

MODEL OSOBNEJ DOPRAVY S VYUŽITÍM MULTIKOMODITNÝCH TOKOV¹

Mária Branická², Milan Stacho³

Abstrakt:

V článku je popísaná možnosť modelovania systému osobnej dopravy pomocou multikomoditných tokov.

1. Model osobnej dopravy

Pre riešenie optimalizácie popíšeme statický model, v ktorom budem optimalizovať (minimalizovať) počet autobusov a súčasne určovať linky týchto autobusov.

Model je všeobecný, jeho základom je graf dopravnej siete $G=(V,E)$ (maximálna sieť) so zadanými požiadavkami na prepravu. V tomto článku používame vhodné vlastné označenie. Formulácia modelu je postavená na úlohe o multikomoditných tokoch, kde príslušnú účelovú funkciu definujeme viacerými spôsobmi. Túto úlohu riešime na jednoduchom modelovom príklade a to ako:

úlohy lineárneho programovania (LP),

úlohy celočíselného lineárneho programovania (ILP).

Definícia 1: Graf G je dvojica (V,E) , kde V je ľubovoľná množina a E je relácia na tejto množine, t.j. $E \subseteq V \times V$. Prvky množiny V nazývame vrcholy alebo uzly a prvky množiny E hrany. Pod ohodnoteným grafom rozumieme trojicu (V,E,e_G) , kde (V,E) je graf a funkcia $e_G : E \rightarrow R$ priradzuje hranám z E ohodnotenie, tzv. cenu hrany.

Predpokladáme, že je zadaná dopravná sieť vo forme ohodnoteného grafu $G=(V,E,e_G)$, v ktorom cena hrany reprezentuje vzdialenosť medzi uzlami. Ďalej predpokladáme, že na základe štatistického prieskumu alebo inou formou boli získané údaje o záujme o dopravu medzi jednotlivými uzlami. Tento záujem reprezentuje ohodnotený graf $H=(V,F,e_H)$ nad množinou vrcholov grafu cestnej siete.

2. Modelové riešenie optimalizácie dopravy

V ďalšom budeme riešiť úlohu, ako na základe špecifikácie záujmu a znalosti cestnej siete navrhnúť dopravné spojenia tak, aby ich počet a čas prepravy bol minimalizovaný, resp. ich naplnenosť bola maximalizovaná, resp. iné vhodne zvolené kritérium, za predpokladu, že získaný zoznam dopravných spojení dokáže uspokojiť všetky, resp. väčšinu dopytu po preprave medzi uzlami siete. V tomto prípade abstrahujeme od časovej závislosti záujmu o dopravu v priebehu dňa. Dá sa totiž predpokladať, že počas jednotlivých fáz dňa (ranná špička, atď.) sa záujem o prepravu z hľadiska zdroja a cieľa ciest nebude významne meniť, resp. jeho zmena minimálne

¹ Grantový projekt VEGA MŠ SR a SAV č. [1/0344/08](#),

² Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky, fakulta PEDAS, Žilinská Univerzita v Žiline, Univerzitná 1, 01026 Žilina, Slovenská republika, Maria.Branicka@fpedas.uniza.sk

³ Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky, fakulta PEDAS, Žilinská Univerzita v Žiline, Univerzitná 1, 01026 Žilina, Slovenská republika, Milan.Stacho@fpedas.uniza.sk

ovplyvní získaný optimálny zoznam dopravných spojení. Deň sa v tomto prípade rozdelí na dostatočný počet intervalov tak, aby tento predpoklad bol dostatočne splnený.

Pokrytie záujmu o prepravu budeme reprezentovať formou multikomoditných tokov v dopravnej sieti. Presnejšie, ku každej dvojici uzlov s nenulovým záujmom, $c_H(i, j) > 0$ priradíme komoditu $x^{(i,j)}$. V tomto prípade pre každý uzol okrem i a j bude pre túto komoditu platiť Kirchhoffov zákon a navyše do uzla i bude vtekať $c_H(i, j)$ (to znamená, že v uzle j musí vytekať $c_H(i, j)$ z tejto komodity). Táto reprezentácia, tak ako bola popísaná, sa dá charakterizovať systémom nasledujúcich rovníc:

$$\sum_{(v,w) \in E} x_{v,w}^{(i,j)} - \sum_{(w,v) \in E} x_{w,v}^{(i,j)} = 0 \quad v \neq i, j \quad (1a)$$

$$\sum_{(i,w) \in E} x_{i,w}^{(i,j)} - \sum_{(w,i) \in E} x_{w,i}^{(i,j)} = c_H(i, j) \quad (1b)$$

Riešenia uvedeného systému definujú množinu prípustných riešení optimalizačnej úlohy pre vhodne zvolenú účelovú funkciu. Napríklad, keď budeme minimalizovať účelovú funkciu, ktorá bude vyjadrovať celkovú prepravu na všetkých hranách siete váženou cenou (napr. vzdialenosťou) hrán v sieti, tak úloha má jednoduché riešenie, kde pre každú komoditu $x^{(i,j)}$ je zvolená najkratšia cesta medzi (i, j) v zmysle zvolených cien. Inak v prípade zložitejších účelových funkcií sa úloha môže aj značne skomplikovať až tak, že nájdenie jej riešenia môže byť nezvládnuteľné v prijateľnom čase aj s použitím súčasnej špičkovej výpočtovej techniky už pre prípady malého počtu vrcholov siete. Preto sa v ďalšom budeme väčšinou venovať hľadaniu nejakého približného riešenia tejto úlohy, ktoré by bolo možné získať v prijateľnom čase pre väčšinu úloh a navyše bude dostatočne kvalitné pre naše potreby. Kvalitu získaného riešenia budeme taktiež analyzovať vzhľadom k optimálnej hodnote pre danú úlohu.

Pre ilustráciu popíšeme jeden z možných tvarov vyššie popísanej úlohy pre maximalizáciu naplnenosti dopravných spojení, kde jednotlivé spoje budú charakterizované ich maximálnou kapacitou k (predpokladám, že kapacita jednotlivých spojov je rovnaká). Uvedená úloha má tvar:

$$\min \sum_{(v,w) \in E} (k \cdot y_{v,w})$$

kde

$$\sum_{(v,w) \in E} x_{v,w}^{(i,j)} - \sum_{(w,v) \in E} x_{w,v}^{(i,j)} = 0 \quad v \neq i, j \quad (2a)$$

$$\sum_{(i,w) \in E} x_{i,w}^{(i,j)} - \sum_{(w,i) \in E} x_{w,i}^{(i,j)} = c_H(i, j) \quad (2b)$$

$$\sum_{(i,j)} x_{v,w}^{(i,j)} - k \cdot y_{v,w} \leq 0 \quad (2c)$$

pričom $y_{v,w}$ je celočíselná premenná charakterizujúca počet spojov na danom úseku postačujúcich na pokrytie prepravovaného dopytu na danom úseku získaného ako riešenie systému (1) a k je maximálna kapacita spoja.

V ďalšom budeme predpokladať, že máme k dispozícii optimálne riešenie úlohy typu (1). Následne potrebujeme definovať, akým spôsobom budeme pokrývať dopyt na jednotlivých úsekoch siete pomocou spojov. Budeme predpokladať, že každý spoj má svoju maximálnu kapacitu a prepraví maximálne možné množstvo. Pre zjednodušenie predpokladáme, že kapacita spoja je rovnaká na každom úseku. Potom definujeme

$$y_{v,w} = \left\lceil \frac{\sum_{(i,j)} x_{v,w}^{(i,j)}}{k} \right\rceil$$

kde k je maximálna kapacita spoja (pozn.: voľba $y_{v,w}$ nie je náhodná, v prípade úlohy z predošlého odstavca presne zodpovedá premennej $y_{v,w}$).

Ďalej definujeme multigraf G_H na množine vrcholov V tak, že medzi dvoma vrcholmi (v, w) je presne $y_{v,w}$ hrán. Z tejto konštrukcie vyplýva, že ľubovoľné pokrytie grafu G_H cestami (resp. sledmi vhodných vlastností) definuje hľadanú množinu dopravných spojení zabezpečujúcich pokrytie dopytu. Tento problém sa dá definovať ako zobrazenie $f: E_H \rightarrow N$ s vlastnosťou, že množina vzorov $f^{-1}(i)$ pre zvolené $i \in N$ vytvára cestu, resp. sled, či iný zvolený typ grafu, t.j. podgraf G_H vytvorený z hrán $f^{-1}(i)$ je zvoleného typu. Potom veľkosť množiny obrazov $|f(E_H)|$ určuje počet potrebných dopravných spojení. Keďže tento parameter chceme minimalizovať, hľadaná úloha sa dá zapísať ako:

$$\min_{f: E_H \rightarrow N} |f(E_H)|$$

kde $f^{-1}(i)$ vytvára v G_H cestu, resp. sled $i \in N$

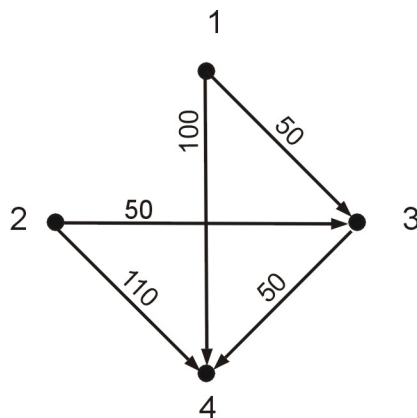
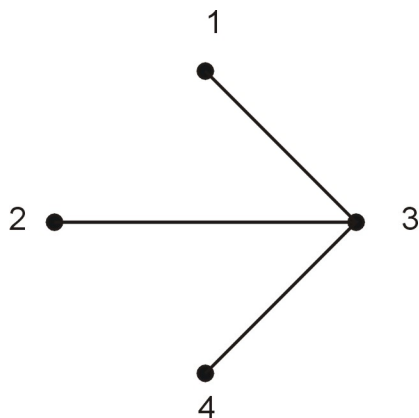
Pozn.: tento typ úlohy sa dá chápať ako hľadanie optimálneho hranového farbenia grafu, kde jednotlivé farby vytvárajú špecifickú štruktúru.

3. Príklad 1

Daný je graf dopravnej siete G (Obr. 1), maticou susednosti A a graf H (Obr. 2) požiadaviek na prepravu daný maticou susednosti B . Je potrebné určiť príslušné multikomoditné toky, ak:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 100 \\ 0 & 0 & 50 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Obr. 1

Obr. 2

Riešenie:

Budeme hľadať komodity $x^{(i,j)}$, $(i,j) \in E_G$, pre ktoré sú splnené rovnice (1), t.j. prvá séria rovníc (1a):

$$\begin{aligned} x_{2,3}^{(1,3)} - x_{3,2}^{(1,3)} &= 0, & x_{4,3}^{(1,3)} - x_{3,4}^{(1,3)} &= 0, & x_{1,3}^{(2,3)} - x_{3,1}^{(2,3)} &= 0 \\ x_{4,3}^{(2,3)} - x_{3,4}^{(2,3)} &= 0, & x_{2,3}^{(1,4)} - x_{3,2}^{(1,4)} &= 0, \\ x_{3,1}^{(1,4)} + x_{3,2}^{(1,4)} + x_{3,4}^{(1,4)} - x_{1,3}^{(1,4)} - x_{2,3}^{(1,4)} - x_{4,3}^{(1,4)} &= 0, & x_{1,3}^{(2,4)} - x_{3,1}^{(2,4)} &= 0, \\ x_{3,1}^{(2,4)} + x_{3,2}^{(2,4)} + x_{3,4}^{(2,4)} - x_{1,3}^{(2,4)} - x_{2,3}^{(2,4)} - x_{4,3}^{(2,4)} &= 0, & x_{1,3}^{(3,4)} - x_{3,1}^{(3,4)} &= 0, \\ x_{2,3}^{(3,4)} - x_{3,2}^{(3,4)} &= 0 \end{aligned}$$

a druhá séria rovníc(1b):

$$\begin{aligned} x_{1,3}^{(1,3)} - x_{3,1}^{(1,3)} &= 50, & x_{2,3}^{(2,3)} - x_{3,2}^{(2,3)} &= 50, & x_{1,3}^{(1,4)} - x_{3,1}^{(1,4)} &= 100, & x_{2,3}^{(2,4)} - x_{3,2}^{(2,4)} &= 110, \\ x_{3,1}^{(3,4)} + x_{3,2}^{(3,4)} + x_{3,4}^{(3,4)} - x_{1,3}^{(3,4)} - x_{2,3}^{(3,4)} - x_{4,3}^{(3,4)} &= 50. \end{aligned}$$

Hľadáme také hodnoty $x_{v,w}^{(i,j)}$, pre ktoré

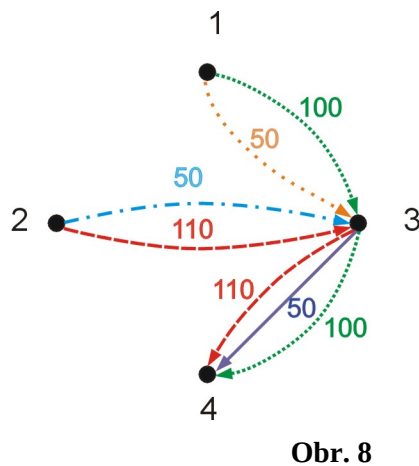
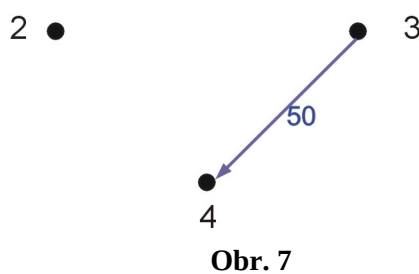
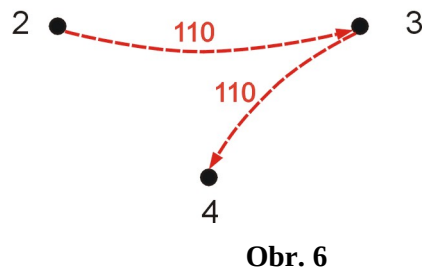
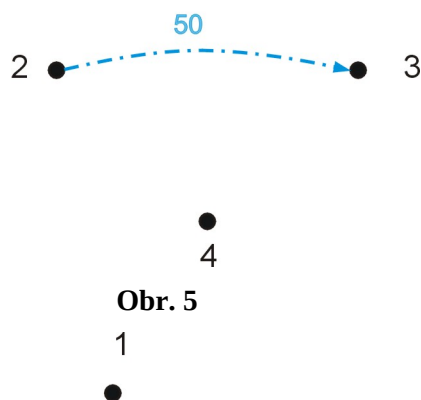
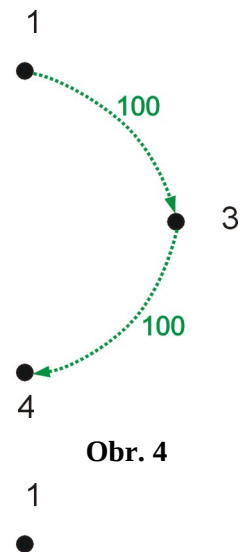
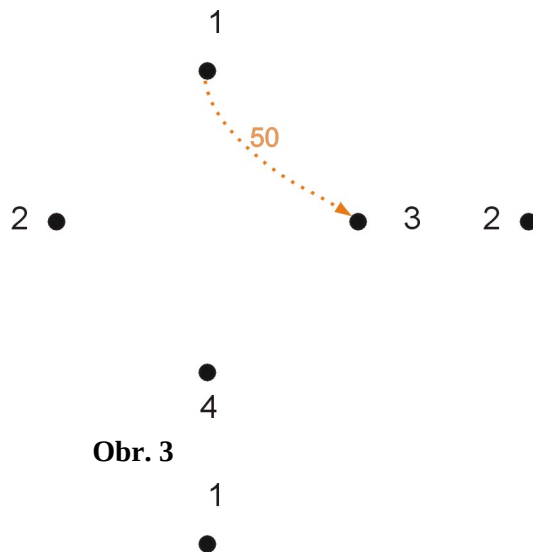
$$\begin{aligned} \sum_{(i,j)} \sum_{(v,w) \in E} x_{v,w}^{(i,j)} &= x_{1,3}^{(1,3)} + x_{3,1}^{(1,3)} + x_{2,3}^{(1,3)} + x_{3,2}^{(1,3)} + x_{3,4}^{(1,3)} + x_{4,3}^{(1,3)} + \\ &+ x_{3,2}^{(2,3)} + x_{3,2}^{(2,3)} + x_{1,3}^{(2,3)} + x_{3,1}^{(2,3)} + x_{3,4}^{(2,3)} + x_{4,3}^{(2,3)} + \\ &+ x_{3,2}^{(1,4)} + x_{3,2}^{(1,4)} + x_{3,1}^{(1,4)} + x_{1,3}^{(1,4)} + x_{3,4}^{(1,4)} + x_{4,3}^{(1,4)} + \\ &+ x_{3,2}^{(3,4)} + x_{2,3}^{(3,4)} + x_{3,1}^{(3,4)} + x_{1,3}^{(3,4)} + x_{3,4}^{(3,4)} + x_{4,3}^{(3,4)} + \\ &+ x_{3,2}^{(3,4)} + x_{2,3}^{(3,4)} + x_{3,1}^{(3,4)} + x_{1,3}^{(3,4)} + x_{3,4}^{(3,4)} + x_{4,3}^{(3,4)} \end{aligned}$$

je najmenšie.

Riešením pomocou programu Maple sú komodity : $x^{(1,3)}$ (Obr. 3) , $x^{(1,4)}$ (Obr. 4), $x^{(2,3)}$ (Obr. 5), $x^{(2,4)}$ (Obr. 6), $x^{(3,4)}$ (Obr. 7), pre ktoré je:

$$\begin{aligned} x_{1,3}^{(1,3)} &= 50, & x_{2,3}^{(2,3)} &= 50, & x_{1,3}^{(1,4)} &= 100, & x_{2,3}^{(2,4)} &= 110, & x_{3,4}^{(3,4)} &= 50, & x_{3,4}^{(3,4)} &, & x_{3,4}^{(1,4)} &= 100, \\ x_{3,4}^{(2,4)} &= 110. \end{aligned}$$

Riešenie je súhrne znázornené grafom podľa Obr. 8.



4. Príklad 2

Daný je graf dopravnej siete G maticou susednosti A a graf H požiadaviek na prepravu daný maticou susednosti B . Nech

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & 130 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určíme minimálny počet vozidiel (autobusov) s kapacitou $k=40$ osôb potrebných na pokrytie požiadaviek pre prepravu, a to riešením úlohy rovníc (2) metódou LP a metódou ILP. Výsledky porovnáme.

Riešenie:

Najskôr zostrojíme rovnice a nerovnice podmienok:

Rovnice (2a) majú tvar:

$$x_{2,1}^{(1,4)} + x_{2,3}^{(1,4)} - x_{1,2}^{(1,4)} - x_{1,3}^{(1,4)} = 0,$$

$$x_{3,1}^{(1,4)} + x_{3,2}^{(1,4)} + x_{3,4}^{(1,4)} - x_{1,3}^{(1,4)} - x_{2,3}^{(1,4)} - x_{4,3}^{(1,4)} = 0$$

$$x_{1,2}^{(2,4)} + x_{1,3}^{(2,4)} - x_{2,1}^{(2,4)} - x_{3,1}^{(2,4)} = 0$$

$$x_{3,1}^{(2,4)} + x_{3,2}^{(2,4)} + x_{3,4}^{(2,4)} - x_{1,3}^{(2,4)} - x_{2,3}^{(2,4)} - x_{4,3}^{(2,4)} = 0$$

Rovnice (2b) majú tvar:

$$x_{1,2}^{(1,4)} + x_{1,3}^{(1,4)} - x_{2,1}^{(1,4)} - x_{3,1}^{(1,4)} = 140$$

$$x_{2,1}^{(2,4)} + x_{2,3}^{(2,4)} - x_{1,2}^{(2,4)} - x_{3,2}^{(2,4)} = 130$$

Nerovnice (2c) majú tvar:

$$x_{2,1}^{(1,4)} - x_{2,1}^{(2,4)} - 40y_{2,1} \leq 0$$

$$x_{1,2}^{(1,4)} - x_{1,2}^{(2,4)} - 40y_{1,2} \leq 0$$

$$x_{1,3}^{(1,4)} - x_{1,3}^{(2,4)} - 40y_{1,3} \leq 0$$

$$x_{4,3}^{(1,4)} - x_{4,3}^{(2,4)} - 40y_{4,3} \leq 0$$

$$x_{3,1}^{(1,4)} - x_{3,1}^{(2,4)} - 40y_{3,1} \leq 0$$

$$x_{3,2}^{(1,4)} - x_{3,2}^{(2,4)} - 40y_{3,2} \leq 0$$

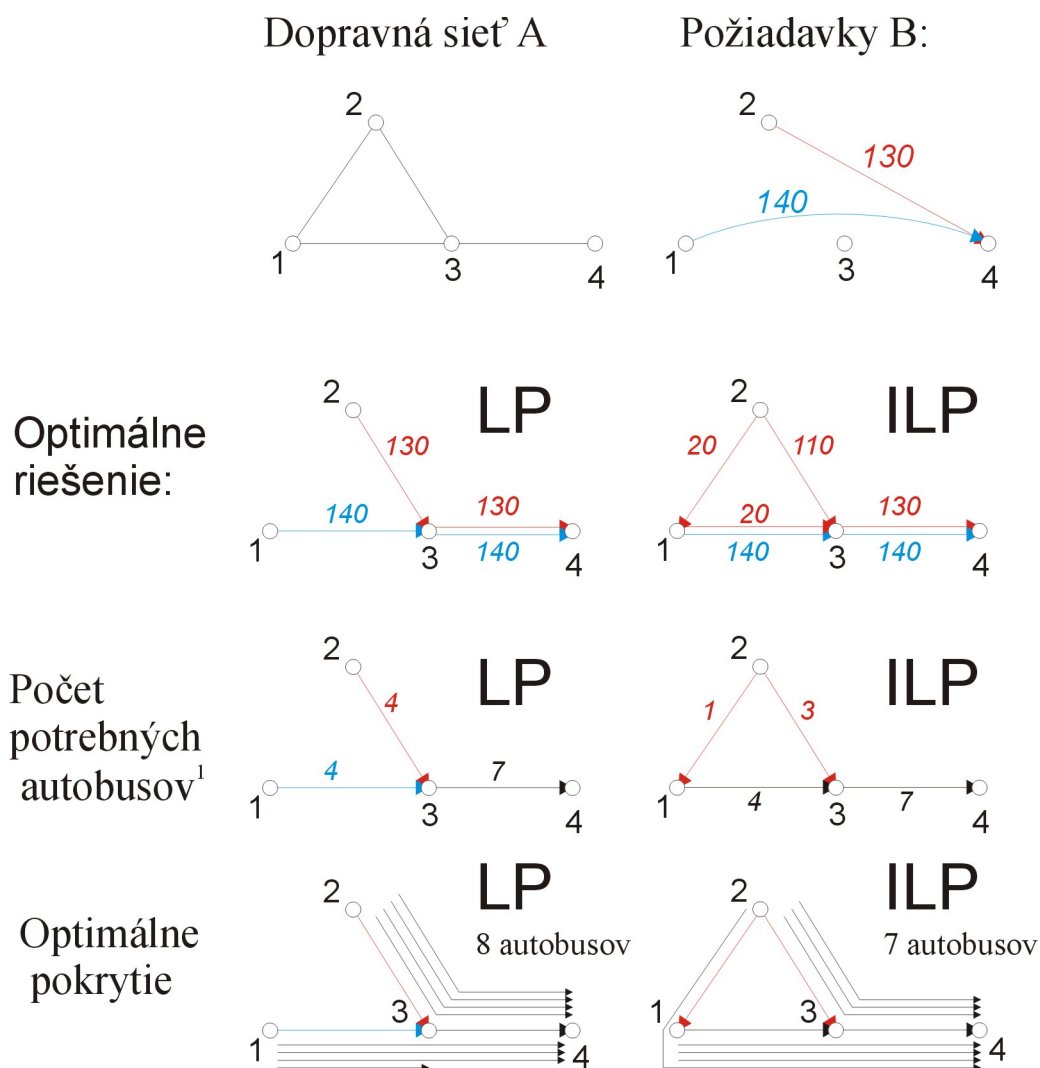
$$x_{2,3}^{(1,4)} - x_{2,3}^{(2,4)} - 40y_{2,3} \leq 0$$

$$x_{3,4}^{(1,4)} - x_{3,4}^{(2,4)} - 40y_{3,4} \leq 0$$

Účelová funkcia, ktorej minimum budeme hľadať má tvar:

$$F = 40y_{1,2} + 40y_{1,3} + 40y_{2,1} + 40y_{2,3} + 40y_{3,1} + 40y_{3,2} + 40y_{3,4} + 40y_{4,3}.$$

Výpočet pomocou programu Maple je znázornený na Obr. 9.



¹ kapacita autobusu -40 pasažierov

Obr. 9

5. Záver

Táto úloha je úlohou celočíselného lineárneho programovania. Z teórie optimalizácie je známe, že táto úloha je NP-ťažká. Ukážku správnosti formulovania optimalizácie sme uviedli na jednoduchšom príklade. V prípade väčšieho počtu uzlov grafu sa dá pomocou výpočtovej techniky hľadať riešenie, ktoré by bolo veľmi blízko optimálnemu riešeniu. Model optimalizácie, ktorý sme vypracovali, je flexibilný a pridanie dodatočných podmienok dáva nové výsledky, ktoré je možno posudzovať aj z hľadiska ďalších aspektov, napríklad s ekonomickými nákladmi na prepravu. Ďalšie možné zlepšovanie tohto modelu je v určovaní liniek, obmedzovaní kapacity jednotlivých liniek.

Literatúra

- [1] PALÚCH, S.: *Teória grafov*, Žilinská univerzita v Žiline, 2001, ISBN 80-7100-874-5
- [2] SUROVEC P.: *Tvorba systému mestskej hromadnej dopravy*, Žilinská univerzita v Žiline, 1999, 80-7100-586-X
- [3] SUROVEC P., STACHO M.: *Dopravná obsluha kraja prímestskou autobusovou dopravou* 4. medzinárodná konferencia o verejnej osobnej doprave , zborník prednášok, Bratislava, Dom techniky ZSVTS, 2000. -S. 23-30, ISBN 80-233-0458-5.
- [4] <http://www.gnu.org/software/glpk>
- [5] STACHO M, *Optimalizácia cestnej prímestskej osobnej dopravy*, Dizertačná práca, Žilinská univerzita v Žiline, 2006
- [6] SUROVEC, P. a kol: *Socio-ekonomické dáta v prognóze a modelovaní dopravy pri naplňaní ekonomickej funkcie regiónu*. Grantový projekt VEGA MŠ SR a SAV č. [1/0344/08](#), Žilinská univerzita v Žiline, FPEDAS, 2008