O jednom problému lineární algebry v souvislosti s internetovým vyhledávačem GOOGLE

Ivo Marek *

Abstract

S cílem zaručit dostatečně velkou účinnost iterační agregační metody k výpočtu stránkového ocenění (anglicky PageRank) odpovídajícího Markovovského řetězce systému vyhledávače GOOGLE je zapotřebí zobecnit jisté lemma pomocí něhož lze určit rychlost konvergence odpovídajícího iteračního procesu. Důkazu tohoto tvrzení a stručné diskuzi je věnován tento příspěvek.

1 Úvod

Zájem o vnitřní strukturu vyhledávače GOOGLE až neuvěřitelně vzrostl, když se začaly objevovat některé detaily jeho výstavby a matematického zázemí. Zájem ještě nabyl na intenzitě po vydání monografie [4] věnované zejména matematickým otázkám tohoto pozoruhodného internetového prostředku moderní informační éry. Je pochopitelné, že zmíněný zájem nejen, že neupadá, ale stále narůstá, zejména mezi odborníky z příslušných oborů. Čtenářům, kteří se chtějí seznámit s podrobnějšími informacemi jak o GOOGLE jakožto prostředku komunikace tak s funkcemi jednotlivých jeho částí jakožto aplikací a realizací a vynikajících ideí, můžeme jen znovu a znovu doporučit již citovanou monografii. Je zajisté pozoruhodné, že tvůrci vyhledávače GOOGLE jsou dva studenti na Stanford University, kteří ještě v devadesátých létech byli doktorandy a dnes zaměstnávají své někdejší profesory, kteří jakožto zaměstnanci svých někdejších žáků pobírají platy řádově přesahující jejich platy, když ještě školili své tolik úspěšné žáky. Co zbývá dodat? Jména obou těch nejdůležitějších, dnes slavných bývalých studentů: Larry Page a Sergey Brin.

GOOGLE je navýsost složitý informatický systém mající matematickou či spíše výpočetní složku. Tato součást pracuje na bázi Markovovského řetězce. Výpočet stránkového ocenění je totožný s výpočtem stacionárního vektoru pravděpodobnosti příslušné matice přechodu. Výpočet vektoru pravděpodobnosti se v GOOGLE realizuje pomocí mocninné metody. Je-li tedy $G^{(1)}$ matice přechodu aktuálního Markovova řetězce, pak matice $G(\alpha) = \alpha G^{(1)} + (1-\alpha)ve^T$, kde v je t.zv. *personalizační vektor*, $e^T = (1,...,1)$ a $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, se nazývá *GOOGLEovská matice*. Hledaný vektor je tedy dán formulí

$$\hat{x}(\alpha) = \lim_{k\to\infty} [G(\alpha)]^k e. \tag{1.1}$$

*Stavební fakulta, České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, (marek@ms.mff.cuni.cz).

Otázkou je jak často systém GOOGLE aktualizovat. K tomu je nutné znát rychlost konvergence procesu popsaného v (1.1) a pomocí této veličiny určit periodu aktualizace. Výpočet dostatečně přesné aproximace veličiny (1.1) není snadný: GOOGLEovská matice mám (podle aktuálních odhadů cca 5.10^9 řádků! Ukážeme si jak potřebnou rychlost určit. Výsledek je: Aktualizace se provádí jednou za měsíc.

Náš zájem bude samozřejmě směřovat do matematiky a jmenovitě do lineární algebry. Je namístě uvědomit si, že situace v dalších oborech jakými jsou informatika, linguistika, kódování, protože eventuální, byť jediné slabá součást systému GOOGLE, by měla za důsledek jeho oslabení jako celku.

A nyní již k matematice! Jak rychle konveruje posloupnost mocnin GOOGLEovské matice k Perronově projekci? Jinými slovy, jak rychle konveruje posloupnost

$$\left\{[G(\alpha)]^k e - \hat{x}\right\}$$

k nulovému vektoru. Na tuto otázku a nejen na ni odpovídá náš příspěvek. Předkládáme totiž alternativní způsob výpočtu umožňující vnést do výpočtu další informace a pomoci tak eliminovat akce t.zv. hackerů v jejich snaze o nekalé vylepšování svých skore pro výpočet jejich stránkového ocenění. Naše metoda IAD je analyzována v oslední části tohoto pojednání.

2 Definice a značení

Nebude-li explicitně uvedena jiná skutečnost, vyšetřovány budou čtvercové matice rozměru $N \times N$.

Jak je obvyklé, symbolem

$$\rho(C) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(C)\},$$

budeme označovat spektrální poloměr matice C t.j.

$$\rho(C) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(C)\},$$

where $\sigma(C)$ denotes the spectrum of C.

Dále pak klademe

$$\gamma(C) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(C), \lambda \neq \rho(C)\}.$$

a veličinu $\gamma(C)$ nazýváme faktorem konvergence matice C.

Posléze definujeme veličinu $\tau(C)$, kterou nazýváme *spektrálním pseudopoloměrem* matice C.

2.1 Definice Pro libovolnou $N \times N$ matici $C = (c_{jk})$, kde $c_{jk}, j, k = 1, ..., N$, jsou komplwexní čísla, nechť

$$\tau(C) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(C), |\lambda| \neq \rho(C)\}.$$

POZNÁMKA Pro pseudopoloměr konvergence matice C platí nerovnosti

$$\rho(C) \geq \gamma(C) \geq \tau(C)$$

Budeme předpokládat, že p je celé kladné číslo a B nerozložitelná stochastická matice se spektrálním rozkladem

$$B = Q + Z,\ Q^2 = Q, QZ = ZQ = 0,\ \rho(Z) < 1,$$

v němž

$$Q = \sum_{j=1}^{p} \lambda^{j-1} Q_j,\ Q_j Q_k = Q_k Q_j = \delta_{jk} Q_j, j, k = 1, ..., p.$$

Poznamenejme, že předchozí formule popisují dvě v zásadě odlišné situace. Těmi jsou *případ primitivní* (pro $p = 1$) a *cyklický* (pro $p > 1$).

3 Googleovské aplikace

3.1 Motivační příklad

Vyšetřujme následující systém problémů parametrizovaných parametrem $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$:

$$G(\alpha) = \alpha G^{(1)} + (1-\alpha) G^{(2)},$$

kde $G^{(1)}$ je (sloupcově) stochastická matice a $G^{(2)}$ je vhodná irreducibilní stochastická matice "malého " řádu.

Jako prototyp našich výsledků může sloužit následující

3.1 Věta *Za předpokladu, že $G^{(2)} = ve^T$, při čemž v je vektor mající všechny komponenty kladné, a $e^T = (1, ..., 1)$, $e^T v = 1$, i.e. $G^{(1)}$ představuje primitivní stochastickou matici hodnosti jedna.*

Potom

$$\gamma(G(\alpha)) \leq \alpha.$$

Snadno prověříme, že

$$Q(\alpha) G(\alpha) Q(\alpha) = G(\alpha) Q(\alpha) = Q(\alpha)$$

a

$$(I - Q(\alpha))\, G^{(2)}\, (I - Q(\alpha)) = \left(G^{(2)} - Q(\alpha)\right) (I - Q(\alpha)) = G^{(2)}\, (I - Q(\alpha)) = 0. \tag{3.1}$$

Platnost tvrzení dokazované Věty plyne z rovnosti

$$G(\alpha) = Q(\alpha) + (I - Q(\alpha))\, \alpha G^{(1)}\, (I - Q(\alpha)).$$

Výše uvedený důkaz otvírá cestu k dalším zobecněním. Jako podstatný se jeví speciální vztah mezi původní maticí přechodu $G^{(1)}$ a poruchovou maticí $G^{(2)}$ spočívající v rovnosti (3.1).

4 Agregační a desagregační komunikace

Nechť $\mathcal{E} = \mathcal{R}^N, \mathcal{F} = \mathcal{R}^n, n < N,\ e^T = e(N)^T = (1,...,1) \in \mathcal{R}^N$. Dále nechť $\mathcal{G}$ označuje zobrazení definované na indexových množinách:

$$\mathcal{G} : \{1,...,N\} \overset{na}{\to} \{1,...,n\}$$

S tímto značením lze psát $e^T = (e(r_1)^T,...,e(r_n))^T)$, kde

$$r_j = \mathrm{card}\left(\left\{\overline{j} \in \{1,...,N\} : \mathcal{G}(\overline{j}) = j\right\}\right).$$

Iterační agregačně/desagregační komunikační operátory jsou definovány pomocí formulí

$$(Rx)_{\overline{j}} = \sum_{\mathcal{G}(j)=\overline{j}} x_j$$

$$S = S(u),\ (S(u)z)_{\overline{j}} = \frac{u_j}{(Ru)_{\overline{j}}}(Rx)_{\overline{j}}.$$

Z těchto vzorečků okamžitě plyne, že

$$RS(u) = I_{\mathcal{F}}$$

Dále pak pro *agregační projekci* platí $P(x) = S(x)R$

$$P(x)^T e = e \quad \forall x \in \mathcal{R}^N, x_j > 0, j = 1,...,N$$

a

(4.2) $$P(x)x = x \quad \forall x \in \mathcal{R}^N, x_j > 0, j = 1,...,N$$

Definujme *agregovanou matici* jakožto

$$\mathcal{B}(x) = RBS(x)$$

Vážnou otázkou je jak vybrat zobrazení $\mathcal{G}$.

Přirozeně, odpověd̆ je jednodušší, má-li B "vhodnou" blokovou strukturu, na př.

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & . & . & . & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & . & . & . & B_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{n1} & B_{n2}, & . & . & . & B_{nn} \end{pmatrix}, \text{ with diagonal } n_j \times n_j \text{ block } B_{jj},\ j = 1,...,n.$$

V takovém případě, klademe obvykle,

$$\overline{j} = \mathcal{G}(j) \text{ for } n_0 + n_1 + ... + n_{j-1} + 1 \le j \le n_0 + n_1 + ... + n_{j-1} + n_j,\ n_0 = 0.$$

a to značí, že každý z bloků B_{jk} se agreguje do 1×1 matice.

Naopak, zobrazení $\mathcal{G}$ dává možnost vytvořit odpovídající blokovou formu matice B (samozřejmě až na nějakou permutaci).

Obecně, najít "adekvátní" zobrazení $\mathcal{G}$ je velice obtížný úkol a každá dobrá rada je vítána. V praxi se zpravidla využívá informace o problému a často nemající s matematikou příliš společného.

5 IAD Algoritmy

Algoritmus SPV$(B; T; t, s; \mathcal{G}; x^{(0)}; \varepsilon)$

Buď B $N \times N$ irreducibilní stochastická matice a $\hat{x}$ její jediný stacionární vektor pravděpodobnosti. Dále, buď $I - B = M - W$ rozklad takový, že všechny prvky matice $T = M^{-1}W$ jsou nezáporná reálná čísla.

Posléze, nechť t, s jsou kladná čísla, komponenty vektoru $x^{(0)} \in \mathcal{R}^N$ jsou vesměs kladná čísla a $\varepsilon > 0$ je předem daná tolerance.

Krok 1. Položme $k = 0$.

Krok 2. Sestrojme *agregovanou matici* (v případě $s = 1$ irreducibilita of B zaručuje, že $\mathcal{B}(x^{(k)})$ je též irreducibilní)

$$B(x^{(k)}) = RB^s S(x^{(k)}).$$

Krok 3. Nalezněme jediný stacionární vektor pravděpodobnosti $z^{(k)}$ z úlohy

$$\mathcal{B}(x^{(k)})z^{(k)} = z^{(k)},\ e(p)^T z^{(k)} = 1,\ e(p) = (1, ..., 1)^T \in \mathcal{R}^p.$$

Krok 4. Řešme (vzhledem k $x^{(k+1)}$) úlohu

$$Mx^{(k+1,m)} = Wx^{(k+1,m-1)},\ x^{(k+1,0)} = x^{(k)},\ m = 1, ..., t,$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k+1,t)},\ e(N)^T x^{(k+1)} = 1.$$

Krok 5. Prověřme zda

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon.$$

Step 6. Jestliže platí NE v Kroku 6, pak t proveďme

$$k + 1 \to k$$

a jděme na Krok 2.

Step 7. Jest;iže platí ANO v Kroku6, pak položme

$$\hat{x} := x^{(k+1)}$$

a STOP.

6 Vlastnosti IAD metod

Podle definice **SPV** algoritmu formule pro chybu IAD metod $k + 1$ přiblížení vzhledem k aproximaci k má tvar

$$x^{(k+1)} - \hat{x} = J_t(x^{(k)}) \left(x^{(k)} - \hat{x}\right), \tag{6.1}$$

kde [7]

$$J_t(x) = J(B; T^t; x) = T^t \left[I - P(x)Z\right]^{-1} (I - P(x)), \tag{6.2}$$

a Z pochází ze spektrálního vyjádření matice $B = Q + Z, Q^2 = Q, QZ = ZQ = 0, 1 \notin \sigma(Z)$. Dále, $J_t(x) = T^{t-1} J_1(x),\ t \geq 1$, platí pro jakékoliv x mající všechny souřadnice kladné.

Pro naše účely sledujeme možnost obejít se bez předpokladu vyžadujícího konvergenci základní iterační matice t.j. nevyžaduje se toho, že $\lim_{k\to\infty} T^k = 0$ existuje.

Neřešenou zůstává otázka "správné" volby agregačního zobrazení $\mathcal{G}$.

V části 8 ukážeme jistý nový výsledek, který lze považovat za agregačně-desagregační verzi Věty 3.1. Její správné pochopení je umožněno skutečností, že IAD metody jsou konvergentními nezávisle na předpokladu, že příslušný iterační proces je řízen ať už maticí primitivní či maticí cyklickou. Čtenáře zajímajícího se o podrobnosti odkazujeme na naši práci [10], zde uvedeme jen znění nás zajímajícího tvrzení.

6.1 Věta *Buď B irreducibilní stochastická matice a $I - B = M - W$ její rozklad takový, že iterační matice $T = M^{-1}W$ je blokově p-cyclická.*

Potom existuje celé kladné číslo $\hat{t}$ a okolí $\Omega(\hat{x})$ takové, že Algoritmus SPV$(B; T; t, s = 1; \mathcal{G}; x^{(0)}; \varepsilon$ vytváří posloupnpost $\{x^{(k)}(T^t)\}$ takovou, že pro všechna $t \geq \hat{t}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)}(T^t) = \hat{x} = B\hat{x} = T\hat{x},$$

kdykoliv $x^{(0)} \in \Omega(\hat{x})$.

7 Třída úloh stochastických matic pro něž IAD konvergují rychle

V této části se zabýváme některými zajímavými vlastnostmi IAD metod, jež byly formálně zavedeny v odstavci **??**. Zejména nás budou zajímat třídy úloh, pro něž lze dokázat rychlou konvergenci. Rychlou konvergencí rozumíme skutečnost, kdy iterační proces nabízí přesné řešení v konečném počtu iteračních kroků. To, že IAD metody mají schopnost rychlé konvergence bylo pozorováno poprvé v práci [7].

7.1 Definice Uvažujme třídu speciálních stochastických matic, jejichž bloková struktura je ve tvaru

$$B_{dyad} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & . & . & . & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} & . & . & . & B_{2p} \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{p1} & B_{p2} & . & . & . & B_{pp} \end{pmatrix}$$

kde

(7.1) $$B_{jj}, j = 1, ..., p, \text{ libovolná substochastická}$$

a

(7.2) $$B_{jk} = v_j\, u_{jk}^T, j \neq k, \text{ matice hodnosti jedna}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ v_p \end{pmatrix}, \;\; v_j > 0, \; j = 1, ..., p.$$

Takové matice B_{dyad} budeme nazývat *dyadickými maticemi.*

7.2 Lemma *Předpokládejme, že* $x_{(j)}^{(k)} = c_j \hat{x}_{(j)}$ *s nějakými kladnými konstantami* $c_1, \ldots c_n$ *v kroku* k *algoritmu* $SPV(B; T; t, 1; x^{(0)}; \varepsilon)$. *Potom* $x^{(k+1)} = \hat{x}$.

Důkaz [7] využívá toho, že relace $(I - P(x^{(k)}))(x^{(k)} - \hat{x}) = 0$ platí pro uveden¸$x^{(k)}$.

7.3 Věta [7] *Je-li* $I - B = M - W$ *rozklad takový, že iterační matice* $= M^{-1}W$ *má všechny prvky nezáporné. Dále nechť je* M *rovna blokové diagonále nebo blokové trojúhelníkové čac sti matice* B. *nechť mimodiagonální bloky složené z blokových řádků matice* W *odpovídající jedná každé agregační skupině jsou matice hodnosti jedna a mají týž obor hodnot. Tedy, tyto matice mají právě ty vlastnosti popsané v (7.1) a (7.2).*

Potom algoritmus $SPV(B; T; 1, 1; x^{(0)}; \varepsilon)$ *with* $T = M^{-1}W$ *poskytuje přesné řešení po nejvýše dvou iteračních cyklech.*

Proof [7] Důkaz tohoto tvrzení je důsledkem Lemmatu 7.2. Jeho předpoklady jsou splněny při $k = 1$.

8 Poruchy hodnosti p

Protože citlivost agregačně-desagregačních metod na spektrálních vlastnostech matice řídící celý výpočtový proces je velmi omezená, je vcelku přirozené využít této vlastnosti k výpočtu stránkového ohodnocení (PageRank) pomocí IAD metod

Náležité analýze některých vhodných algoritmů bude předmětem této části našeho pojednání.

Podobně jako v části 3.1 budeme vyšetřovat konvexní kombinaci dvou stochastických matic $B(\alpha) = \alpha B^{(1)} + (1 - \alpha) B^{(2)}$, kde $B^{(1)}$ je daná jinak libovolná stochastická matice zatímco $B^{(2)}$ má některé speciální vlastnosti. Významný rozdíl však bude spočívat v předpokladech kladených na konvergenční vlastnosti matice kombinace $B(\alpha)$ kdy nebude vyžadována konvergence matice řídící výpočtový proces.

Předpokládejme tedy, že matice $B^{(1)}$ i $B^{(2)}$ mají již určenu svou blokovou strukturu. Iterační matici setrojujeme potom tak, že klademe

$$I - B(\alpha) = I - B_{\text{diag}}^{(1)} - \alpha B_{\text{off}}^{(1)} - (1 - \alpha) B_{\text{off}}^{(2)}, \tag{8.3}$$

kde

$$B^{(t)} = B_{\text{diag}}^{(1)} + B_{\text{off}}^{(t)}, \; t = 1, 2,$$

$$
(8.4) \qquad B^{(2)}_{\text{off}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & B^{(2)}_{1p} \\ B^{(2)}_{1p} & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & B^{(2)}_{1p} & 0 \end{pmatrix}
$$

a

$$B^{(2)}_{1p} = v_1 c(n_p)^T, \; B^{(2)}_{jj-1} = v_j c(n_{j-1})^T, j = 2, ..., p$$

s

$$v^T = (v_1^T, ..., v_p^T), \; c^T = (c(n_1)^T, ..., c(n_p))^T, \; e^T = (1, ..., 1) = (e(n_1)^T, .., e(n_p)^T)$$

předpokládajíce, že všechny komponenty vektoru v jsou kladná reálná čísla a vektor c je takový, že

$$\left(I - (B^{(1)}_{\text{diag}})^T\right) e = f, \; f^T = \left(f^T_{(1)}, ..., f^T_{(p)}\right)$$

a

$$f^T_{(j)} v^{(j)} = 1, \; j = 1, ..., p.$$

Rozklad (8.3) definuje iterační matici

$$
\begin{aligned}
T(\alpha) &= \left(I - B^{(1)}_{\text{diag}}\right)^{-1} \left[\alpha B^{(1)}_{\text{off}} + (1-\alpha) B^{(2)}_{\text{off}}\right] \\
&= \alpha T^{(1)} + (1-\alpha) T^{(2)}.
\end{aligned}
$$

Snadno se lze přesvědčit, že $T^{(2)}$ is blokově p-cyklická, irreducibilní a

$$(T(\alpha))^T f = f.$$

odtud plyne, že $T(\alpha)$ je irreducibilní, a tudíž má jediný Perronův vlastní vektor $x(\alpha)$. Normalizujeme-li jej kladouce

$$f^T x(\alpha) = 1,$$

obdržíme Perronův projektor $Q_1(\alpha)$

$$Q_1(\alpha) = x(\alpha) f^T = \left(x(\alpha) f^T\right)^2 = [Q_1(\alpha)]^2 .$$

Naším cílem je následující

8.1 Věta *Irreducibilita matice $B^{(2)}$ implikuje, že matici $T(\alpha)$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$T(\alpha) = \sum_{t=1}^{p} \lambda^{t-1} Q_t(\alpha) + \alpha (I - Q_1(\alpha)) Z^{(1)}(T)(I - Q_1(\alpha)), \; \lambda = \exp \frac{2\pi i}{p},$$

kde

$$
\begin{aligned}
Q_t(\alpha) &= y^{(t)} \left(f^{(t)}\right)^T \\
&= (I - Q_1(\alpha)) \left[\alpha Q_t^{(1)} + (1-\alpha) Q_t^{(2)}\right] (I - Q_1(\alpha)) \; , t > 1,
\end{aligned}
$$

$$T^{(1)} = \sum_{t=1}^{p} \lambda^{t-1} Q_t^{(1)} + Z^{(1)}(T),\ T^{(2)} = \sum_{t=1}^{p} \lambda^{t-1} Q_t^{(2)}$$

a

$$y^{(1)}(\alpha) = x(\alpha),\ \left(y^{(t)}(\alpha)\right)^T = \left(\lambda^t \left(x(\alpha)_{(1)}\right)^T, ..., \lambda^{pt} \left(x(\alpha)_{(p)}\right)^T\right),\ t > 1.$$

Navíc, spektrum $\sigma(T) = \sigma(\alpha T^{(1)}) \bigcup_{t=1}^{p} \{\lambda^t\}$ *a*

$$\tau(T(\alpha)) = \max\{|\,\mu| : \mu \in \sigma(T(\alpha)), \mu \neq \lambda^t, t = 1, ..., p\} \leq \alpha.$$

Dále uvedeme dvě evidentní tvrzení.

8.2 Tvrzení *Z předpokkladu, že* $B^{(2)}$ *jakož i* $T(\alpha)$ *jsou obě p-cyclické, plyne, že* $T^{(1)}$ *je též p-cyklická.*

8.3 Tvrzení *Pro Perronův projektor matice* $T(\alpha)$ *a matici* $T^{(2)}$ *platí*

$$Q_1(\alpha) T^{(2)} = Q_1(\alpha) \tag{8.5}$$

a

$$Q_1(\alpha) \left[T^{(2)} - Q_1(\alpha)\right] = 0. \tag{8.6}$$

Důkaz Obě relace (8.5) a (8.6) jsou bezprostředním důsledkem relací

$$(T(\alpha))^T f = f = \left(T^{(1)}\right)^T f.$$

Důkaz věty 8.1 Relace (8.5) and (8.6) plynou přímo z předpokladu cykličnosti matice $T(\alpha)$ [1].

Na základě Tvrzení 8.3 máme

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= Q_1(\alpha) Q_1(\alpha) + (I - Q_1(\alpha)) T(\alpha) (I - Q_1(\alpha))) \\ &= Q_1(\alpha) + (I - Q_1(\alpha)) \alpha T^{(1)} (I - Q_1(\alpha)) \\ &= \textstyle\sum_{t=1}^{p} \lambda^{t-1} Q_t(\alpha)) + (I - Q_1(\alpha)) \alpha Z^{(1)}(T) (I - Q_1(\alpha)). \end{aligned}$$

Dále vidíme, že

$$\sigma\left(T(\alpha)\right) = \bigcup_{j=1}^{p} \left\{\lambda^j\right\} \cup \sigma\left(\alpha Z^{(1)}(T)\right)$$

a tudíž,

$$\tau(T(\alpha)) = \alpha \rho \left(Z^{(1)}(T)\right) \leq \alpha.$$

Tím je důkaz dokončen.

Poděkování Tento příspěvek je založen na výzkumné práci na projektu podporovaném grantem No. MSM 210000010 Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky.

Literatura

[1] Courtois P.J., Semal P. *Block iterative algorithms for stochastic matrices*, Linear Algebra Appl. **76**, 59-80 (1986).

[2] I. S. Duff, J. K. Reid, An implementation of Tarjan's algorithm for the block triangularization of a matrix. *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol 4, 337 - 147, 1978.

[3] Kamvar S. *Stanford Web Matrix and Stanford-Berkeley Web Martix, Data Sets.*

[4] Langville A.N., Meyer C.D. *Google's PageRank and beyond. The Science of Search Engine Rankings.* Princeton University Press 2006,

[5] Langville A.N., Meyer C. D. *Deeper inside PageRank.* Preprint.

[6] Marek I., Mayer P. *Convergence analysis of an aggregation/disaggregation iterative method for computation stationary probability vectors of stochastic matrices.* Numerical Linear Algebra With Applications, **5** 253-274 (1998).

[7] Marek I., Mayer P. *Convergence theory of a class of aggregation/ disaggregation iterative methods for computing stationary probability vectors of stochastic matrices.* Linear Algebra Appl. **363** 177- 200, 2002).

[8] Marek I., Mayer P. *Iterative aggregation/disaggregation methods for computing stationary probability vectors of stochastic matrices can be finitely terminating,* International Journal of Differential Equations Vol. **3**, 301-313 (2001).

[9] Marek I., Mayer P., Pultarová I. *Convergence issues in the theory and practice of iterative aggregation/disagrregation methods.* Submitted ETNA 2007.

[10] Marek I., Mayer P., Pultarová I. *IAD methods based on splittings with cyclic iteration matrices.* Dagstuhl Seminar Proceedings 07071, 2007, 27 pp.

[11] Marek I., Pultarová I. *A note on local and global convergence analysis of iterative aggregation-disaggregation methods.* Linear Algebra Appl. **413**, 327–341 (2006).

[12] Pultarová I. *Numerical Solution of Principal Eigenvectors of Stochastic Matrices.* Submitted for publication 2007.

[13] Stewart W.J. *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains.* Princeton University Press, Princeton, NJ., 1994.