Iracionální rotace kružnice a ergodická věta

Martin Soukenka[1]

Abstrakt

Příspěvek pojednává o dynamickém systému na kružnici z pohledu Birkhoffovy ergodické věty. Je uveden důsledek ergodicity iracionální rotace v teorii čísel a některé jiné důsledky.

Iracionální rotace kružnice je speciálním případem dynamických systémů na kružnici, které prvně definoval A.N.Kolmogorov. Jeho motivací byla snaha modelovat dynamické vlastnosti hnaného mechanického rotoru, systém však modeluje rovněž kontrolní obvod s negativní zpětnou vazbou, užívaný v elektronice. Později Kolmogorův žák V.I.Arnold modeloval pomocí systému na kružnici dynamické vlastnosti srdeční činnosti.

Definice 1. Buď $\alpha \in (0,1)$ iracionální číslo a nechť zobrazení $T : [0,1] \to [0,1]$ je dáno předpisem

$$T(x) = x + \alpha \pmod 1.$$

Pak T se nazývá *iracionální rotace kružnice.*

Pojem *rotace* pochází z rotace kružnice délky jedna o úhel α, přičemž krajní body intervalu $[0,1]$ se na kružnici ztotožňují. Základní vlastností dynamického systému daného opakovaním zobrazení T na libovolný bod $x \in [0,1]$ je skutečnost, že množina $\{x, T(x), T^2(x), \ldots, T^n(x), \ldots\}$, nazývaná *orbitou bodu* x, je hustá na $[0,1]$. Jinými slovy, pro libovolné $x \in [0,1)$ je množina

$$\{x + n\alpha : n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

hustá na kružnici $[0,1)$. Systém nemá žádné periodické body: kdyby byla orbita nějakého bodu periodická s periodou p, pak by platilo $p\alpha = 0 \pmod 1$, což by znamenalo $p\alpha = k \in N$ a úhel α by byl racionální.

[1]KM FSv. ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: SoukenkaM@mat.fsv.cvut.cz

Uvažme konečnou část orbity, řekněme délky n, libovolného bodu $x \in A \subset [0,1]$. Ptejme se po *budoucím vývoji* iterací bodu x: kolik členů této části orbity padne do A? Je tento počet v nějakém vztahu k délce množiny A?

Uvažujme Lebesgueovu míru μ na $[0,1]$. Nakreslíme-li si graf zobrazení T na $[0,1]$, lze snadno nahlédnout, že pro každou podmnožinu $A \subset [0,1]$ platí $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, tedy *délka vzoru množiny je rovna délce této množiny.* Platí-li tato vlastnost pro každou podmnožinu $A \subset [0,1]$, říká se, že zobrazení T je *míru zachovávající* nebo také, že míra μ je *T–invariantní.* Platí-li pro nějakou podmnožinu $A \subset [0,1]$ inkluze $T(A) \subset A$, říká se, že množina A je *T–invariantní* (nebo zkráceně *invariantní*). Pravděpodobnostní míra μ je *ergodická*, jestliže každá měřitelná invariantní množina má míru 0 nebo 1.

Zajímavost 1. (Gaussův dynamický systém). Pro zobrazení $g : (0,1) \to (0,1)$ dané předpisem

$$g(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right],$$

sestrojil C.F.Gauss invariantní míru. Zobrazení g ale není bijekce!

Ergodicita míry, tj. ergodicita transformace tvořící dynamický systém, v němž skrze tuto míru měříme průběh událostí, zodpoví na výše položené otázky. Platí následující věta.

Birkhoffova ergodická věta. *Buď $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ pravděpodobnostní prostor (tj. $\mu(X) = 1$), $f \in L^1(\mu)$ a $T : X \to X$ míru zachovávající transformace. Potom existuje $f^* \in L^1(\mu)$ tak, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(Tx) + f(T^2x) + \dots f(T^{n-1}x)}{n} = f^*(x)$$

pro skoro všechna $x \in X$. Navíc, je-li T ergodická transformace, platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(Tx) + f(T^2x) + \dots f(T^{n-1}x)}{n} = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$$

pro skoro všechna $x \in X$.

Poznámka 1. Interpretace poslední rovnosti zní: pro ergodickou transformaci je *časová střední hodnota* rovna *prostorové střední hodnotě* skoro jistě.

Poznámka 2. Ve statistické fyzice hraje ergodická věta ústřední roli. Problémem ale je nalézt pro reálné fyzikální systémy ergodické míry.

Poznámka 3. Podle V.I.Arnolda je ergodický princip stejný princip, podle kterého ke sledování evoluce dřeva v lese není nutné čekat na to, až dřevo vyroste ze semene a uhyne, ale stačí se jednoduše podívat na dřeva různých stáří.

V případě iracionální rotace kružnice je zobrazení T ergodická transformace. Zvolíme-li v ergodické větě $f := \chi_A$ kde $\chi_A(x) = 1$ pro $x \in A$ a 0 pro $x \notin A$, pak ergodická věta říká, že střední hodnota počtu návštěv členů orbity bodu $x \in A$ v této množině A (tj. střední hodnota času stráveného v A) je rovna délce této množiny!

Uvažujme posloupnost prvních cifer císel 2^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, \ldots$$

Ptejme se po statistice jednotlivých cifer 1 až 9 v této posloupnosti. Hermann Weyl dokázal na počátku 20. století následující větu.

Věta (H.Weyl) *Buď $\{nx\}$ zbytková část čísla nx (tj. $\{nx\} = nx - [nx]$). Nechť x je iracionální číslo. Pak posloupnost*

$$\{x\}, \{2x\}, \{3x\}, \ldots$$

je rovnoměrně rozložena na intervalu $[0, 1]$.

Poznámka 4. Poslední tvrzení je důsledkem ergodicity iracionální rotace kružnice. H. Weyl však dokázal toto tvrzení před Birkhoffem a jeho větou.

První cifra čísla je dána zbytkovou částí jeho dekadického logaritmu. Např. první cifra čísla $2008 = 2,008 \cdot 1000$ je dána jako $\{\log 2008\} = \{\log (2,008 * 1000)\} = \{\log 2,008 + \log 1000\} = \{3 + \log 2,008\} = \log 2,008$. Jinými slovy, na intervalu $[\log i, \log (i + 1))$ leží ty zbytkové části logaritmů těch čísel, jejichž první cifrou je $i = 1, 2, \ldots 9$. Stačí tedy sestrojit intervaly $A_1 = [\log 1, \log 2)$, $A_2 = [\log 2, \log 3), \ldots, A_9 = [\log 9, \log 10)$.

Protože lze psát $\log 2^n = n \cdot \log 2$ a číslo $\log 2$ je iracionální, jsou podle Weylovy věty zbytkové části $\{\log 2^n\}$ rovnoměrně rozloženy na $[0, 1]$. To ale znamená, že z celého intervalu $[0, 1]$ zabírají zbytkové části logaritmů čísel s první cifrou rovnou i celkově úsek délky $\mu(A_i)$. Vyčíslíme-li přibližně jednotlivé délky

i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
$\mu(A_i)$	$0,301$	$0,176$	$0,125$	$0,097$	$0,079$	$0,067$	$0,058$	$0,051$	$0,046.$

vidíme, že jedniček je přibližně 30 procent, zatímco devítek je jen 5 procent, přičemž statistika cifer postupně klesá. Poznamenejme, že stejnou statistiku prvních cifer má libovolná geometrická posloupnost s výjimkou těch, které mají základ $10^{p/q}$, kde p, q jsou celá čísla.

Podle V.I.Arnolda vykazuje právě uvedené rozložení prvních cifer mnoho přírodních a společenských jevů a formuluje to jako empirický zákon. Např. první cifry počtu obyvatel států světa - zde lze podat vysvětlení skrze zákon populační dynamiky, podle kterého počet obyvatel pevně zvoleného státu vykazuje v čase geometrickou posloupnost. Podle Weylovy věty pak statistika prvních cifer populace tohoto státu v čase je stejná, jako statistika prvních cifer mocnin dvojky. V souhlase s „ergodickým principem“ lze zaměnit časové střední hodnoty prostorovými: statistika prvních cifer populací všech států musí být stejná jako časová statistika jednoho státu. Podobnou zákonitost vykazují první cifry rozloh států, délek řek, výšek hor, kapitálů společností, ale také třeba první cifry počtu stran všech knih ve Vaší knihovně. Proč tomu tak je, nikdo neví.