

APLIKÁCIA POZNATKOV ZÁKLADNÉHO KURZU MATEMATIKY PRI RIEŠENÍ ÚLOH V MECHANIKE TUHÝCH TELIES

Eva Labašová¹⁾, Jaroslava Trubenová²⁾

Abstrakt

Dôležitou súčasťou riešenia úloh a problémov v mechanike tuhých telies (statika, kinematika, dynamika) je vytvorenie mechanického modelu. Na základe mechanického modelu je vytvorený model matematický, ktorý formou matematických vzťahov a rovníc popisuje jeho správanie. Príspevok poukazuje na dôležitosť poznania širokej škály matematického aparátu pre študentov technických univerzít. Konkrétne je príspevok zameraný na aplikáciu poznatkov diferenciálneho počtu reálnej funkcie jednej reálnej premennej a základných poznatkov vektorovej analýzy.

1. Úvod

Kinematika, ktorá je na MtF STU súčasťou predmetu Mechanika tuhých telies (s rozsahom 2/2, druhý ročník, zimný semester), sa zaoberá mechanickým pohybom bodov, telies a sústav telies. Poloha bodu v každom časovom okamihu je jednoznačne daná polohovým vektorom vzhľadom na začiatok zvoleného súradnicového systému, čiže vektorovou funkciou závislou od času.

Predmet Matematika I sa na MtF STU vyučuje v rozsahu 3/3 v prvom ročníku v zimnom semestri. Obsahom tohto predmetu je diferenciálny a integrálny počet reálnej funkcie jednej reálnej premennej. Základy vektorového počtu sa vyučujú v predmete Matematika II (rozsah 3/3) v letnom semestri prvého ročníka. Predmet Lineárna algebra, ktorý sa vyučuje v zimnom semestri druhého ročníka obsahuje aj časť zaoberajúcu sa teóriou vektorov [1,2,3]. Absolvovaním týchto predmetov študenti získajú vedomosti a zručnosti pre počítanie s vektorovou funkciou, ktoré sú potrebné pre určenie požadovaných kinematických veličín.

Najdôležitejším problémom v kinematike je zostavenie pohybových rovníc v parametrickom tvare alebo formou spomínanej vektorovej funkcie. Potom už na základe poznania vzťahov a matematických poznatkov je možné určiť všetky kinematické veličiny.

2. Určenie kinematických veličín pohybu bodu v rovine

Na základe vyučovacích cieľov predmetu Mechanika tuhých telies by študenti mali vedieť okrem iného vyjadriť kinematické veličiny základných rovinných pohybov.

Pri riešení sústav telies (mechanizmov) si musia študenti uvedomiť pohyb jednotlivých členov mechanizmu a následne zostaviť parametrické rovnice pohybu jeho ľubovoľného bodu [4]. Tieto rovnice sú pre rôzne body mechanizmu rôzne. Pre určenie ostatných kinematických veličín platia však rovnaké vzťahy.

V rámci cvičení sa tieto úlohy riešia len analyticky. Dôležité je najmä osvojenie si základných technických súvislostí a postupov, rozvoj technického myslenia. Ucelené

¹⁾ Katedra aplikovanej mechaniky, ÚVSM MtF STU Trnava, Pavlínska 16, 917 24 Trnava, SR, email: eva.labasova@stuba.sk

²⁾ Katedra aplikovanej matematiky, FPV UCM Trnava, Námestie Jozefa Herdu 2, 917 01 Trnava, SR, email: jaroslava.trubenova@ucm.sk

riešenie úlohy vyžaduje od študentov veľmi dobre osvojené matematické poznatky a schopnosti ich aplikácie v riešení konkrétneho technického problému.

V tejto kapitole je ukázaný princíp riešenia jedného zo zadaní (tab.1), ktoré študenti dostávajú k riešeniu v rámci samostatnej práce. Pri riešení danej úlohy si študenti majú osvojiť najmä spôsob a pravidlá riešenia konkrétnej úlohy a uvedomiť si nutnosť matematických poznatkov nadobudnutých predchádzajúcim štúdiom.

Tabuľka 1

Pre zadané rovnice pohybu bodu M v súradnicovom systéme $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ určte: • kinematické veličiny $\vec{v}$, v, $\vec{a}$, a, a_t, a_n ako funkcie času t, • polomer krivosti trajektórie R_0 bodu M, • jednotkový tangenciálny vektor $\vec{\tau}$	$x(t) = k \cos t$ $y(t) = b \cos t$ k, b sú kladné konštanty t je čas
--	--

Doporučujeme študentom riešiť tieto zadania bez použitia PC. Samozrejme každý si riešenie môže skontrolovať prostredníctvom rôznych matematických programov. Software Mathematica [5] je jedným z nich a je určený na uľahčenie aplikácií matematiky.

Nasledujúca tabuľka (tab. 2) obsahuje základné vzťahy a tým aj nevyhnutné matematické operácie pre riešenie danej úlohy.

Tabuľka 2

• polohový vektor: $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ • vektor rýchlosti a jeho zložky: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ • vektor zrýchlenia a jeho zložky $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ • veľkosť tangenciálneho zrýchlenia $a_t = \dot{s} = \dot{v}$ • veľkosť polomeru krivosti dráhy $a_n = \frac{v^2}{R_0} \Rightarrow R_0 = \frac{v^2}{a_n}$	• veľkosť vektora rýchlosti: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \dot{s}$ • veľkosť vektora zrýchlenia $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ • veľkosť normálového zrýchlenia $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ • jednotkový tangenciálny vektor $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{v}}{v}$
---	--

Tabuľka 3 obsahuje zápis príkazov a výpis výsledkov (vpravo) získaných programom Mathematica.

Tabuľka 3

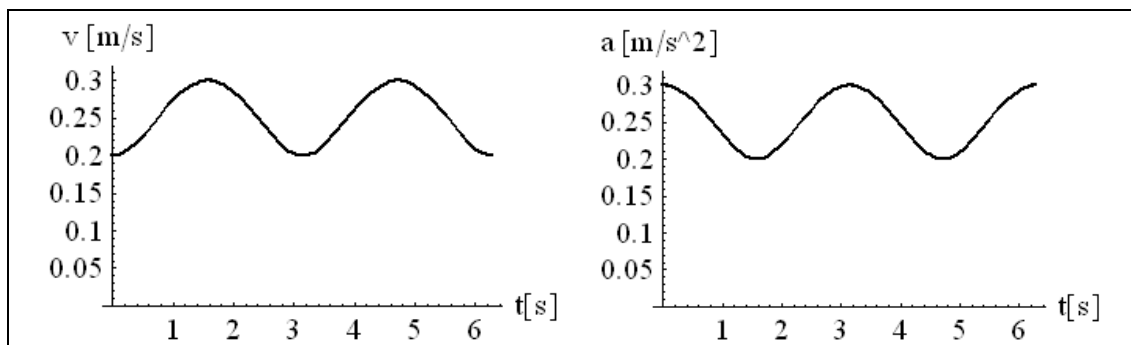
<i>rovnice pohybu - zadanie</i>	
$x[t_]:=k*\text{Cos}[t]$	
$y[t_]:=b*\text{Sin}[t]$	
<i>zápis polohového vektora</i>	
$pv=\{x[t],y[t]\}$	$\{k \text{ Cos } [t], b\text{Sin } [t]\}$
<i>veľkosti zložiek vektora rýchlosti vx[t], vy[t] a veľkosť vektora rýchlosti v[t]</i>	
$vx[t_]=D[x[t],t]$	$-k \text{ Sin } [t]$
$vy[t_]=D[y[t],t]$	$b \text{ Cos } [t]$
$v[t_]=\text{Sqrt}[vx[t]^2+vy[t]^2]$	$\sqrt{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}$
<i>zápis vektora rýchlosti</i>	
$vv=\{vx[t],vy[t]\}$	$\{-k \text{ Sin } [t], b\text{Cos } [t]\}$
<i>veľkosti zložiek vektora zrýchlenia ax[t], ay[t] a veľkosť vektora zrýchlenia a[t]</i>	
$ax[t_]=D[vx[t],t]$	$-k \text{ Cos } [t]$
$ay[t_]=D[vy[t],t]$	$-b \text{ Sin } [t]$
$a[t_]=\text{Sqrt}[ax[t]^2+ay[t]^2]$	$\sqrt{k^2\text{Cos}^2[t]+b^2\text{Sin}^2[t]}$
<i>zápis vektora zrýchlenia</i>	
$va=\{ax[t],ay[t]\}$	$\{-k \text{ Cos } [t], -b\text{Sin } [t]\}$
<i>veľkosť tangenciálneho a normálového zrýchlenia</i>	
$at[t_]=D[v[t],t]$	$\frac{1}{2} \frac{2k^2\text{Cos}[t] \text{Sin}[t] - 2b^2\text{Cos}[t] \text{Sin}[t]}{\sqrt{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}}$
$an[t_]=\text{Sqrt}[(a[t])^2-(at[t])^2]$	$\sqrt{k^2\text{Cos}^2[t]+b^2\text{Sin}^2[t]} - \frac{1}{4} \frac{(2k^2\text{Cos}[t] \text{Sin}[t] - 2b^2\text{Cos}[t] \text{Sin}[t])^2}{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}$
<i>veľkosť polomeru krivosti dráhy v závislosti na čase</i>	
$R0[t_]=v[t]^2/an[t]$	$\frac{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}{\sqrt{k^2\text{Cos}^2[t]+b^2\text{Sin}^2[t]} - \frac{(2k^2\text{Cos}[t] \text{Sin}[t] - 2b^2\text{Cos}[t] \text{Sin}[t])^2}{4(b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t])}}$
<i>zápis jednotkového tangenciálneho vektora</i>	
$jtv\{vx[t_]/v[t],vy[t_]/v[t]\}$	$\left\{ -\frac{k \text{ Sin}[t]}{\sqrt{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}}, \frac{b \text{ Cos}[t]}{\sqrt{b^2\text{Cos}^2[t]+k^2\text{Sin}^2[t]}} \right\}$

Zmenou rovníc pohybu v základnom súbore ($x[t]$, $y[t]$), prípadne zmenou konštánt k , b možno podľa daného súboru príkazov určiť všetky kinematické veličiny. Ďalej z hľadiska názornosti je možné zostrojiť grafické závislosti kinematických veličín (veľkosti rýchlosti a veľkosti zrýchlenia) od času. V tom prípade je však potrebné zadať konkrétne číselné hodnoty všetkých konštánt.

3. Zostrojenie grafov rýchlost' – čas a ich analýza

V tabuľke 4 sú uvedené grafy pre predchádzajúcu úlohu, pričom konštanty k , b sú dané nasledovne: $k = 0,3$ m; $b = 0,2$ m, ide o pohyb bodu po elipse.

Tabuľka 4



Zmenou konštant, napr: $k = b = 0,1$ m (pohyb bodu po kružnici) získame nasledovné grafy pre veľkosť rýchlosti a zrýchlenia (tab 5). Veľkosť rýchlosti v je konštantná.

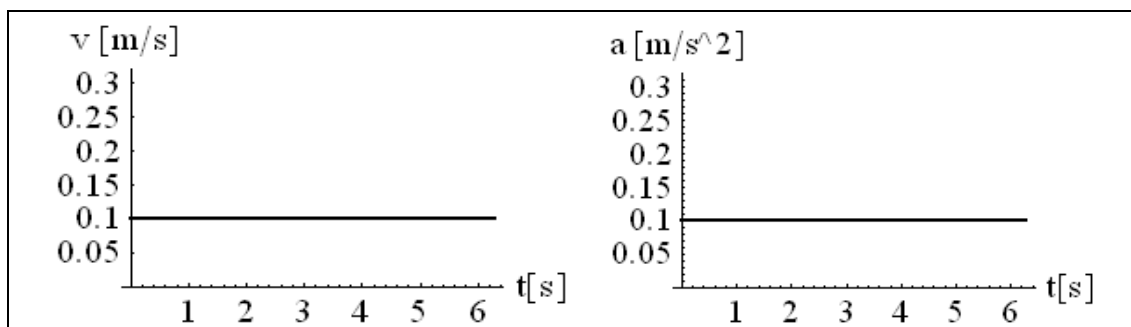
$$v = \sqrt{k^2 \sin^2[t] + k^2 \cos^2[t]} = k \quad [\text{m s}^{-1}] \quad (1)$$

Veľkosť tangenciálneho zrýchlenia a_t je nulová (tangenciálne zrýchlenie vyjadruje zmenu veľkosti rýchlosti). Normálové zrýchlenie vyjadruje zmenu smeru vektora rýchlosti. Pri pohybe bodu po krivke sa smer vektora rýchlosti mení a preto aj keď veľkosť rýchlosti je konštantná vzniká pri pohybe bodu po krivke normálové zrýchlenie a_n .

$$a_t = \dot{v} = 0 \quad (2)$$

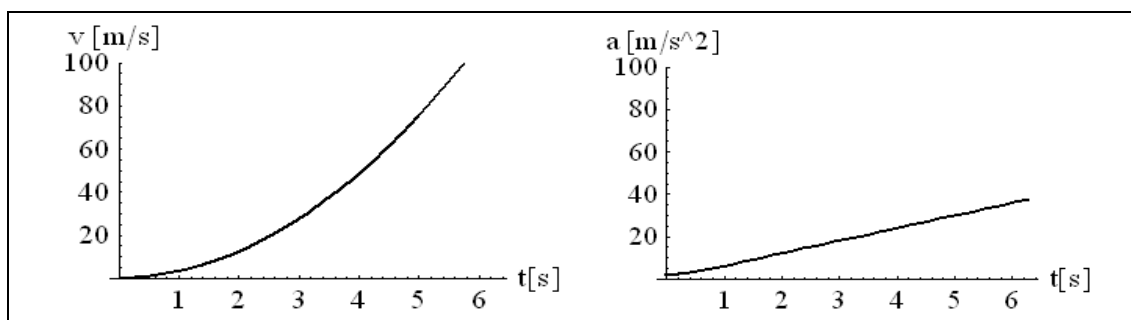
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = a = k \quad [\text{m s}^{-2}] \quad (3)$$

Tabuľka 5



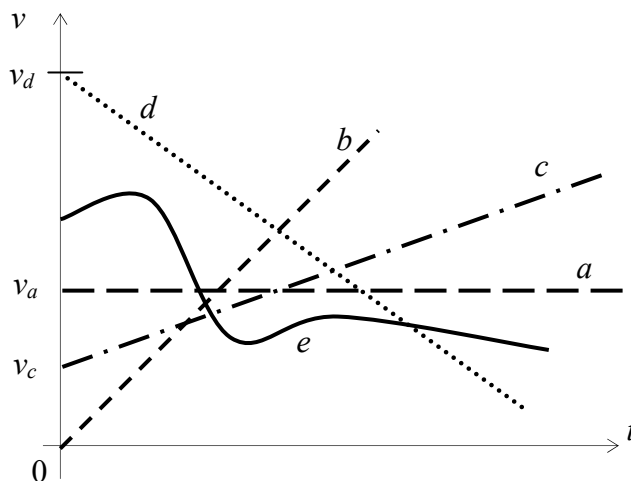
V tab.6 sú grafy pre rovnice pohybu: $x = t^2$; $y = t^3$.

Tabuľka 6



Po zostrojení grafov časových závislostí veľkosti rýchlosti a veľkosti zrýchlenia pre dané pohybové rovnice je vhodné pri analýze týchto grafických závislostí využiť vedomosti z teórie reálnej funkcie jednej reálnej premennej. Z tohto aspektu možno analyzovať zostrojené grafy.

Jednotlivé druhy pohybov (priamočiarych aj krivočiarych) vyskytujúcich sa v bežnej praxi je teda možné zakresliť v diagrame rýchlosť – čas (obrázok 1).



Obr. 1

a - rovnomerný pohyb rýchlosťou v_a

b - rovnomerne zrýchlený pohyb z nulovej začiatkovej rýchlosti

c - rovnomerne zrýchlený pohyb zo začiatkovej rýchlosti o veľkosti v_c

d - rovnomerne spomalený pohyb zo začiatkovej rýchlosti o veľkosti v_d

e - nerovnomerný pohyb

Z matematického hľadiska môžeme grafy znázornené na obr. 1 charakterizovať nasledovne:

a - graf konštantnej funkcie $y = f(t) = v_a = \text{konšt.}, t \geq 0$,

b - graf lineárnej rastúcej funkcie $y = f(t) = kt, t \geq 0, k \geq 0, k - \text{konšt.}$,

c - graf lineárnej rastúcej funkcie $y = f(t) = kt + v_c, t \geq 0, k \geq 0, k - \text{konšt.}$,

d - graf lineárnej klesajúcej funkcie $y = f(t) = kt + v_d, t \geq 0, k \leq 0, k - \text{konšt.}$,

e - graf všeobecnej funkcie $y = f(t), t \geq 0$.

4. Záver

Z analýzy danej úlohy vyplýva, že matematické vedomosti a zručnosti sú významnou a dôležitou súčasťou riešenia kinematických, ale vo všeobecnosti aj mechanických úloh. Študenti by sa v technických disciplínach mali zamýšľať hlavne nad technickými princípmi, postupmi a metódami riešenia, matematický aparát by mal byť pre nich samozrejmosťou.

Príspevok sa zaoberá len malou časťou mechaniky tuhých telies. Poukazuje na nutnosť zvládnutia práce s vektorovými funkciami, ich deriváciou a integráciou. V predmete Mechanika tuhých telies, v časti statika sa študenti stretávajú s vektorovými operáciami (súčet vektorov, skalárny a vektorový súčin atď.). V časti statika je taktiež potrebné, aby študenti mali zvládnuté riešenie sústavy lineárnych algebraických rovníc,

resp. maticového počtu. V dynamike tuhých telies okrem iného je nutné, aby študenti zvládli aj riešenie diferenciálnych rovníc druhého rádu.

Príspevok prezentuje jeden z mnohých príkladov dôležitého prepojenia a nadväznosti matematických predmetov s odbornými predmetmi pri štúdiu na vysokých školách technického zamerania.

Literatúra

- [1] Halabrín M. a kol. *Matematika I*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2000, 274 str., ISBN:80-227-1348-1
- [2] Halabrin M., Červeňanský J., Palumbíny O. *Matematika II*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2005, 213 str., ISBN:80-227-2275-8
- [3] Halabrín M. a kol. *Lineárna algebra*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 2004, 170 str., ISBN:80-227-2275-8
- [4] Labašová E. Riešenie prevodových funkcií v kinematike. In *Trendy ve vzdělávání*. Olomouc. Vydavateľstvo: Votobia. 2008, 567 – 570 str., ISBN 978-80-7220-311-6
- [5] Komorníková M., Mikula K. *Výpočtový systém Mathematica*. Bratislava, Vydavateľstvo STU, 1998, 198 str., ISBN:80-227-1123-3