuje konzultačné služby (prezenčne alebo elektronicky) a elektronické učebné materiály z rôznych oblastí matematiky v angličtine, národné portály v príslušných národných jazykoch partnerov projektu - bulharsky, česky, fínsky, írsky, maďarsky a španielsky, Slovenský portál umožňuje prácu s interaktívnymi učebnými materiálmi v slovenčine. EVLM Konzultačné centrum Matematiky na SjF STU v Bratislave, ktoré zabezpečuje každodenné odborné konzultačné služby prezenčne alebo elektronicky, má za sebou prvý úspešný rok pôsobenia a teší sa veľkému záujmu nielen študentov všetkých stupňov štúdia, ale aj odbornej akademickej obce fakulty.

1. Úvod

Vývoj počítačových technológií sa v priebehu uplynulých desiatich rokov urýchlil opäť nevídaným tempom. Najväčšie zmeny boli zaznamenané najmä v dvoch oblastiach: cena výpočtovej techniky sa výrazne znížila, pričom súčasne rovnako výrazne vzrástla výpočtová výkonnosť počítačov. V dôsledku takéhoto vývoja dnes už väčšina študentov v celej Európe buď vlastní osobný počítač, alebo má prístup ku kvalitnej výpočtovej technike na svojej univerzite. Učiteľom sa zároveň otvorili nové možnosti organizácie a riadenia vzdelávacieho procesu. Nové príležitosti učiť a učiť sa matematiku s podporou spoľahlivých počítačových algebrických systémov sú aj pre študentov omnoho atraktívnejšie. Existuje mnoho spôsobov ako využiť početné výhody poskytované využitím počítačov vo vzdelávacom procese a podporiť tak aktívne vzdelávanie v oblasti matematiky.

Prvou zo spomínaných výhod je možnosť vizualizácie. Mnohé z matematických pojmov sa dajú prezentovať omnoho prístupnejšie a zrozumiteľnejšie, ak ich ilustrujeme vhodným obrázkom. Grafické vybavenie počítačov dnes poskytuje mnoho rôznych spôsobov, ako „vizualizáciu“ jednoducho vytvoriť a dať ju k dispozícii študentom. Generovanie vlastných vizualizácií a grafického výstupu je pomerne jednoduchou záležitosťou aj pre študentov samotných. Druhou výhodou je možnosť zbaviť sa množstva manuálnych mechanických výpočtov. Často sa stáva, že študenti strácajú prehľad o študovanom kľúčovom pojme, keď sú k jeho objasneniu potrebné mnohé výpočty a úpravy. Vykonávanie týchto výpočtov a úprav sa potom stáva samotným cieľom, namiesto uchopenia pôvodného pojmu s porozumením a pochopením potrebných základných matematických princípov. Pri efektívnom použití môže počítačová technika odstrániť spomínané javy a umožní používateľovi sústrediť sa na porozumenie princípom a na pochopenie pojmov. Treťou výhodou používania

[1] ÚPHSV, Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita v Bratislave, Námestie slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovensko, email:daniela.velichova@stuba.sk

výpočtovej techniky je skutočnosť, že študenti s jej pomocou dokážu vyriešiť omnoho väčšie množstvo rôznorodých a pomerne zložitejších (a tým aj omnoho realistickejších) problémov. Máloktorý študent, možno iba niekoľko najusilovnejších, sa pustí do riešenia sústavy napr. piatich - šiestich lineárnych rovníc manuálnym výpočtom, na papieri. Použitím počítača a niektorého PAS sa však stáva aj riešenie sústav stoviek rovníc iba obyčajnou rutinnou záležitosťou.

Uvedené tri výhody sa dajú využiť, určite aspoň čiastočne, už pri používaní štandardných softvérov a pri riešení jednoduchých príkladov. Existuje však aj mnoho špeciálnych aplikácií, ktoré využívajú výpočtovú výkonnosť súčasných počítačov na prezentáciu matematiky omnoho komplexnejším spôsobom. Mnohé z nich boli pre tieto účely špeciálne vyvinuté. Niektoré boli pôvodne vytvorené pre profesionálnych vedcov, ktorí vo svojej práci potrebovali počítačovú podporu pre zložité symbolické výpočty, či zvládnutie obrovského množstva výpočtov nerealizovateľných človekom v reálnom čase. Napriek tomu sú mnohé z nich ľahko integrovateľné aj vo vzdelávacom procese.

Na základe týchto skutočností vznikla myšlienka navrhnúť nadnárodný európsky projekt zameraný na šírenie informácií o existujúcich, a zároveň na vývoj nových základných zdrojových elektronických učebných materiálov z rôznych oblastí matematiky v národných jazykoch Európy. Elektronické učebné materiály a Internet ako zdroj informácií sa stali atraktívnym spôsobom novej komunikácie so študentmi. Objavuje sa tu však aj mnoho voľne dostupných materiálov s matematickou tematikou, ktorých autormi nie sú matematici, a ktoré môžu priniesť viac škody ako osohu. V uvedenej situácii vznikla akútna potreba zostaviť katalóg dostupných kvalitných materiálov pre štúdium matematiky pozostávajúci z rôznych výučbových a metodických materiálov v rôznych jazykoch, dostupných v tlačenej či elektronickej forme. Je vhodný čas vytvoriť platformu poskytujúcu nielen informácie o ich dostupnosti, ale aj centralizovanú databázu týchto materiálov a pripojenia k uvedeným zdrojom. Na rozširovanie informácií a prípadné preklady žiadaných materiálov z/do angličtiny je potrebné zabezpečiť konzultácie o ich používaní, s cieľom pomôcť záujemcom náležite používať tento existujúci nevyužitý potenciál.

2. Centrálny portál EVLM

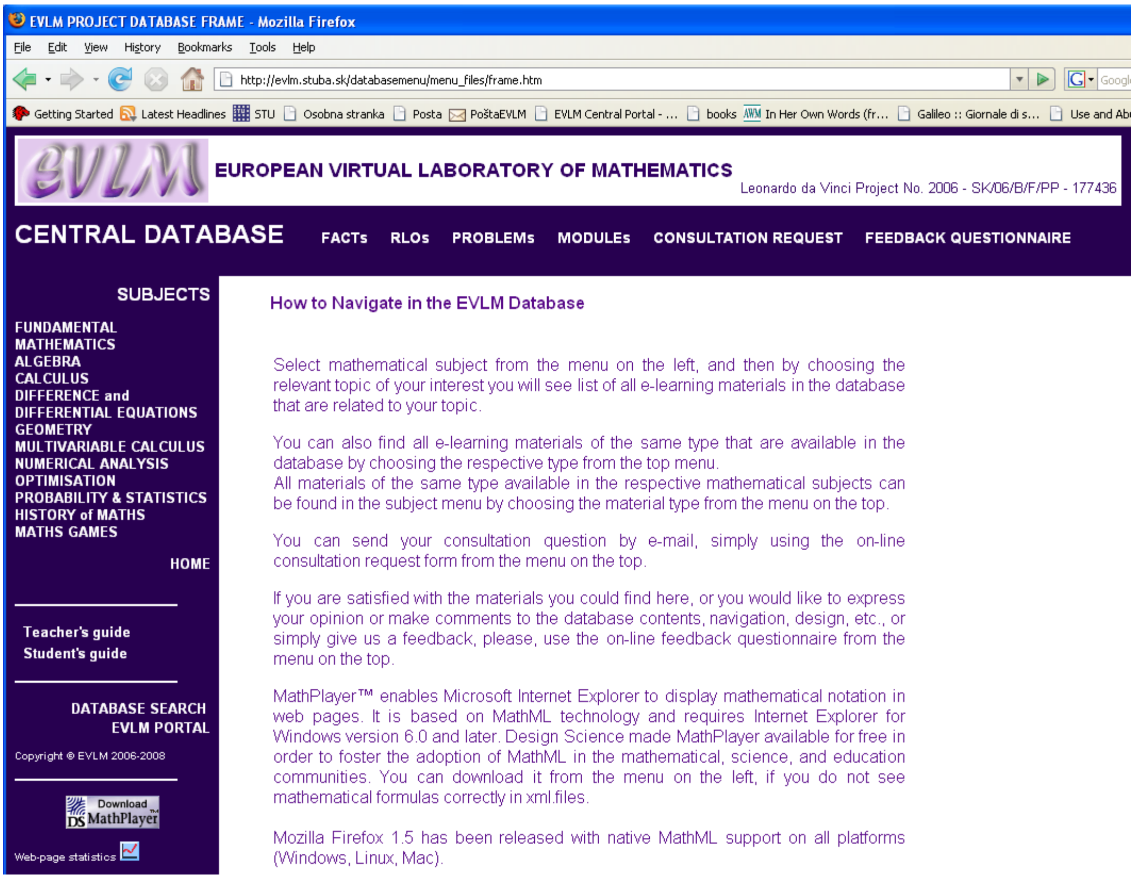
Základnou myšlienkou projektu programu Leonardo da Vinci je vytvorenie Európskeho virtuálneho laboratória matematiky – EVLM [1], operujúceho na nadnárodnej úrovni vo forme siete Národných centier Matematiky umiestnených na partnerských inštitúciách a pracujúcich v rámci spoločnej štruktúry. EVLM má slúžiť ako platforma pre rozširovanie relevantných informácií o virtuálnej databáze umožňujúca zdieľanie všetkých dostupných zdrojových materiálov a poskytujúca školenia o ich využívaní.

Centrálny portál EVLM [2] je spoločným virtuálnym komunikačným a pracovným prostredím siete Národných centier Matematiky. Je inštalovaný na serveri STU v Bratislave, ktorá je koordinujúcou inštitúciou projektu, a zabezpečuje všetky informácie v angličtine. Je spoločnou platformou pre zdieľanie relevantných materiálov s matematickým obsahom v Centrálnej databáze EVLM [3], slúži na šírenie informácií o existujúcich elektronických materiáloch vo všetkých relevantných jazykoch a poskytuje jednotné fórum pre ich vzájomnú výmenu a oboznamovanie sa s nimi. Centrálny portál EVLM je voľne dostupný na celosvetovej sieti WWW, na adrese http://evlm.stuba.sk. Obsahuje priame odkazy na Národné portály a informačné stránky projektu, elektronické fórum pre doručenie požiadaviek na odborné konzultácie a ich distribúciu na Národné portály, prepojenie na centrálny databázový portál EVLM, virtuálny pracovný priestor partnerov projektu a odkazy na iné webové stránky s podobným obsahom a zameraním (obr. 1).

Obr. 1: Centrálny portál EVLM

V súčasnosti prebieha tvorba elektronických učebných materiálov z matematiky pre Centrálnu databázu (obr. 2) na nadnárodnej úrovni, pričom väčšina materiálov bude zároveň dostupná aj v národných jazykoch v príslušných národných databázach. Tým projekt umožňuje zabezpečiť dostatok národnej odbornej literatúry v elektronickej forme, čo nie je zanedbateľným aspektom v celoeurópskom kontexte multinárodného zoskupenia EÚ podporujúceho rozvoj národnej kultúry a vzdelanosti. Materiály sú prevažne vo forme sémantických súborov typu xml s použitím nového hypertextového kódovania matematického značenia pomocou MathML, resp. interaktívne java aplikácie, vizualizácie, animácie a online výpočty v prostredí serveru webMathematica.

Centrálny portál a Národné portály sú voľne prístupné pre súkromné osoby, samoukov a záujemcov o samostatné vzdelávanie. Umožňujú prístup k vedomostiam aj hendikepovaným ľuďom, či už fyzicky postihnutým alebo mentálne nestálym osobám nespôsobilým zvládnuť psychický nápor kladený na študentov riadneho štúdia, alebo osobám, ktoré môžu z nejakých osobných dôvodov pociťovať diskrimináciu a nerovné zaobchádzanie v dôsledku rodových, sociálnych alebo kultúrnych stereotypov. Individuálna pomoc a starostlivosť poskytovaná záujemcom národnými konzultačnými centrami matematiky pomáha vytvárať priateľskú atmosféru, ktorá povzbudzujúco pôsobí pri prekonávaní osobných problémov. Použitie najmodernejších informačných a komunikačných technológií pod vedením skúsených a odborne fundovaných tútorov a ich individuálny prístup tiež pomôžu významným spôsobom redukovať stres, neistotu a nedôveru vo vlastné schopnosti, ktoré môžu byť pre niektoré citlivé osoby prekážkou úspešného štúdia v súťaživom agresívnom prostredí klasického denného vysokoškolského štúdia. Poskytovanie informácií o existujúcich elektronických učebných materiáloch z matematiky, o spôsobe ich využitia a priame prepojenia na databázu podporujú tiež myšlienku celoživotného vzdelávania. Služby Národných centier Matematiky sú k dispozícii klientom od strednej školy až po absolvovanie vysokoškolského, resp. doktorandského štúdia ako aj neskôr, po nastúpení do zamestnania a pri budovaní svojej profesionálnej kariéry.



Obr. 2: Centrálny databázový portál EVLM

Kombinovaná forma štúdia (blended solution), e-learning a využívanie informačných a komunikačných technológií spolu s osobným individuálnym prístupom a odborným vedením pod dohľadom učiteľa konzultanta v úlohe tútora, je novým pedagogickým trendom vychádzajúcim v ústrety rôznorodým požiadavkám a nárokom širokého spektra cieľových skupín projektu.

Primárnou cieľovou skupinou je študujúca mládež, od stredných škôl až po štúdium na vysokých školách všetkých troch stupňov - bakalárske, magisterské a doktorandské programy, stredoškolskí a vysokoškolskí pedagogickí pracovníci a pracovníčky, výskumní a vedeckí pracovníci a pracovníčky, ktorí majú záujem získať nové poznatky a prehĺbiť svoje vedomosti z matematiky, alebo potrebujú odborné konzultácie pri riešení matematických problémov. Cieľovými sektormi sú vzdelávacie inštitúcie od stredných škôl až po univerzity.

Sekundárnou cieľovou skupinou sú záujemcovia z neakademickej sféry pracujúci v oblasti priemyselného výskumu a vývoja, ktorí potrebujú hlbšie a širšie vedomosti z matematiky – vrátane najnovších výsledkov a trendov rozvoja, detailné informácie o dostupných zdrojoch a najnovších teoretických vedeckých výsledkoch (v tlačenej alebo elektronickej forme), alebo ktorí požiadajú o odbornú pomoc pri riešení špecifických matematických problémov. Cieľové sektory sú rôzne vývojové a výskumné organizácie a ústavy, centrá rozvoja vedecko-technických informácií a vedecké inštitúcie.

Treťou skupinou potenciálnych používateľov môžu byť rôzne súkromné a štátne školiace centrá a organizácie, ktoré poskytujú kontinuálne a dištančné vzdelávanie alebo celoživotné vzdelávanie. Potenciálnymi konečnými užívateľmi môžu byť aj už spomínané súkromné osoby, domáci samoukovia, ktorí sa z nejakých osobných dôvodov nemôžu stať riadnymi študentmi a študentkami niektorej formy inštitucionálneho štúdia, ale chcú samoštúdiom uplatniť svoje právo na informácie a vzdelávanie.

Koordinátorom projektu je Slovenská technická univerzita v Bratislave, Ústav prírodných, humanitných a spoločenských vied Strojníckej fakulty, www.stuba.sk. Partnerskými inštitúciami je nasledujúcich 6 univerzít a 2 vzdelávacie spoločnosti z európskych krajín:

- Plovdivski universitet Paisii Hilendarski, Fakultet po Matematika i Informatika, Plovdiv, Bulharsko, www.fmi-plovdiv.org/
- Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň, Česká republika, www.zcu.cz
- Miskolci Egyetem, Miškolc, Maďarsko, www.uni-miskolc.hu
- University of Limerick, Limerick, Írsko, www.ul.il
- Universidad de Salamanca, Salamanca, Španielsko, www.usal.es
- School of Mathematical and Information Sciences, Coventry University, Veľká Británia, www.coventry.ac.uk
- Tullossilta, Ltd., Tampere, Fínsko, www.tulossilta.fi
- Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku, Slovensko, www.ssgg.sk

3. Slovenský portál EVLM

Súčasťou siete Národných portálov je aj Slovenský portál EVLM (obr. 3), voľne prístupný na webe [4] pomocou odkazu z menu národných portálov na Centrálnom portáli EVLM, alebo priamo na adrese: http://slovak.evlm.stuba.sk/portal/. Sprostredkuje základné údaje o projekte EVLM a o sieti Národných portálov EVLM prezentované na niekoľkých informačných stránkach v slovenčine. Poskytuje informácie o činnosti Konzultačného centra Matematiky na Strojníckej fakulte STU (vrátane elektronického formulára na zaslanie požiadavky na konzultáciu a odpovede na ňu pomocou elektronickej pošty) a o slovenskej on-line databáze EVLM prístupnej cez Databázový portál. Obsahuje opis dokumentov a typov súborov nachádzajúcich sa v databáze, priame odkazy na slovenské verzie dvoch didaktických materiálov pre požívanie IKT vo vyučovaní a štúdiu matematiky - Rukoväť učiteľa, Rukoväť študenta, a odkazy na iné webové stránky zaoberajúce sa matematikou v slovenskom alebo českom jazyku. K dispozácii je aj elektronický hodnotiaci dotazník – anketa, pomocou ktorej môžu návštevníci vyjadriť svoj názor na služby Slovenského portálu EVLM, obsah databázy a konzultačný servis. Návštevnosť portálu je permanentne sledovaná a štatisticky vyhodnocovaná, počet prístupov je zverejnený.

Obr. 3: Slovenský portál EVLM

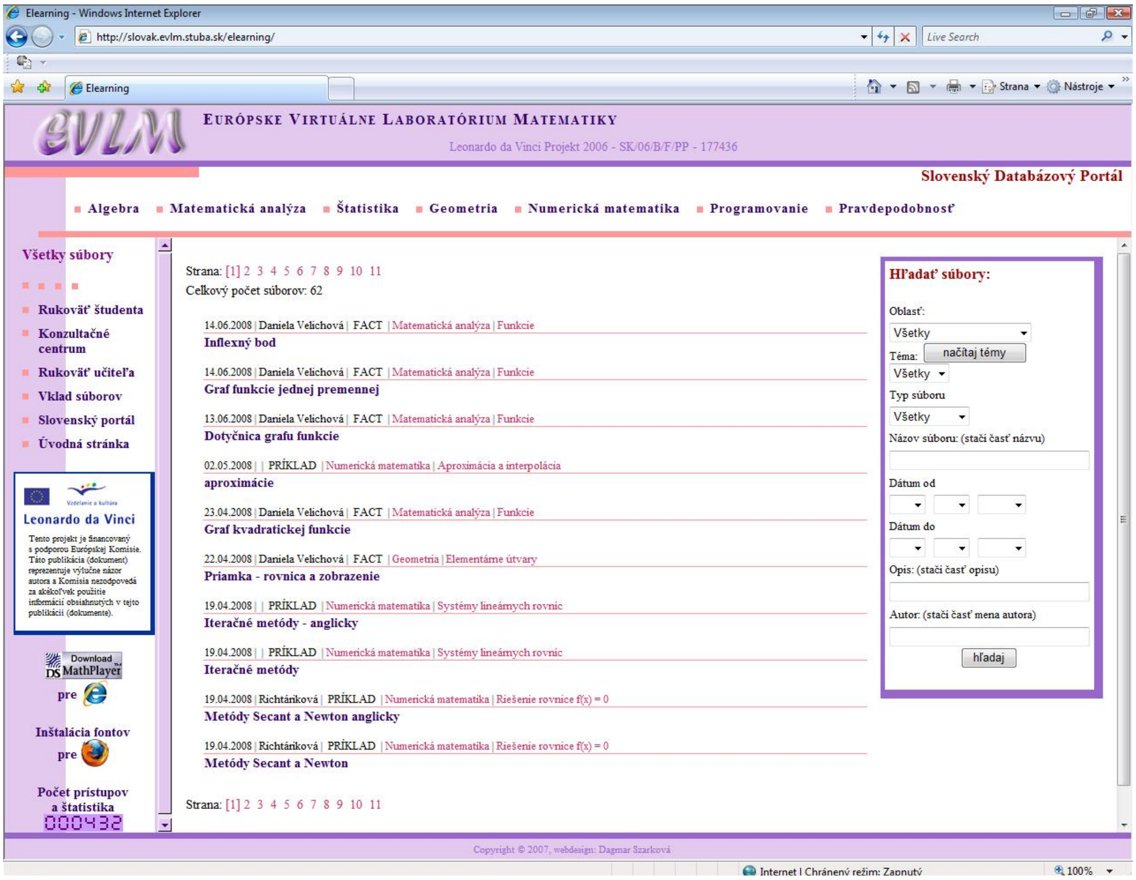
Slovenský databázový portál je voľne prístupnou platformou pre vkladanie, zdieľanie a používanie rôznorodých elektronických učebných materiálov z matematiky v slovenskom jazyku. Pracuje na interaktívnej báze, pružne reagujúc na požiadavky návštevníkov z rôznych cieľových skupín projektu. V databáze sa ľahko orientuje, všetky potrebné informácie sú uvedené v úvodnom slove. Pri zobrazení všetkých súborov sú materiály zoradené zostupne podľa dátumu vloženia, aby pravidelní návštevníci databázy okamžite získali informácie o najnovších učebných materiáloch. V databáze je zabezpečené aj rýchle vyhľadávanie, jednoduchým nastavením parametrov v tabuľke vyhľadávania súborov (obr. 4 – tabuľka vpravo). Špeciálnou voľbou vyhľadávacích kľúčov je možné zobraziť vybrané zoznamy súborov podľa jednotlivých hlavných oblastí matematiky (algebra, matematická analýza, štatistika, geometria, numerická matematika, programovanie a pravdepodobnosť) a v nich dostupných tém, podľa typu učebného materiálu (FACT, RLO, MODUL, PRÍKLAD), podľa názvu súboru, dátumu vloženia do databázy, opisu materiálu, alebo podľa mena autora. Všetky materiály sú do databáty vkladané spolu s metadátami obsahujúcimi uvedené kľúčové vyhľadávacie parametre. Akceptované sú 4 základné typy materiálov:

FACTs [Frequently Asked Consultation Topics] sú dokumenty obsahujúce stručné, všeobecné a súhrnné informácie o matematických pojmoch a témach často sa opakujúcich v konzultačných otázkach.

RLOs [Reusable Learning Objects] sú učebné materiály opakovane použiteľné v rôznych kontextoch, ktoré prinášajú podrobnejšie informácie o jednotlivých základných matematických pojmoch a témach.

MODUL je súbor viacerých materiálov typu RLO uložených najčastejšie v jednom adresári. Obsahuje komplexné informácie na danú tému, resp. z danej oblasti.

PRÍKLAD(Y) sú súbory problémov určených na riešenie, alebo zbierky riešených úloh.



Obr. 4: Slovenský databázový portál EVLM

Dve didaktické príručky určené hlavným cieľovým skupinám projektu EVLM boli vytvorené medzinárodným kolektívom riešiteľov v angličtine a postupne sú prekladané do národných jazykov zúčastnených partnerov. *Rukoväť učiteľa* ponúka stručné informácie o základných možnostiach tvorby elektronických učebných materiálov v najčastejšie používaných softvéroch. Obsahuje 16 kapitol, v ktorých čitateľ nájde materiály o vyučovaní matematiky s podporou počítačov, stručnú charakteristiku a príklady použitia rôznych softvérových produktov (Mathematica, webMathematica, Calculus WIZ, Mathematical Explorer, Mathematica CalcCenter, GeoGebra, DERIVE, Maple a MATLAB), a oboznámi sa s editorom xml súborov SciWriter a pravidlami kódovacieho jazyka MathML, ktorý umožňuje kódovať vizuálnu aj obsahovú stránku odborného textu a na rozdiel od hypertextového jazyka HTML ponecháva odborné značenie v prostredí internetu aktívne a úplne vyhľadávateľné. *Rukoväť študenta* je zameraná viac prakticky, dáva záujemcovi možnosť nahliadnuť do riešení konkrétnych matematických problémov z vybraných oblastí matematiky v prostredí vybraných softvérov (Mathematica, MATLAB a Maple). Okrem iného poskytuje napr. aj stručný návod, ako napísať študentskú prácu pomocou editačného softvéru Publicon.

Konzultačné centrum Matematiky bolo zriadené ako súčasť Slovenského portálu EVLM. Začalo pracovať online a od januára 2008 poskytuje aj prezenčné konzultácie v budove Strojníckej fakulty STU v Bratislave, pri Ústave prírodných, humanitných a spoločenských vied. Otvorené je pre širokú verejnosť 5 dní v týždni po 4 hodiny. V súčasnosti v ňom pôsobí 7 vysokoškolských učiteliek a dvaja učitelia, ktorí za prvých 8 mesiacov funkčnosti centra poskytli viac ako 800 konzultácií. Na konzultácie prichádzajú prevažne študenti bakalárskeho a inžinierskeho štúdia SjF STU, ale medzi návštevníkmi sú aj stredoškolskí študenti a doktorandi, kolegovia z iných ústavov a fakúlt STU, aj z iných vzdelávacích inštitúcií. Návštevníci si na konzultačnom centre cenia najmä jeho dostupnosť, ústretovosť voči všetkým záujemcom, osobný prístup a ochotu lektorov. Okrem osobnej návštevy môžu záujemcovia požiadať o konzultáciu aj písomnou formou a požiadavku poslať buď obyčajnou poštou alebo elektronicky.

4. Záver

V Európe prebieha výučba matematiky na technických univerzitách ešte stále prevažne tradičnou formou, hoci predmet sám nadobúda na svojom význame práve v súvislosti s rýchlym rozvojom informačných a komunikačných technológií, ktorý je zasa paradoxne závislý na vývoji matematiky samotnej. Napriek tomu, že na Internete sa objavuje čoraz častejšie mnoho nových a kvalitných elektronických učebných materiálov, zväčša nie sú náležite rozširované ani všeobecne používané. Mnoho vzdelávacích inštitúcií vytvára špeciálne učebné materiály na inštitucionálnej úrovni pre svoje špecifické potreby (často s podporou grantov z rôznych európskych programov), ktoré by však mohli rovnako dobre poslúžiť aj na iných inštitúciách. Vytvorená sieť siedmych národných portálov, sedem národných a jedna centrálna databáza poskytujú otvorený priestor pre všetkých záujemcov o kvalitné edukačné materiály, ich vzájomné zdieľanie a používanie.

Konzultačný servis reagujúci na individuálne požiadavky respondentov spolu s voľne šírenými učebnými materiálmi vzbudil väčší záujem o matematiku v radoch študentov a pomohol zvýšiť matematické vedomie a zručnosti záujemcov všetkých cieľových skupín, pri doplňaní chýbajúcich základov matematiky z nižších stupňov škôl, v ďalšom štúdiu matematických zákonitostí, či pri riešení matematických záhad odborných problémov. Materiály dostupné v sieti databáz projektu EVLM slúžia aj všetkým záujemcom z radov pedagogických pracovníčok a pracovníkov, ktorí tu nájdu široký výber rôznorodých učebných dokumentov a tiež pomoc pri príprave vlastných elektronických učebných materiálov z matematiky a iných disciplín.

Literatúra

[1] EVLM projekt: Európske virtuálne laboratórium matematiky, informačné stránky projektu, <http://evlm.stuba.sk/EVLM/index.html>.

[2] EVLM – Centrálny portál, <http://www.evlm.stuba.sk>.

[3] EVLM – Centrálna databáza, <http://evlm.stuba.sk/databasemenu/menu_files/frame.htm>.

[4] EVLM – Slovenský portál, <http://slovak.evlm.stuba.sk/portal/>.

[5] EVLM – Slovenský databázový portál, <http://slovak.evlm.stuba.sk/elearning/>.

MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ POVRCHOVÝCH PLASMONŮ

Jaroslav Vlček[1]

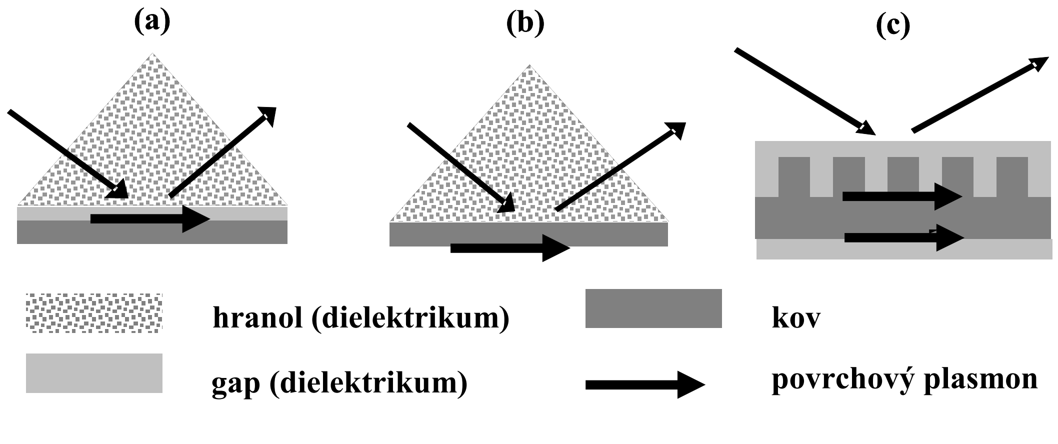
Abstrakt:
Příspěvek je věnován základům modelování povrchových plasmonů v optických multivrstvách. Maxwellovy rovnice v planární multivrstvě jsou řešeny exaktním postupem, k řešení v periodické struktuře je použita Fourierova transformace. Teorie je doplněna vybranými numerickými výsledky a jejich porovnáním s experimentálními daty.

1. Základní pojmy

Jako povrchové plasmony (*surface plasmons* – SP) označujeme hromadné excitace elektronů vázané na rozhraní mezi vodičem a izolantem. Nelze je proto přímo registrovat jako elektromagnetické vlnění vně optického systému, jejich existenci lze však prokázat například jako lokalizovaný úbytek energie odraženého svazku. Experimentálně lze SP generovat jednak v planární multivrstvě nebo také na periodickém rozhraní (mřížce).

V prvním případě se využívá úplného odrazu při přechodu z opticky hustšího prostředí do prostředí opticky řidšího. Povrchová (evanescentní) vlna může způsobit vznik plasmonu na povrchu kovu „odsávajícího“ evanescentní vlnu z tenké dielektrické vrstvy, tzv. gapu (Ottova konfigurace – obr. 1a) nebo přímo v tenkém kovovém filmu excitací elektronů (Kretschmannova konfigurace – obr. 1b).

V případě mřížky dochází k difrakci na rozhraní majícím periodicitu srovnatelnou s vlnovou délkou dopadajícího svazku. Přitom jsou v důsledku interference produkovány jednak reflektované a trans-mitované módy, jednak módy evanescentní šířící se podél rozhraní, které mohou rovněž vybudit povrchové plasmony (obr. 1c). Ve všech případech je nezbytné, aby incidentní vlna byla lineárně polarizovaná v rovině dopadu (tzv. *p*-polarizace).



Obr. 1. Experimentální konfigurace pro excitaci povrchových plasmonů: Otto (a), Kretchmann-Raether (b), kovová mřížka (c).

[1] Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB-Technická univerzita Ostrava, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava-Poruba, jaroslav.vlcek@vsb.cz

2. Povrchové plasmony v planárním systému

Evanescentní vlna je generována při totálním odrazu na rozhraní mezi vazebním hranolem a navazující vrstvou, kterou je buď tenká dielektrická vrstva nebo přímo kov.

2.1. Matematický model

Uvažujeme monochromatický světelný svazek o vlnové délce λ a úhlové frekvenci ω v homogenním prostředí charakterizovaném relativní permitivitou ε a relativní permeabilitou μ = 1 pro magneticky neutrální materiály, takže index lomu můžeme zavést vztahem $n = \sqrt{\varepsilon}$. Intenzity elektrického a magnetického pole (do níž zahrneme admitanci vakua) jsou harmonické v čase s faktorem $\exp\{\mathrm{i}\omega t\}$. Jejich prostorově závislé faktory **E** a **H** splňují v každé z vrstev Maxwellovy rovnice

$$\begin{array}{lll} \nabla \times \mathbf{H} = \mathrm{i}k_0 \varepsilon\, \mathbf{E} , & \nabla \cdot (\mu\, \mathbf{H}) = 0 , & \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mathrm{i}k_0 \mu\, \mathbf{H} , & \nabla \cdot (\varepsilon\, \mathbf{E}) = 0 , & k_0 = 2\pi / \lambda . \end{array} \quad (2.1)$$

Pro rovinnou vlnu lze vektory pole pro libovolné $\mathbf{r} = (x, y, z)$ psát ve tvaru $\mathbf{E} = u\, \mathbf{e}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, $\mathbf{H} = u\, \mathbf{h}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, kde u značí amplitudu, **e**, **h** jsou konstantní polarizační vektory a $\mathbf{k} = k_0(\alpha,\beta,\gamma)$ je vlnový vektor. Pak je $\nabla \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\mathrm{i}\,\mathbf{k} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ a rovnice (3.1) se redukují na algebraickou úlohu

$$(\mathbf{K}^2 + \varepsilon \mathbf{I})\,\mathbf{e} = \mathbf{o} , \qquad \text{kde} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

a **I** je jednotková matice. Požadavek netriviálního řešení, $\det(\mathbf{K}^2 + \varepsilon\mathbf{I}) = 0$, vede ke čtyřem kořenům γ_q, $q = 1,\dots,4$ nazývaným konstanty šíření a k odpovídajícím vlastním vektorům $\mathbf{e}_q$, které popisují polarizační stav světelné vlny. V izotropním médiu jsou vlastní polarizace lineární buď v rovině dopadu (TM- neboli *p*-polarizovaná vlna) nebo k ní kolmé (TE- neboli *s*-polarizovaná vlna).

Bude-li $x = 0$ rovina dopadu, pak ve vektoru **k** je $\alpha = 0$ a úloha na vlastní čísla vede k řešení $|\gamma| = \sqrt{\varepsilon - \beta^2}$. Získané konstanty šíření označíme vzhledem k polarizacím a směrům šíření $\gamma_s^{(+)} = \gamma_p^{(+)} = \gamma^{(+)}$, $\gamma_s^{(-)} = \gamma_p^{(-)} = \gamma^{(-)}$, kde znaménko (+) se vztahuje k dopředné vlně a (–) k vlně zpětné. Odpovídající polarizační vektory získáme dle (2.2):

$$\mathbf{e}_s^{(+)} = \mathbf{e}_s^{(-)} = [1\,0\,0]^{\mathrm{T}} , \quad \mathbf{h}_s^{(\pm)} = \mathbf{K}^{(\pm)}\mathbf{e}_s^{(\pm)} , \qquad \mathbf{e}_p^{(\pm)} = \left[0 \;\; \gamma^{(\pm)} \;\; -\beta\right]^{\mathrm{T}} , \quad \mathbf{h}_p^{(\pm)} = \mathbf{K}^{(\pm)}\mathbf{e}_p^{(\pm)} . \quad (2.3)$$

Mějme nyní soustavu K paralelních vrstev o tloušťkách $t^{(\kappa)}$ vložených mezi poloohraničené regiony – superstrát (κ = 0) a substrát (κ = K+1). Bez újmy na obecnosti zavedeme souřadný systém s osou z kolmou na multivrstvu a s rovinou z = 0 identickou s prvním rozhraním. Dopadá-li svazek ze superstrátu pod úhlem φ, je $\beta = n^{(0)} \sin\varphi$ a pro vektory pole v libovolné vrstvě platí

$$\mathbf{E} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\beta y} \sum_{q=1}^{4} u_q \mathbf{e}_q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\gamma_q z} , \qquad \mathbf{H} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\beta y} \sum_{q=1}^{4} u_q \mathbf{h}_q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\gamma_q z} , \qquad \mathbf{h}_q = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_q . \quad (2.4)$$

Hraničními podmínkami je spojitost tečných složek vektorů pole. Známe-li pole na rozhraní (κ), plyne jeho podoba na počátku následující vrstvy z va-zebních vztahů

$$\sum_{q=1}^{4} u_q^{(\kappa)} \exp\left\{-\mathrm{i}k_0\gamma_q^{(\kappa)}t^{(\kappa)}\right\}\begin{bmatrix} e_{jq}^{(\kappa)} \\ h_{jq}^{(\kappa)} \end{bmatrix} = \sum_{q=1}^{4} u_q^{(\kappa+1)}\begin{bmatrix} e_{jq}^{(\kappa+1)} \\ h_{jq}^{(\kappa+1)} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

pro $j = x, y$. Jedná se o soustavu čtyř rovnic, kterou zapíšeme maticově:

$$\mathbf{D}^{(\kappa)}\mathbf{P}^{(\kappa)}\mathbf{u}^{(\kappa)} = \mathbf{D}^{(\kappa+1)}\mathbf{u}^{(\kappa+1)}, \qquad \text{kde} \qquad \mathbf{P}^{(\kappa)} = \mathrm{diag}\left(\exp\left\{-\mathrm{i}k_0\gamma_q^{(\kappa)}t^{(\kappa)}\right\},\ q = 1,\ldots,4\right) \qquad (2.6)$$

a matice $\mathbf{D}^{(\kappa)}, \mathbf{D}^{(\kappa+1)}$ jsou tvořeny tečnými složkami polarizačních vektorů. Naším cílem je získat vztah mezi amplitudovými koeficienty obsaženými ve vektorech $\mathbf{u}^{(0)}$ a $\mathbf{u}^{(K+1)}$, jejichž struktura má univerzální podobu $\mathbf{u}^{(\kappa)} = \left[u_s^{(\kappa+)}\ u_p^{(\kappa+)}\ u_s^{(\kappa-)}\ u_p^{(\kappa-)}\right]^{\mathrm{T}}$. Zkombinujeme-li příspěvky všech vrstev, obdržíme výslednou formuli

$$\mathbf{u}^{(0)} = \left(\mathbf{D}^{(0)}\right)^{-1} \prod_{\kappa=1}^{K} \mathbf{D}^{(\kappa)}\left(\mathbf{P}^{(\kappa)}\right)^{-1}\left(\mathbf{D}^{(\kappa)}\right)^{-1} \mathbf{D}^{(K+1)}\mathbf{u}^{(K+1)}, \qquad . \qquad (2.7)$$

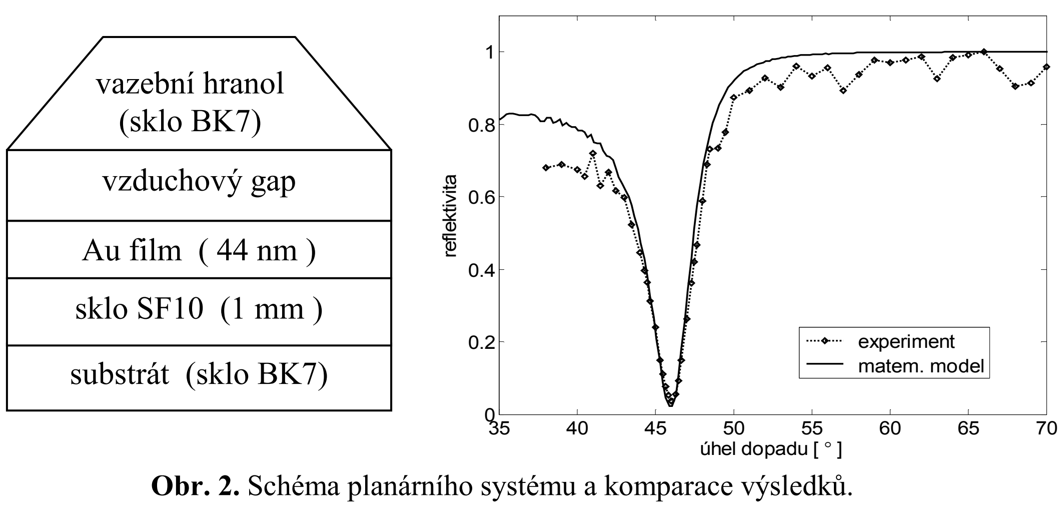
která umožňuje vypočítat amplitudové koeficienty odražené, resp. transmitované vlny při zvolené polarizaci. Pro podrobnější popis algoritmu viz například [1], kap. 3.

Při modelování plasmonových excitací nás zajímá specielně reflektivita *p*-polarizované vlny, definovaná vztahem

$$R_p = \left|\frac{u_p^{(0-)}}{u_p^{(0+)}}\right|^2 . \qquad (2.8)$$

2.2. Příklad: experiment vs. teoretický model

Jako ilustrační příklad uvádíme TIR systém v Ottově konfiguraci dle obr. 2, který byl sestaven a proměřován na Institutu fyziky VŠB-TU v Ostravě. Úloha byla řešena pro vlnovou délku 632,8 nm, které odpovídají indexy lomu $n^{(0)} = n^{(4)} = 1.5151$ (sklo BK7, [2]), $n^{(1)} = 1$ (vzduchový gap), $n^{(2)} = 0{,}1428 - 3{,}5429\mathrm{i}$ (zlato, [3]) a $n^{(3)} = 1{,}76$ (sklo SF10, [2]). Koincidenci experimentu s teoretickým modelem na obr. 2 odpovídá tloušťka gapu 400 nm.

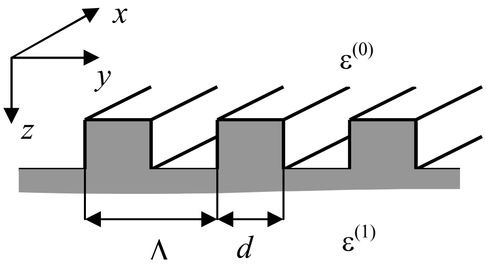


Obr. 2. Schéma planárního systému a komparace výsledků.

3. Povrchové plasmony v periodickém systému

3.1. Matematický model

Jsou-li vrstvy periodicky strukturovány, způsobuje střídání materiálů anizotropii permitivity. Z mnoha typů periodických systémů budeme uvažovat často užívanou lamelární binární mřížku s jednou periodickou vrstvou (obr. 3), v níž je permitivita dána předpisem



Obr. 3. Lamelární mřížka.

$$\varepsilon(y) = \begin{cases} \varepsilon^{(0)}, & 0 < y < d, \\ \varepsilon^{(1)}, & d \le y \le \Lambda \end{cases} . \tag{3.1}$$

Řešení soustavy (2.1) hledáme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} E_j(y,z) \\ H_j(y,z) \end{bmatrix} = u \,.\begin{bmatrix} e_j(y) \\ h_j(y) \end{bmatrix} .\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(\beta y + \gamma z)} , \tag{3.2}$$

j = 1, 2, 3, kde dále u je amplituda a e_j, h_j jsou složky polarizačních vektorů. Jelikož difrakční odezva od periodické struktury musí vykazovat rovněž prostorovou periodicitu, rozvineme funkce $e_j(y), h_j(y)$ a $\varepsilon(y)$ do Fourierových řad s periodou Λ:

$$\begin{bmatrix} e_j(y) \\ h_j(y) \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} e_{jn} \\ h_{jn} \end{bmatrix} .\exp\left\{-\frac{2\pi \mathrm{i} n y}{\Lambda}\right\} , \qquad \varepsilon(y) = k_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \exp\left\{-\frac{2\pi \mathrm{i} l y}{\Lambda}\right\} . \tag{3.3}$$

Faktorizujeme-li součiny εE_j pomocí Laurentovy formule

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \exp\left\{-\frac{2\pi \mathrm{i} l y}{\Lambda}\right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_{jn} .\exp\left\{-\frac{2\pi \mathrm{i} n y}{\Lambda}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{n-l} e_{jl} \exp\left\{-\frac{2\pi \mathrm{i} n y}{\Lambda}\right\} , \tag{3.4}$$

obdržíme po příslušných úpravách nekonečně dimenzionální algebraický systém

$$\begin{aligned} -\beta_n h_{3n} + \gamma h_{2n} &= \sum_l c_{n-l} e_{1l} , & -\beta_n e_{3n} + \gamma e_{2n} &= -h_{1n} , \\ -\gamma h_{1n} &= \sum_l c_{n-l} e_{2l} , & -\gamma e_{1n} &= -h_{2n} , \\ \beta_n h_{1n} &= \sum_l c_{n-l} e_{3l} , & \beta_n e_{1n} &= -h_{3n} . \end{aligned} \tag{3.5}$$

V praxi se výpočet provádí pro konečný počet rovnic, což vede k omezenému spektru difrakčních módů, tj. $-N \le l, n \le N$ pro vhodně zvolené N, přičemž neznámé Fourierovy koeficienty polarizačních stavů sdružíme do vektorů

$$\mathbf{e}_j = (e_{j,-N}, e_{j,-N+1}, \cdots, e_{j,N})^{\mathrm{T}} , \qquad \mathbf{h}_j = (h_{j,-N}, h_{j,-N+1}, \cdots, h_{j,N})^{\mathrm{T}} . \tag{3.6}$$

Eliminací normálových složek z původní soustavy obdržíme rovnici

$$(\mathbf{G} - \gamma \mathbf{I})\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{h}_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \mathbf{o} , \tag{3.7}$$

kde **G** je matice odvozená ze soustavy (3.5) o dimenzi 4 × (2N+1), **I** je jednotková matice téže dimenze. Řešením této úlohy získáme vektor vlastních čísel (konstant šíření γ_q) a matici **D** tvořenou vlastními vektory reprezentujícími polarizační stavy. Vzhledem k blokové struktuře matice soustavy lze úlohu řešit zvlášť pro s-polarizovaný a

p-polarizovaný vstup. V izotropních vrstvách lze řešení Maxwellových rovnic stanovit exaktně ve tvaru Rayleighových rozvojů podobně jako v případě planární multivrstvy, jejichž nyní obecně nekonečný počet difrakčních módů rovněž zredukujeme.

Označíme-li $\mathbf{u}^{(\kappa)}$ vektory amplitudových koeficientů v jednotlivých vrstvách, které mají po rozštěpení úlohy dimenzi 4 × (2N+1), obdržíme aplikací hraničních podmínek na planárních rozhraních (spojitost tečných složek) pro amplitudové koeficienty vztah formálně stejný jako rovnice (2.7) pro planární multivrstvu. Zaměříme-li se pouze na nultý difrakční řád, vypočteme na základě vztahu

$$R_{0,p} = \left| \frac{u_{0,p}^{(0-)}}{u_{0,p}^{(0+)}} \right|^2 \qquad (3.8)$$

reflektivitu p-polarizované vlny, která nabývá minima pro úhel dopadu, při němž jsou generovány plasmonové vlny.

Z implementačního hlediska je třeba upozornit na dvě okolnosti, které komplikují aplikaci popsaného algoritmu. Za prvé, sumy v součinu (3.4) nekonvergují stejnoměrně v bodech nespojitosti, takže systém Maxwellových rovnic musí být poněkud modifikován – viz např. [4]. Druhá obtíž nastává, je-li hloubka mřížky příliš velká ve srovnání s vlnovou délkou dopadajícího svazku. Ve ztrátovém prostředí jsou pak matice $\mathbf{P}^{(\kappa)}$ špatně podmíněny, což brání jejich korektní inverzi. Tuto komplikaci lze odstranit přeformulováním vazebních podmínek mezi vrstvami aplikací tzv. S-algoritmu [5].

3.3. Analýza numerických výsledků

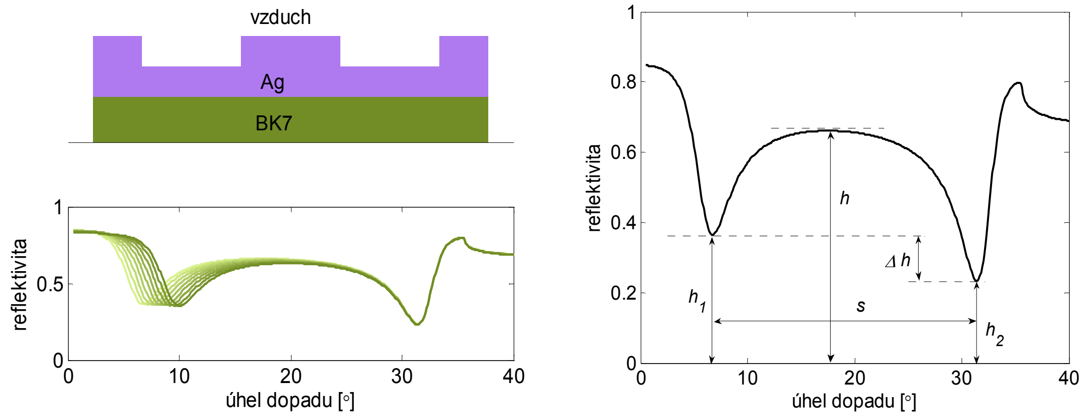
Závislost reflektivity na úhlu dopadu vykazuje obecně dvě ostrá minima při excitaci dvou typů plasmonových vln spojených s horním (levé minimum) a spodním rozhraním stříbrného filmu – viz šipky na obr. 1c.

Pro demonstrační účely byla zvolena excitace povrchových plasmonů v lamelární mřížce ze stříbra paternované na dielektrickém substrátu (sklo BK7), vnějším prostře-dím je vzduch – obr. 4 vlevo nahoře. V matematickém modelu tedy figurují čtyři vrstvy: vzduchový superstrát, anizotropní periodická vrstva Ag-vzduch (šířka lamel 250 nm, perioda mřížky 400 nm), stříbrný planární film a substrát BK7. Uvažujeme opět vlnovou délku 632.8 nm, při níž má stříbro index lomu $n^{(3)}$ = 0.1356 - 3.9841i [2] a pro substrát je $n^{(4)}$ = 1.5151. Prezentovaným algoritmem realizovaným v Matlabu byly vytvořeny tři typy animovaných simulací poskytujících jako výstup hodnoty reflektivity v závislosti na úhlu dopadu v rozmezí 0 až 90 stupňů.

Nejprve byla fixována výška lamel hodnotou $t^{(1)}$ = 20 nm a hodnoty $t^{(2)}$ pro Ag film byly zvyšovány po jednom nanometru od 20 nm až na hodnotu 39 nm. Získané výsledky hlavní rys ukázaly, že vzrůstající tloušťka kovového filmu tlumí odezvu od spodního rozhraní vlivem absorpčních ztrát. Ve druhém případě byla zachována celková tloušťka Ag mřížky $t^{(1)} + t^{(2)}$ = 40 nm, avšak měnil se poměr $t^{(1)}/\ t^{(2)}$ periodické a homogenní vrstvy od 1/3 do 3. Výsledky simulací mimo jiné dokládají praktické splynutí plasmonové odezvy od obou rozhraní v případě příliš tenké homogenní vrstvy.

Ve třetím případě jsme se zaměřili na posouzení citlivosti plasmonové excitace vůči změnám optické funkce (permitivity, resp. indexu lomu) substrátu. Pro variantu $t^{(1)}$ = $t^{(2)}$ = 20 nm byla sledována plasmonová rezonance v reflexní odezvě pro hodnoty indexu lomu v rozmezí 1.515 ± 0.020 s krokem 0.005. Na obr. 4 jsou znázorněny získané průběhy reflektivity, nejtmavší linie odpovídá nejvyšší hodnotě indexu lomu.

Podle očekávání dominuje zjištění, že je ovlivněna pouze odezva od spodního rozhraní (levé minimum).



Obr. 4. Ag mřížka na skleněném substrátu a minima reflektivity (vlevo), Vybrané parametry SPR odezvy od mřížky.

4. Závěr

Numerické stanovení přesné hodnoty úhlu dopadu, na němž dochází k excitaci plasmonu, vede k minimalizaci reflektivity R_p definované vztahem (3.8). Úlohy tohoto typu budou předmětem dalších analýz.

Významnou pozornost zasluhuje plasmonová rezonance při změnách materiálového složení substrátu. V současné době jsou na tomto principu vytvářeny velmi citlivé senzory zejména pro tekutá média, které se uplatňují v medicíně, biologii a při řízení chemických reakcí. Současně se hledají teoretické postupy, jimiž lze tato zařízení zefektivnit, cejchovat a podobně. Jedna ze slibných cest je zaměřit se na typické charakteristiky, jimiž se vyznačují reflexní odezvy od periodických struktur, jak je ukazuje obr. 4 vpravo získaný simulací pro index lomu 1.495.

Literatura

[1] VLČEK, J.: *Optická difrakce na multivrstvách*. Ostrava: VŠB-TU Ostrava, 2008. ISBN 978-80-248-1797-2.
[2] BASS, M. et al.: *Handbook of Optics II*. New York: McGraw-Hill, 1995.
[3] QUINTEN, M.: *Z. Phys.* B 101, 211, 1996, s. 211-217.
[4] L. LI: Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures. *J. Opt. Soc. Am.* A 13, No. 5, pp. 1870-1876, 1996.
[5] L. LI: Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings, *J. Opt. Soc. Am.* A 13, No. 5, pp. 1024-1035, 1996.

Poděkování

Práce vznikla za podpory GA ČR (202/06/0531) a MŠMT ČR (MSM 619890016).

VÝUKA MATEMATIKY A INTERNET

Josef Zedník [1]

Abstrakt: Připravujeme-li výuku matematiky na vysoké škole technického zaměření, je výhodné najít si na iternetu dobrý hotový text, doplněný vhodnými názornými obrázky a obojího řádně využít. O své zkušenosti bych se rád podělil s ostaními kolegy.

Po dlouholetém pracovním pobytu na univerzitě v Olomouci, kde jsem pomáhal vychovávat budoucí středoškolské učitele matematiky nebo odborníky pro matematickou praxi v podnicích, jsem přešel před několika lety učit matematiku na techniku do Zlína. Technologická fakulta ve Zlíně tenkrát patřila pod VUT v Brně. Také většina místních učitelů vystudovala v Brně a bylo tedy přirozené, že se zde používala brněnská skripta. Především v matematických cvičeních obsahem i rozsahem je dodnes vhodné a stále používané známé Tomicovo skriptum [5]. Na doporučení svých přátel, zkušených elektroinženýrů, jsem od nich získal a k přípravě přednášek také použil stejně stará skripta prof. Franka [6].

S touto přípravou do výuky jsem spokojen byl i nebyl. Uvedené zdroje byly sice kvalitní, ale přece jen i pro výuku matematiky dosti staré. Ve snaze o modernizaci zdrojů mi napadlo použít největší současný fenomém doby, iternet. Zvolil jsem zřejmě ten správný vyhledavač Google a pomocí vhodných příkazů jsem objevil řadu nových věcí, o kterých jsem dosud ani nevěděl. Setkávám se s tím, že nejsou známé ani pro naši širší matematicky vzdělanou veřejnost. Proto mi dovolte, abych se s vámi nyní o nabyté zkušenosti podělil. Mimochodem, že jsem zvolil ten správný vyhledavač, mne ve své přednášce [4] na letošní 30. konferenci o matematice na VŠTEZ znovu přesvědčil prof. Ivo Marek. Už jeho název Google v doslovném překladu znamená ,,obrovské číslo" nebo pro matematika jedničku se sto nulami, tedy 10^{100}.

A nyní už jen velmi stručně. Uvedu zejména několik příkazů, zadáte si je postupně na Google a můžete prohlížet, studovat a používat potřebné informace. Snad nejpříjemněji vás překvapí příkaz [7]. Nabídne se vám portál, kde se v pěti podobných vydáních najde, podle mne, nejlepší světová učebnice matematiky pro inženýry. Pro Zlín jsme zakoupili dvě různá vydání, a to [1] a [2]. Ve studetské části portálu najdete, kromě jiného, celou kapitolu s názvem *Preliminaries* - opakování středoškolské látky, životopisy matematiků a dále pak neocenitelné, metodicky dobře volené a zejména volně přístupné velmi kvalitní obrázky. V knize i na portále najdete části s označením CAS. Jde o první písmena anglických slov Computer Algebra System. Jedná se o látku, kterou máte studovat pomocí počítače. Na portále najdete konkrétní návody, jak při tom používat Maplu.

Dále, pomocí příkazu [8] se dostanete na portál diferenciálního a integrálního počtu. Ten mohohou studenti využívat k procvičování početních dovedností. Příklady jsou buď opatřeny radou nebo se dají otevírat krok po kroce. Další odkaz [9] vede k rozsáhlému výběru elektronických textů vhodných ke studiu matematiky. Závěrem uvedu ještě rozsáhlý rozcestník pro kalkulus [10] nebo ještě rozsáhlejší všeobecný rozcestník na všechy možné vědy včetně matematiky [11].

[1] Josef Zedník, Nad Stráněmi 4511, 760 05 Zlín, zednik@fai.utb.cz

Reference

[1] Thomas, Jr., G.B.: *Calculus and Analytic Geometry*, Alternate edition, 9. vydání, 2003 Pearson Education, Inc, ISBN 0-32119363-6.

[2] Thomas, Jr., G.B.: *Calculus*, Media upgrade, 11. vydání, 2005 Pearson Education, Inc, ISBN 0-321-48987-X.

[3] Rektorys, K.: *Co je a k čemu je vyšší matematika*, Praha 2001, ISBN 80-200-0883-7.

[4] Marek, I.: *O jednom problému lineární algebry v souvislosti s internetovým vyhledávačem GOOGLE*, Sborník 30. konferenci o matematice na VŠTEZ v Lázních Bohdaneč, Praha 2008.

[5] Tomica, R.: *Cvičení z matematiky*, SNTL Praha 1969.

[6] Frank, M.: *Matematika I*, SNTL Praha 1961.

[7] *Thomas Calculus*, (na webu).

[8] *Visual Calculus*, (na webu).

[9] *Paul's Online Math Notes*, (na webu).

[10] *Comprehensive Ratings for Review of Calculus ...*, (na webu).

[11] *101science*, (na webu).

SPASIA E-LEARNING A BLENDED LEARNING NÁŠ VÝCHOVNOVZDELÁVACÍ SYSTÉM?

Doc. Ing. Ján Zelem, CSc.[1]

Abstrakt:
Príspevok oboznamuje s terminológiou e-learningu a blended learningu. Popisuje výhody a nevýhody „klasického“ e-learningu s väzbou na blended learning. V závere príspevku sa v stručnosti popisuje dôležitosť úlohy učiteľa v podmienkach e-lerningu a blended learningu.

Prognózovanie budúceho vývoja v školstve (a nie len tam) je, v súčasnom období neustálych a stále sa zrýchľujúcich zmien v oblasti informačných a komunikačných technológií (IKT), viac než problematické, protirečivé ba miestami až sporné. Či sa nám to páči, alebo nie, IKT zohrávajú a niet pochýb o tom, že aj budú zohrávať významnú úlohu v každodennom živote spoločnosti, teda aj pri výchove mladej generácie v pôsobnosti školstva. Niektorí prognostici a futurológovia sa domnievajú, že IKT už spôsobujú vo vzdelávaní revolúciu, ktorá sa dá porovnávať s revolúciou po vynáleze kníhtlače. Vývoj IKT v svojej hardvérovej a softvérovej podobe prebieha s takou turbulenciou, že sledovanie len ich technických možností dáva riadne „zabrať“ aj odborníkom, profesionálom v úzko vymedzenej oblasti, nie to v celej šírke „záberu“ prostriedkov IKT. Tento fakt spôsobuje, že ich súčasné využívanie vo vzdelávaní predstavuje len nepatrný zlomok nimi ponúkaných možností.

Pôvodný anglický termín e-learning, ktorý sa začal častejšie používať až po masívnejšom rozšírení Internetu po roku 1993, zatiaľ nemá všeobecne uznávaný slovenský ekvivalent. Najčastejšie je chápaný v spojení s prostriedkami IKT ako elektronické vzdelávanie, alebo elektronické učenie či vyučovanie. Okrem tohto termínu angličtina používa celý rad príbuzných termínov ako napríklad WBL (web-based learning), CBT (computer based training), CAL (computer assissted learning) atď., ktoré v podstate konkretizujú formu pôvodného termínu e-learning. V odborných diskusiách sa objavujú aj príbuzné pojmy k e-learningu napríklad e-distance learning (e-distančné vzdelávanie), virtual university (virtuálna univertzita) a hit dnešnej doby embended learning (zmiešané vyučovanie). Jeden extrém názorového spektra predstavujú názory, že e-learning je akékoľvek vzdelávanie, pri ktorom sa používajú prostriedky IKT buď v celej alebo iba v niektorej fáze vyučovacieho procesu, napríklad napísanie osnovy prednášanej látky pomocou PC, sprístupnenie študujúcim tejto osnovy, prípadne otázok či didaktických testov na Internete, vyučovanie pomocou rôznych prezentácií priamo, on-line, či sprostredkovane umiestnením študijnej látky na niektorom z optických nosičov a pod. Druhý názorový extrém predstavujú názory, ktoré pod pojmom e-learnig rozumejú vzdelávanie realizované iba prostredníctvom PC. Všeobecný zmätok do terminológie ešte navyše vnáša možnosť plnohodnotnej komunikácie a dostupnosti Internetu pomocou mobilných telefónov, či rôznych

[1] Žilinská univerzita, FPEDAS, Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky, Univerzitná 1, 01026 Žilina, Jan.Zelem@fpedas.utc.sk

mobilných IKT prostriedkov ako sú napríklad notebooky, PDA (personal digital assistant) a pod. V tejto súvislosti sa často používa termín m-learning (mobilné učenie). Termín e-learning v tomto príspevku je chápaný ako vyučovanie pomocou prostriedkov IKT.

Jedným z kritérií taxonómie e-learningu môže byť spôsob pripojenia PC všeobecne k počítačovej sieti (v ďalšom texte sieti). V rámci tohto kritéria je možné hovoriť o off a on-line e-learningu. Pri off-line e-learningu PC študujúceho nie je pripojené k sieti a učebný materiál je dodávaný na niektorom z nosičov ako napríklad CD, či DVD. Pri on-line e-learningu PC študujúceho je už k sieti pripojené a učebný materiál je distribuovaný prostriedkami IKT. Podľa spôsobu komunikácie študujúceho s učivom a vyučujúcim je možné pri on-line e-learningu hovoriť o synchrónnej a asynchrónnej komunikácii. Pri synchrónnej komunikácii ide tzv. „živú" komunikáciu v reálnom čase vedenej výučby. Študujúci sú v „priamom" kontakte s vyučujúcim, ktorý výučbu riadi, alebo aj medzi sebou, v tom istom, však presne určenom čase. Môže sa to diať napríklad prostredníctvom elektronických, či videokonferencií, chatovania, instant message, zriadením tzv. virtuálnej triedy a pod. Pri asynchrónnej komunikácii ide v podstate a samo štúdium pomocou prostriedkov IKT. Študujúci si sami určujú čas štúdia a študujú prostredníctvom webových stránok, komunikujú prostredníctvom e-mailov, webblogov a pod.

V roku 2005 bola založená Európska nadácia pre kvalitu v elektronickom vzdelávaní, EFQUEL (European Foundation for Quality in eLearning) so sídlom v Bruseli. Nadácia si dala za cieľ: podporovať rozvoj a diverzitu e-learningu v oblasti vzdelávania, výcviku a učenia; podporovať výmenu skúseností v oblasti kvality e-learningu; zabezpečovanie spoľahlivej infraštruktúry pre zvyšovanie kvality e-learningu; zovšeobecňovanie výsledkov výskumu a skúseností, navrhovanie a riadenie projektov v tejto oblasti.

Pre zisťovanie efektivity e-learningu patrí medzi najakceptovanejšie metóda Kirkpatrickovho Philipsovho modelu. Pozostáva z piatich kritérií:

- reakcia - ako študujúci reagujú na školenie,
- miera dosiahnutia cieľov výučby – koľko sa študujúci naučili z toho čo sa naučiť mali,
- správanie – ako sa zmenilo správanie študujúcich,
- výsledky – aký efekt malo školenie pre organizáciu,
- návratnosť investícií – či prevážili výsledky školenia náklady naň vynaložené (N=((celkové príjmy – náklady)/náklady x 100).

Medzi výhody e-learningu napríklad patria:

- individualizácia vzdelávania,
- pre študujúceho je pohodlnejší a často aj lacnejší,
- umožňuje študujúcim šetriť čas,
- pre organizáciu, ktorá ho organizuje je spravidla lacnejší ako „klasické" vzdelávanie,
- hodnotenie študujúcich môže byť objektívnejšie ako tradičné ústne skúšanie,

- umožňuje realizovať okamžitú spätnú väzbu a tak aktivovať a motivovať študujúcich,
- využitím multimediálneho prostredia umožňuje vysokú úroveň prezentácie učiva, jeho archivovanie, viacnásobné použitie a rýchlu inováciu,
- poskytovanie skoro neobmedzeného množstva rôzne zameraných školení, ich previazanosť a využiteľnosť aj na iné ciele, nie len na výučbu,
- geografická neohraničenosť a globálne možnosti pri jeho tvorbe.

Veľmi zjednodušene by sa výhody e-learningu snáď dali charakterizovať slovami, že môže ísť o pohodlnejší, lacnejší, pružnejší, rýchlejší, zaujímavejší a aj kvalitnejší spôsob výučby v porovnaní s „klasickým" vyučovaním v „kamenných" školách.

Ako každá minca má rub a líce, tak aj e-learning má svoje nevýhody. Napríklad ide o:

- nedostatok motivácie, a žiaľ často aj vôle a schopností študujúcich samostatne študovať,
- pri intenzívnom, nadmernom používaní prostriedkov IKT môže dochádzať k vážnym zdravotným problémom,
- finančná náročnosť dostupnosti prostriedkov IKT môže viesť k zníženiu šancí vzdelávať sa,
- často dochádza k problémom rozvoja študujúcich v citovej výchove a hodnotového systému,
- u študujúcich nastupujú problémy s rozvojom interpersonálnych, komunikačných a aj prípadných kognitívnych kompetencií,
- niektoré prvky obsahu učiva, napríklad šport, rétorika a pod. nie je možné si prostredníctvom e-learningu osvojiť,
- aj keď prevádzkové náklady sú spravidla podstatne nižšie, počiatočné náklady na potrebný hardvér a softvér sú značné,
- nemožnosť zapojenia všetkých zmyslov do procesu vyučovania, čo už odporúčal J. A. Komenský, v prírodovedných a časti aj odborných predmetoch najmä pri vytváraní senzomotorických názorov a návykov, hoci sa už objavujú zatiaľ veľmi finančne náročné aplikácie, ako sú napríklad virtuálne montážne linky.

Ďalšou nevýhodou e-learningu sa v súčasností ukazuje skutočnosť, že viaceré e-learningové kurzy majú zatiaľ nízku úroveň. Vyplýva to z nedostatku vedomostí, skúseností a zručností tvorcov vyučovacích programov, ktoré by sa mali dať porovnávať s profesionálmi pracujúcimi v oblasti nasadzovania prostriedkov IKT, ako aj zo slabej vybavenosti prostriedkami IKT ako aj dostupnosti Internetu veľkej časti študujúcich. Vzniká tu objektívny tlak na viac profesionalitu vyučujúceho a to aj vo viacerých profesionálnych oblastiach IKT.

Medzi krajnosťami ako je na jednej strane „klasické" vyučovanie v „kamenných" školách a na strane druhej „všetko nahradzujúci" e-learning, stojí v súčasnosti často pertraktovaný blended learning. Po pôvodnom nadšení z e-learningu, v dobe rozširovania implementácie Internetu po roku 1993, došlo pri skúsenostiach s jeho realizáciou k určitému rozčarovaniu. V začiatkoch zavádzania e-learningu sa predpokladalo, že výučba v učebniach môže byť ekvivalentne nahradená v prevažnej miere prístupom k elektronickým vzdelávacím materiálom. Tieto materiály sa sprístupňovali pomocou prostriedkov IKT s využitím digitálneho vzdelávacieho prostredia, bez nutnosti priameho kontaktu. Ako sa ukázalo, šlo o mylný predpoklad. Projekty s tzv. „čistým e-learningom“, bez „živých“ prednášok, totiž neviedli vždy k plánovanému cieľu. V prípadoch kde bol e-learning doplnením klasického vzdelávania, nie ako jeho náhrada, sa e-learning presadil. Na scénu tak nastúpil blended learning. Prístup ku vzdelávaniu kombinovanou formou je akousi prirodzenou reakciou na sklamanie, ktoré prinieslo prasknutia bubliny obklopujúcej e-learning v 90. rokoch minulého storočia.

Aj pri pojme blended learning sa v používanej literatúre vyskytuje nejednoznačnosť jeho slovenského ekvivalentu. Pod pojmom blended learning sa rozumie napríklad: kombinácia respektíve vyvážená kombinácia výučby pomocou počítačov a živých prednášok; e-learning doplnený seminármi a cvičeniami (s podporou počítačov); zmysluplné didaktické prepojenie tradičných pedagogických metód s využívaním možností IKT. Pre potreby tohto príspevku sa pod pojmom blended learning rozumie kombinovaný prístup výučby využívajúci formy a prostriedky e-learningu, spájajúci on-line a off-line aktivity.

Kombinované vzdelávanie umožňuje spojenie ľudskej potreby sociálnej interakcie a možnosti výberu individuálnych vzdelávacích postupov na splnenie vzdelávacích potrieb jednotlivcov. Je predpoklad, že možnosťou výberu a kombinácie rôznych metód sa zvýši motivácia a úspešnosť vzdelávajúceho sa. Súhrne je možné zjednodušene pri blended learningu rozlíšiť nasledujúce fázy výučby: tzv. „živé“ face – to – face prednášky; semináre a cvičenia s podporou počítačov; samo štúdium (pokračovanie v štúdiu, cvičenia, opakovanie, predbežné overovanie vedomostí) s podporou prostriedkov IKT.

Dnešná mladá generácia si svoj každodenný život už nedokáže predstaviť bez mobilných prostriedkov IKT. Tvoria jej integrálnu súčasť. V týchto podmienkach ak sa postaví do protikladu „klasická“, „kamenná“ výchovnovzdelávacia inštitúcia, kde sa vedomosti získavajú v posluchárňach, učebniach, či laboratórnych miestnostiach vo vymedzenom čase a možnosť získania vedomostí kdekoľvek a kedykoľvek, mladá generácia, aj vďaka pohodlnosti, dá prednosť druhej možnosti a ňou ponúkanej mobilite. Inými slovami, školy, ktoré „nezachytia“ vyššie spomínané trendy budú mať v budúcnosti veľké problémy s prežitím. V dlhšom časovom horizonte teda dôjde ešte k silnejšiemu konkurenčnému boju do ktorého s vysokou pravdepodobnosťou zasiahnu navyše aj komerčné firmy s akreditáciou pre vzdelávanie prostredníctvom IKT. Tvrdé podmienky trhu práce budú priaznivo naklonené tomu, kto bude mať skutočné, hlboké znalosti potrebné pre vykonávanie prác na tom, ktorom pracovnom mieste, kto bude spĺňať požadované štandardy a bude mať požadované kompetencie a asi vôbec nebude až také dôležité, kde a kedy tieto požadované znalosti získal. Tu však treba brať do úvahy aj prirodzenú ľudskú potrebu odlíšiť sa, či zvýrazniť svoju výnimočnosť. A tak napríklad taký Harvard, Princeton či Univerzita Karlova budú asi aj naďalej pojmami medzi vzdelávacími inštitúciami.

V dnešnej dobe začína pôsobiť aj ďalší fenomén. Je ním fenomén konkurencie schopností výchovnovzdelávacích inštitúcii v doslovnom „boji“ o študenta. Iba „slepými silami trhu“ regulované voľné otvorenie „vzdelávacieho poľa“ pre verejné, súkromné a cirkevné ako aj iné akreditované vzdelávacie inštitúcie, v realite demografického vývoja, kedy ponuka voľných kapacít pôsobiacich rôznych typov škôl na všetkých stupňoch, na Slovensku zhruba o tretinu prevyšuje množstvo populácie nastupujúcej do vzdelávacieho procesu, prináša so sebou snahu „o prežitie“ vzdelávacích inštitúcií. Táto snaha je žiaľ často spojená s ponukou ľahšieho získania „papiera“ často na úkor vedomostnej úrovne. V podmienkach, keď ponuka výrazne prevyšuje dopyt, zákazník sa stáva „rozmaznaným“, nemusí o nič „bojovať“, dostáva sa mu všetko „na tanier“ akoby samo od seba. V prípade vzdelávania to v súčasnosti prináša so sebou fakt dočasného znižovania vedomostných znalostí bez ohľadu na to, či sa nám to páči, alebo nie. Táto krátkozraká snaha o „záchranu“, podmienená skutočnosťou súčasne nastavených parametrov financovania škôl podľa počtu študentov, v dlhšom časovom horizonte v konfrontácii s potrebami spoločnosti bude musieť byť nahradená vzdelávacím systémom, schopným dodávať skutočných a nie len „papierových“ odborníkov.

Akosi pri popise e-learningu a blended learningu sa často stráca jeho neodmysliteľné „pozadie“. Napríklad sa akosi „pozabúda“ na to, že vyučovacie programy musia vytvoriť živí ľudia s vysokými pedagogickými, didaktickými a viac profesnými znalosťami. Tak isto sa „pozabúda“ že PC, či prostriedky IKT asi ťažko dajú žiakovi a študentovi lásku, porozumenie a nadšenie. City zatiaľ PC, či prostriedky IKT, nemajú. Širokopásmové komunikačné kanály dávajú síce možnosti vytvárania interaktívnych videokonferencií, k dispozícii sú už napríklad OLED zobrazovacie jednotky na celú stenu, vytvárajúce ilúziu študijnej miestnosti, sú k dispozícii interaktívne pracovné plochy a ďalšie technické skoro zázraky, ale aj v budúcnosti pôjde len o ilúziu reality, virtuálnu realitu, teda to známe „lízanie medu cez sklo“.

Aby bolo e-learningové vzdelávanie, či blended learning naozaj efektívne a spĺňalo svoj účel treba ho medzi iným aj riadiť. Ide napríklad o činnosti plánovania priebehu štúdia, prípravu a vkladanie študijných materiálov, vykonávanie evidencie študujúcich a nimi dosiahnutých výsledkov, zabezpečenie komunikácie medzi účastníkmi vzdelávacieho procesu, vykonávanie monitoringu, archivácie, nastavovanie prístupových práv a pod. Softvér, ktorý časť spomínaných činností uľahčuje a zabezpečuje, sa obyčajne nazýva v angličtine LMS (Learning Management System), systém na riadenie výučby. Však tá najpodstatnejšia časť úspešnosti, či neúspešnosti e-learningu, či blended learningu t. j. stanovenie hlavného učebného cieľa, vhodný didaktický a pedagogický prístup k študentom, príprava študijných materiálov a foriem prezentácie učiva tak, aby učivo bolo obsahove hodnotné, zaujímavé, príťažlivé, inšpiratívne a motivujúce, spočíva výhradne v práci osoby vyučujúceho jedinca, podľa terminológie e-learningu tútora, e-učiteľa, e-moderátora, alebo facilitátora.

Nároky kladené na vyučujúceho jedinca sú enormné v podmienkach nasadzovania prostriedkov IKT pri využívaní nástrojov a možností, ktoré poskytuje e-learnig a blended learning. V literatúre sa objavujúci pojem hybridnej kariéry či vzdelanosti platí v plnom rozsahu na dnešného vyučujúceho jedinca. Dajú sa uviesť aspoň niektoré hlavné požiadavky, kladené na vyučujúceho: mal by byť výborným, inšpirujúcim a motivujúcim pedagógom; uplatňovať v práci špičkové didaktické poznatky; mal by byť vynikajúcim grafikom, aktívnym tvorcom interaktívnych multimediálnych študijných materiálov; mal by byť odborníkom v oblasti IKT, aby dokázal riešiť problémy vyskytujúce sa počas vyučovacích ako on-line, tak aj off-line aktivít; mal by byť vždy v dostupnej dobe k dispozícii svojim študentom; mal by .....

Akosi sa „pozabúda“ na motiváciu vyučujúceho, aby sa snažil splniť dané požiadavky. „Zabúda“ sa na reálne finančné „ohodnotenie“ vyučujúceho jedinca a jeho spoločenské „postavenie“ a „prestíž“ v súčasnej spoločenskej situácii. Akosi sa „zabúda“ na známu vetu, že len kvalitný učiteľ má predpoklad pre výchovu kvalitných žiakov a že len osobnosť môže vychovať osobnosť. Postavenie učiteľa v súčasných spoločenských podmienkach vonkoncom nezodpovedá vážnosti situácie a spoločenským požiadavkám kladených na celý výchovnovzdelávací systém. Táto problematika spĺňa všetky náležitosti pojmu komplexity. Preto pravdepodobne nie sú na riešenie tejto problematiky vypisované skoro žiadne granty.

Záver

Všetky svetové náboženstvá poslanie spasiteľa spájajú s nejakou formou inkarnácie božskej podstaty do ľudskej podoby. Vždy záležalo a bude záležať na schopnostiach človeka, v našom prípade vyučujúceho. Je možné konštatovať, že bez riešenia komplexity problematiky spoločenského postavenia a honorovania vyučujúceho jedinca, akékoľvek, čo aj vysoko efektívne nástroje sa minú svojmu účinku. Na otázku položenú v nadpise príspevku, či spasia e-learning a blended learning náš výchovnovzdelávací systém, by bolo možné odpovedať, že sami o sebe asi nie. E-learnig či blended learning zostanú iba nástrojmi v rukách vyučujúceho jedinca. Nadškrtnutá téma svojim rozsahom a spoločenským dopadom však značne presahuje rámec tohto príspevku.

Literatúra:

[1] TUREK, I.: Elektronické vzdelávanie (e-learning). In. *Pedagogické rozhľady*, ISSN 1335-0404, 2007, ročník 16, č.2, str. 16.

[2] VERKROOST M.J., VEEN W., FABIÁN P., BELL M., KURAS D., HEIDE A.: Nájdenie vhodnej kombinácie jednotlivých typov prístupu pri kombinovanej forme štúdia (blended learning) pre obzvlášť veľké skupiny študentov. In: *Zborník z konferencie eLearn 2006,* Žilina, EDIS ŽU, 2006, ISBN 80-8070505-4.

[4] HUBA, M. : Celoživotné vzdelávanie a e-learning. In. *Lifelong Learning in Slovakia and Czech Republic.* Bratislava : STU, 2006. str. 15-21

[5] FABIÁN P., VEEN W., MUEHREN, A.: Experience Gained from the EU SOCRATES/MINERVA PROJECT BLEND-XL. In. *Zborník príspevkov konferencie e-Learn 2008*, Žilina, EDIS ŽU, 2008, ISBN 978-80-8086-061-5, pp.311-316.

[6] TURČÁNI, M., BÍLEK, M. : E-learning = perspektíva prírodovedného vzdelávania v modernej škole. In. *Pedagogické spektrum.* 2005, roč. 14., č. 7/8. str. 1-12

[7] FABIÁN P., VEEN W., MUEHREN, A.: Finding a balance in Blended Learning with Extra Large Student Groups. In. *Zborník príspevkov konferencie ICETA 2007*, 2008, Žilina, EDIS ŽU, ISBN 978-80-8070-838-2, pp.171-176

[8] ISO/IEC standard benchmarks quality of e-learning [on-line] [citované 3.6.2008]. Dostupné na: http://www.iso.org/iso/pressrelease.htm?refid=Ref992

[9] Firemná literatúra firmy WRX s.r.o. ,[citované 26.6.2008]. Dostupné na: http://cms.wrx.sk/

Název:	Sborník 30. konference o matematice na VŠTEZ
Vydavatel:	Jednota českých matematiků a fyziků
Editor::	Stanislav Olivík
Náklad:	75 ks
Počet stran:	200
Tisk:	Vydavatelství ČVUT v Praze
ISBN:	978-80-7015-002-3
Evidenční číslo publikace	57-551-08

Neprodejné.

Praha 2008