

KONFORMITA GAUSS-KRÜGEROVA ZOBRAZENÍ

Radek Hampl¹

Abstrakt:

Příspěvek se týká problematiky konformity Gauss-Krügerova zobrazení. Ukazuje se, že toto zobrazení není ve své reálné podobě konformní a lépe je ho zmiňovat jako blízko-konformní zobrazení. A to zejména z pohledu globálních aplikací jako jsou projekce drah družic na zemský povrch, mapy hvězdné oblohy, apod.

1. Stručný pohled do historie vzniku Gauss-Krügerova zobrazení

Autorem zobrazení je C. F. J. Gauss, německý matematik a kartograf. Matematické základy zobrazení položil v letech 1821 – 1825, nicméně své zobrazení „uklidil do šuplíku“, neboť ho považoval jen za matematickou hříčku. Pod jeho taktovkou bylo také roku 1844 dokončeno mapování hannoverského království právě v tomto zobrazení! V roce 1855 Gauss umírá a matematické základy jím odvozeného a pro mapování hannoverska použitého zobrazení si bere s sebou do hrobu.

A až teprve po téměř sto letech Prof. Krüger, v roce 1919, původní Gaussovo dílo po matematické stránce dále rozpracovává. Od té doby urazilo zobrazení dlouhou cestu a nyní ho využívá většina států západní Evropy a je oficiálním zobrazením (ve své modifikaci UTM) používaným pro konstrukci vojenských map členských států NATO.

2. Klasifikace Gauss-Krügerova zobrazení

Jedná se o zobrazení elipsoidu (což je aproximace zemského tělesa) do roviny (mapy). Je klasifikováno jako konformní, válcové, v transversální poloze. O transversalitě zobrazení není sporu (osa „válce“ – viz. níže – je kolmá na osu rotace elipsoidu a leží zároveň v rovině rovníku). Klasifikace zobrazení coby válcového může však být diskutována. Příčným řezem plochy, na kterou zobrazujeme a kterou pak rozvineme do roviny, není kružnice, ale elipsa (je jím základní poledník zobrazení). Nicméně Hojovec a Buchar ve svém článku ukázali, že toto zobrazení dává stejné výsledky, jako když zobrazíme konformně elipsoid na kulovou plochu a tu pak opět konformně (přes válcovou plochu) do roviny. Z tohoto pohledu lze na zobrazení nahlížet jako na válcové.

V následujících odstavcích mého článku se budu ale věnovat problému konformity zobrazení. K tomuto účelu je ale třeba nahlédnout jednak samotný důkaz konformity Gauss-Krügerova zobrazení a pak také způsob odvození zobrazovacích rovnic.

3. Izometrické souřadnice na elipsoidu

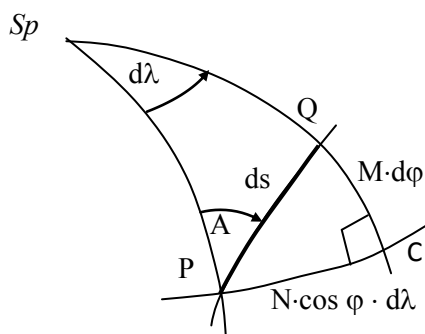
Při odvození zobrazovacích rovnic a také při provádění důkazu konformity studovaného zobrazení je vhodné zavést na elipsoidu tzv. izometrické souřadnice.

Obecně jsou izometrickými souřadnicemi α, β na libovolné ploše takové souřadnice, kterými lze délkový element ds geodetické čáry napsat ve tvaru:

$$ds^2 = f(\alpha, \beta) \cdot (d\alpha^2 + d\beta^2), \quad (1)$$

¹ VOŠ a SPŠ Varnsdorf, Mariánská 1100, 40747, Varnsdorf

kde funkce f je dána plochou (např. pro rovinu je $f(\alpha, \beta) = I$). Izometrické souřadnice na dané ploše vytvářejí čtvercovou síť.



Obrázek 1

Obrázek 1 ukazuje geometrii situace na elipsoidu. Zeměpisné souřadnice φ, λ nejsou izometrické, protože na rotačním elipsoidu, vzhledem ke sbíhavosti poledníků, netvoří čtvercovou síť. A při položení $d\varphi = d\lambda$ vytváří elementární přírůstky zeměpisných souřadnic diferenciální lichoběžník. Pro délkový element ds geodetické čáry pak platí:

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi \cdot d\lambda^2 \quad (2)$$

Dále vytknutím $N^2 \cdot \cos^2 \varphi$ a zavedením

$$dq^2 = \frac{M^2}{N^2 \cos^2 \varphi} d\varphi^2 \quad (3)$$

pak dostáváme pro délkový element ds geodetické čáry výraz:

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + d\lambda^2) \quad (4)$$

Souřadnice q, λ jsou na rotačním elipsoidu souřadnicemi izometrickými a tvoří čtvercovou síť. Položíme-li $dq = d\lambda$, tvoří diferenciály elementární čtverec. Vzorec pro izometrickou šířku q odvodíme pomocí integrace (3).

4. Obecné tvary zobrazovacích rovnic

Pro další odvození je třeba poznamenat obecné tvary zobrazovacích rovnic Gauss-Krügerova zobrazení. Ve své teorii konformních zobrazení Gauss ukázal, že pokud využijeme pro odvození vztahu mezi souřadnicemi φ, λ na rotačním elipsoidu a rovinnými souřadnicemi X, Y jeden z následujících vzorců

$$\begin{aligned} X + iY &= f(q + i\lambda) & X + iY &= f(q - i\lambda) \\ X - iY &= g(q - i\lambda) & X - iY &= g(q + i\lambda) \end{aligned} \quad (5a, 5b)$$

pak jde skutečně o konformní zobrazení! Je třeba poznamenat, že souřadnice q, λ jsou izometrické (viz. kapitola 3) a sama izometrická šířka q je funkcí šířky zeměpisné.

Funkce f a g jsou libovolné funkce definované dalšími podmínkami kladenými na zobrazení, konkrétně pro to Gauss-Krügerovo jde o nezkreslený základní (tečný) poledník.

Důkaz konformity je v nástinu proveden v kapitole 5 tohoto příspěvku.

5. Důkaz konformity zobrazení

Vzorce (4) užijeme také pro důkaz konformity Gauss-Krügerova zobrazení. Délkové zkreslení je v zobrazení dáno poměrem délkového elementu geodetické čáry v rovině mapy a na rotačním elipsoidu:

$$m^2 = \frac{dS_{E_2}^2}{dS_{elipsoid}^2} = \frac{dX^2 + dY^2}{N^2 \cos^2 \varphi (dq^2 + d\lambda^2)} \quad (6)$$

S využitím vlastností komplexně sdružených čísel rozložíme součty čtverců v čitateli i jmenovateli následujícím způsobem:

$$m^2 = \frac{(dX + idY)(dX - idY)}{N^2 \cos^2 \varphi (dq + id\lambda)(dq - id\lambda)} \quad (7)$$

Diferencováním prvního ze vzorců (5a) a druhého ze vzorců (5b) dostáváme

$$\begin{aligned} dX + idY &= f'(q + i\lambda)(dq + id\lambda) \\ dX - idY &= g'(q - i\lambda)(dq - id\lambda) \end{aligned} \quad (8a, 8b)$$

Dosazením (8a), (8b) do (7) a po krácení a jednoduchých úpravách dostáváme:

$$m^2 = \frac{f'(q + i\lambda) \cdot g'(q - i\lambda)}{N^2 \cos^2 \varphi}, \quad (9)$$

kde N je příčný poloměr křivosti a q, λ jsou izometrické souřadnice.

Z obrázku 1 je však zřejmé, že pokud by délkové zkreslení záviselo také na azimutu A , musely by se ve vzorcí (9) vyskytovat i podíly $d\lambda / dq$ nebo $d\lambda / d\varphi$ a nebo dY/dX .

Tyto podíly se však v (9) nevyskytují. Délkové zkreslení je tak funkcí pouze zeměpisných souřadnic zobrazovaného bodu.

Tím je však důkaz konformity Gauss-Krügerova zobrazení proveden.

6. Zobrazovací rovnice

Vyjdeme z prvního vzorce (5a). Hodnota λ je zde redukovaná zeměpisná délka zobrazovaného bodu P_i na zeměpisnou délku λ_0 základního poledníku, tj. $\lambda = \lambda_i - \lambda_0$. Je proto mnohem menší než izometrická šířka q . To nám dovoluje zmíněný výraz ze vzorců (5a) rozvést v Taylorovu řadu:

$$X + iY = f(q) + \frac{\partial f(q)}{\partial q} \cdot i \cdot \lambda + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q^2} \cdot i^2 \cdot \lambda^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f(q)}{\partial q^3} \cdot i^3 \cdot \lambda^3 + \dots \quad (10)$$

A při označení parciálních derivací funkce $f(q)$ symboly postupně $f'(q), f''(q), \dots$ se zápis (10) zjednoduší:

$$X + iY = f(q) + f'(q) \cdot i \cdot \lambda + \frac{1}{2!} f''(q) \cdot i^2 \cdot \lambda^2 + \frac{1}{3!} f'''(q) \cdot i^3 \cdot \lambda^3 + \dots \quad (11)$$

Nyní je třeba definovat funkci $f(q)$. Klademe na zobrazení požadavek délkově nezkresleného základního poledníku. To znamená, že všechny body na tomto poledníku musí mít rovinné souřadnice: $X = f(q) = B \int_0^q M \cdot d\varphi$, $Y = 0$ (souřadná soustava je zavedena takto: osou X je délkově nezkreslený obraz základního poledníku a hodnoty souřadnic rostou směrem k severu, osou Y je obraz rovníku a hodnoty rostou směrem východním).

Zbývá určit derivace funkce $f(q)$. Jejich výpočet je zdlouhavý a proto se jím nyní zabývat nebudu. Výsledné tvary zobrazovacích rovnic Gauss-Krügerova zobrazení jsou pak následující:

$$\begin{aligned} X = B + \frac{1}{2!} \cdot \lambda^2 \cdot N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \\ + \frac{1}{4!} \cdot \lambda^4 \cdot N \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot (5 - \tan^2 \varphi + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \\ + \frac{1}{6!} \cdot \lambda^6 \cdot N \cdot \cos^5 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot (61 - 58 \tan^2 \varphi + \tan^4 \varphi + 270\eta^2 - 330\eta^2 \tan^2 \varphi) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = \lambda \cdot N \cdot \cos \varphi + \\ + \frac{1}{3!} \cdot \lambda^3 \cdot N \cdot \cos^3 \varphi \cdot (1 - \tan^2 \varphi + \eta^2) + \\ + \frac{1}{5!} \cdot \lambda^5 \cdot N \cdot \cos^5 \varphi \cdot (5 - 18 \tan^2 \varphi + \tan^4 \varphi + 14\eta^2 - 58\eta^2 \tan^2 \varphi) + \dots \end{aligned} \quad (12a, b)$$

7. Délkové zkreslení

Označme nyní formálně: $X = f(\varphi, \lambda)$ a $Y = g(\varphi, \lambda)$. Tyto rovnice diferencujeme a při označení $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = f_\varphi$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = f_\lambda$, $\frac{\partial g}{\partial \varphi} = g_\varphi$, $\frac{\partial g}{\partial \lambda} = g_\lambda$ dostáváme:

$$dX = \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda = f_\varphi \cdot d\varphi + f_\lambda \cdot d\lambda \quad (13a)$$

$$dY = \frac{\partial g}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial g}{\partial \lambda} d\lambda = g_\varphi \cdot d\varphi + g_\lambda \cdot d\lambda \quad (13b)$$

Rovnosti (13a), (13b) dosadíme do (6) a po následných úpravách dostáváme pro délkové zkreslení ve směru azimutu A vzorec:

$$m_A^2 = \frac{(f_\varphi^2 + g_\varphi^2)}{M^2} \cdot \cos^2 A + \frac{(f_\lambda^2 + g_\lambda^2)}{N^2 \cos^2 \varphi} \cdot \sin^2 A + 2 \cdot \frac{(g_\varphi g_\lambda + f_\varphi f_\lambda)}{MN \cos \varphi} \cdot \cos A \cdot \sin A \quad (14)$$

Volme postupně $A = 0^\circ$ pro zkreslení délek ve směru poledníků (kdy je $\sin A = 0$, $\cos A = 1$) a pak první zlomek ve vzorci (14) označme m_p^2 , potom zvolme $A = 90^\circ$ pro zkreslení délek ve směru rovnoběžek (kdy platí $\sin A = 1$, $\cos A = 0$) a druhý zlomek vzorce (14) označme m_r^2 . Třetí zlomek vzorce (14) představuje tzv. parametr. Platí tedy tyto tři rovnosti:

$$m_p^2 = \frac{(f_\varphi^2 + g_\varphi^2)}{M^2} \quad m_r^2 = \frac{(f_\lambda^2 + g_\lambda^2)}{N^2 \cos^2 \varphi} \quad p = \frac{(g_\varphi g_\lambda + f_\varphi f_\lambda)}{MN \cos \varphi} \quad (15)$$

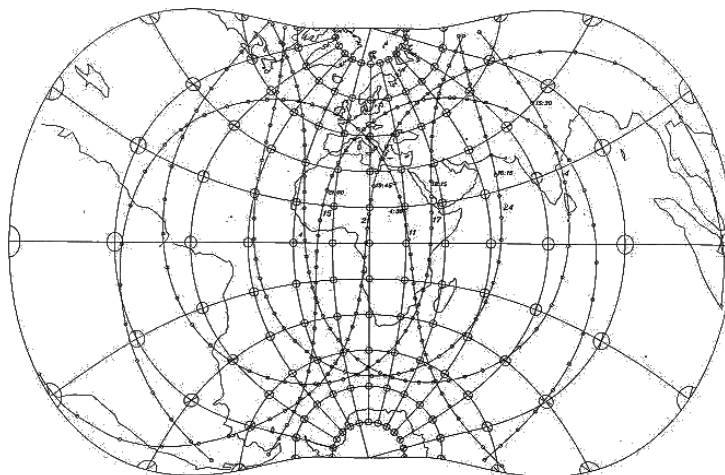
Pro čistě konformní zobrazení platí, že délkové zkreslení ve směru poledníků je rovno délkovému zkreslení ve směru rovnoběžek a zároveň parametr p má nulovou hodnotu. Tyto rovnosti lze zapsat podmínkou

$$m_p = m_r \wedge p = 0 \quad (16)$$

Pro výpočet délkového zkreslení se tedy užívá jen vzorce pro m_r . Derivace zobrazovacích rovnic podle proměnné λ jsou výrazně jednodušší!

8. Je Gauss-Krügerovo zobrazení skutečně konformní?

Abychom na tuto otázku našli odpověď, je třeba se nejprve podívat na zobrazovací rovnice. Ty jsou dány vzorci (12). Tvoří je nekonečné řady a prakticky se používají pouze maximálně první tři členy (nepočítaje člen absolutní).



Obrázek 2

Vzhledem k aplikacím, ke kterým se toto zobrazení používá, je zcela relevantní testovat konformitu tohoto zobrazení. Kromě konstrukce map v poledníkových pásích o šíři 3° a 6° se Gauss-Krügerova zobrazení užívá i k projekci drah družic na zemský povrch (obrázek 2) nebo ke konstrukci map hvězdné oblohy.

V těchto aplikacích se šířka zobrazovaného pásu pohybuje v desítkách stupňů a v případě projekce drah družic na zemský povrch může překročit i 100° . Je tedy jasné,

že proklamovaná konformita zobrazení v tom tvaru, ve kterém se reálně používá, bude vážně pokulhávat za skutečností!

9. Délkové zkreslení ještě jednou a míry nekonformity zobrazení

Chceme-li tedy analyzovat konformitu zkoumaného zobrazení, je třeba jej nyní považovat za nekonformní. Pak je třeba definovat hodnoty, kterými bude možné vyjádřit míru nekonformity zobrazení.

9.1. Tissotova indikatrix a hlavní paprsky zkreslení

Jako vhodné se nám mohou zdát právě hodnoty délkového zkreslení m_p a m_r ve směrech poledníků a rovnoběžek, které mají být v případě konformity shodné. Musíme si ale uvědomit, že u nekonformních zobrazení se obrazy poledníků a rovnoběžek nezobrazí jako na sebe kolmé čáry!

Délkové zkreslení závisí u nekonformních zobrazení na azimutu a tak hodnoty délkového zkreslení vytvoří kolem zobrazovaného bodu elipsu zkreslení, nazývanou Tissotova indikatrix. Veličiny m_p a m_r (na rotačním elipsoidu na sebe kolmé) budou jen sdruženými průměry elipsy délkového zkreslení! Nebudou ale extrémními hodnotami délkového zkreslení.

Proto se vhodnějšími veličinami pro testování konformity zobrazení jeví hlavní paprsky a , b Tissotovy indikatrix, které tvoří její hlavní a vedlejší poloosu a představují tak maximální a minimální hodnoty délkového zkreslení. U konformních zobrazení platí i pro tyto veličiny rovnost, tedy $a = b$.

Hlavní paprsky Tissotovy indikatrix vypočteme ze vzorce (14). Ten vyjadřuje závislost délkového zkreslení na azimutu. Hledáme tedy jeho extrémální hodnotu. Při zavedení substitucí (15) přejde tvar rovnice (14) na jednodušší vyjádření:

$$m_A^2 = m_p^2 \cdot \cos^2 A + m_r^2 \cdot \sin^2 A + 2 \cdot p \cdot \cos A \cdot \sin A \quad (17)$$

Pro určení extrémů délkového zkreslení musí být splněna podmínka $dm_A / dA = 0$. Protože ale platí: $\frac{dm_A^2}{dA} = 2m_A \frac{dm_A}{dA}$, je postačující podmínkou pro existenci extrému $dm_A^2 / dA = 0$. Po provedení naznačených derivací a řešení rovnice pro určení extrémů délkového zkreslení dostáváme vzorec pro výpočet azimutů maximálního a minimálního délkového zkreslení:

$$\tan 2A = \frac{2p}{m_p^2 - m_r^2} \quad (18)$$

Dosadíme hodnoty azimutů – vzhledem k dvojznačnosti tangenty jsou dva a jsou na sebe kolmé! – z (18) do (17) a dostáváme hodnoty hlavních paprsků a , b Tissotovy indikatrix.

V těchto výpočtech je třeba derivovat zobrazovací rovnice i podle proměnné φ (viz. vzorce (15) pro délkové zkreslení ve směru poledníků m_p a parametr p). To je velmi obtížné a i za použití výpočetní techniky, která je schopna symbolického derivování, jsou výsledky vyjádřeny poměrně dlouhými zápisy.

Proto jsem odvodil nový tvar zobrazovacích rovnic (vycházel jsem při odvození ze vzorců (12)). Ten je vzhledem k derivacím podle proměnných λ i φ výhodnější. Odvození je zdlouhavé a není zde na něj místo. Uvedu tedy pouze výsledné vzorce:

$$X = B + \frac{360 \cdot \lambda^2 - 30 \cdot \lambda^4 + \lambda^6}{720} \cdot N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \frac{180 \cdot \lambda^4 - 60 \cdot \lambda^6}{720} \cdot N \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi + \\ + \frac{270 \cdot e^2 \cdot \lambda^4 + 120 \cdot \lambda^6 - 450 \cdot \lambda^6 \cdot e^2}{720 \cdot (1 - e^2)} \cdot N \cdot \cos^5 \varphi \cdot \sin \varphi + \\ + \frac{120 \cdot e^4 \cdot \lambda^4 + 600 \cdot e^2 \cdot \lambda^6 - 600 \cdot \lambda^6 \cdot e^4}{720 \cdot (1 - e^2)} \cdot N \cdot \cos^7 \varphi \cdot \sin \varphi + \dots$$

$$Y = \frac{120 \cdot \lambda - 20 \cdot \lambda^3 + \lambda^5}{120} \cdot N \cdot \cos \varphi + \frac{40 \cdot \lambda^3 - 20 \cdot \lambda^5}{120} \cdot N \cdot \cos^3 \varphi + \\ + \frac{24 \cdot \lambda^5 + 20 \cdot \lambda^3 \cdot e^2 - 82 \cdot \lambda^5 \cdot e^2}{120 \cdot (1 - e^2)} \cdot N \cdot \cos^5 \varphi + \frac{72 \cdot \lambda^5 \cdot e^2}{120 \cdot (1 - e^2)} \cdot N \cdot \cos^7 \varphi + \dots \quad (19a, b)$$

9.2. Maximální úhlové zkreslení, úhel mezi obrazy poledníků a rovnoběžek

Další vhodnou veličinou pro test konformity je maximální úhlové zkreslení. Již bez nástinu odvození:

$$\sin\left(\frac{1}{2} \Delta \omega_{\max}\right) = \frac{|b - a|}{b + a} \quad (20)$$

Pokud je zobrazení konformní, je hodnota $\Delta \omega$ nulová (vzhledem k čitateli zlomku).

Kromě toho ještě můžeme použít jako ukazatel konformity (či nekonformity) zobrazení i úhel ϑ mezi obrazy poledníků a rovnoběžek. Ten je dán vzorcem:

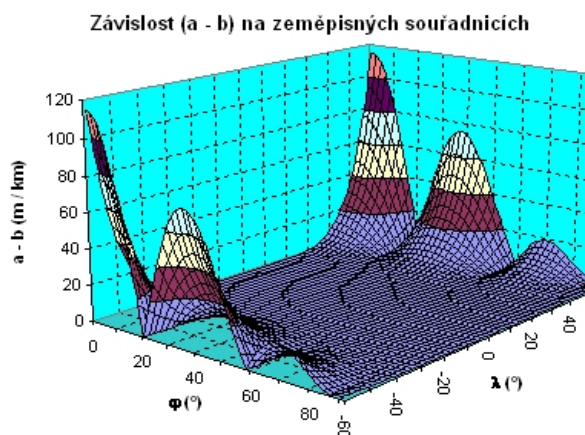
$$\tan \vartheta = \frac{f_\lambda \cdot g_\varphi - f_\varphi \cdot g_\lambda}{f_\varphi \cdot f_\lambda + g_\varphi \cdot g_\lambda} \quad (21)$$

Platí $\vartheta = 90^\circ$ pro konformní zobrazení a $\vartheta \neq 90^\circ$ pro zobrazení nekonformní.

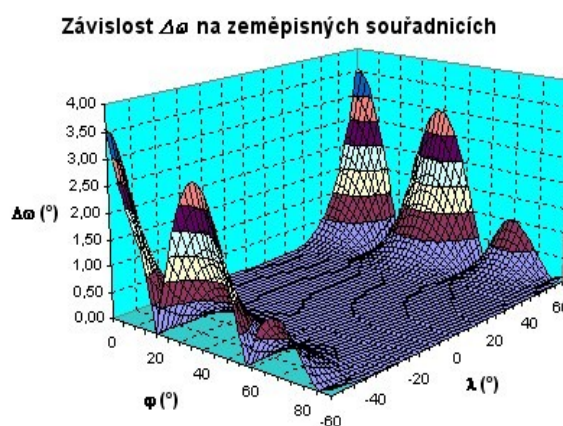
10. Stručné výsledky výpočtů a závěr

Graf 1 ukazuje závislost rozdílu $(a - b)$ velikostí hlavní poloosy a a vedlejší poloosy b Tissotovy indikatrix na zeměpisných souřadnicích. Jeho „vlnový“ charakter je způsoben přítomností funkcí $\sin$ a $\cos$ v zobrazovacích rovnicích a tím pak přeneseně i v jejich derivacích. A kromě toho také tím, že ve výpočtech uvažujeme jen prvních několik málo členů v řadách zobrazovacích rovnic!

Hodnoty rozdílu $(a - b)$ pro tento případ dosahují ve svém maximu $115 \text{ m} / \text{km}$! Připomínám, že v případě konformity by musel tento rozdíl nabývat stále nulové hodnoty! Graf je sestaven opět pro poledníkový pás o šíři 120° a pro severní polokouli. Pro úplnost, na rovníku dosahuje hlavní paprsek a elipsy zkreslení své maximální hodnoty přes 900 m/km ! Směrem k pólu (v tomto případě severnímu) se její hodnota



Graf 1



Graf 2

zmenšuje. Stejně tak i směrem k základnímu poledníku. Velikost vedlejší poloosy b Tissotovy indikatrix na rovníku dosahuje cca 800 m/km !

Pro pás o šíři 6° dosahují hodnoty rozdílu $(a - b)$ v maximu $0,002 \text{ mm/km}$, což je skutečně zanedbatelná hodnota vzhledem ke grafické přesnosti mapových děl, ale stále to NENÍ hodnota nulová!

Graf 2 je velmi zajímavý. Ukazuje hodnoty $\Delta\omega$ maximálního úhlového zkreslení v závislosti na zeměpisných souřadnicích. Pro pás o šíři 120° a severní polokouli dosahuje jeho velikost více než $3,5^\circ$! Vzhledem ke vzorci (20), kterým je dáno maximální úhlové zkreslení, nepřekvapí, že je průběh grafu velmi podobný grafu 1.

Pro pás široký 30° je hodnota maximálního úhlového zkreslení již jen přibližně $5,5''$ a pro pás o šíři 6° hodnoty $\Delta\omega$ jen mírně překračují $0,0004''$!

Je tedy naprosto zřejmé, že vliv nekonformity Gauss-Krügerova zobrazení, plynoucí ze zanedbání členů vyšších řádů v zobrazovacích rovnicích, rapidně s rostoucí vzdáleností od základního poledníku narůstá!

To je důležité zejména z pohledu globálních aplikací, kde úhlové zkreslení v kombinaci s enormním délkovým zkreslením způsobuje velké potíže při orientaci v geografických konturách.

Vzhledem k výše uvedenému navrhuji, aby bylo Gauss-Krügerovo zobrazení překlasifikováno na válcové, transversální a **blízko-konformní** a nebo **asymptoticky konformní**. Tato klasifikace lépe vystihuje jeho teoretickou konformitu zároveň s tím, že v praktických aplikacích toto zobrazení konformní není!

11. Použitá literatura

- [1] BUCHAR, P., HOJOVEC, V.: *Matematická kartografie 10*, ČVUT, Praha, 1996
- [2] HOJOVEC, V. a kol.: *Kartografie*, GKP, Praha, 1987
- [3] JARNÍK, V.: *Úvod do počtu diferenciálního I, II*, Academia, Praha, 1984
- [4] JARNÍK, V.: *Integrální počet I, II*, Academia, Praha, 1984
- [5] SNYDER, J. P., VOXLAND, P. M.: *An Album Of Map Projections, Professional Paper 1453*, U.S. Geological Survey, Denver, 1989
- [6] BARTOŠEK, Z.: *Zobrazení drah družic GPS*, diplomová práce, FSv, ČVUT v Praze, Praha 2003
- [7] HOJOVEC, V., BUCHAR, P.: K pojetí Gaussova zobrazení poledníkových pásů elipsoidu, *Geodetický a kartografický obzor*, 30/72, 1984, č. 8