

UČME MATEMATIKU APLIKOVAŤ A VYUŽÍVAŤ POČÍTAČOVÚ PODPORU

Alena Vagaská¹

Abstrakt:

Článok je venovaný problematike výučby matematickým aplikáciám na fakultách technických univerzít. Taktiež prezentuje možnosti využitia programového vybavenia MS Excel a Matlab v technických aplikáciách matematiky.

1. Výučba aplikáciám matematiky na technických univerzitách

Je viac ako zrejmé, že v rámci vyučovania matematiky na technických univerzitách je žiaduce viesť študentov k jej aplikáciám v odborných predmetoch či v technickej praxi, k matematickému modelovaniu technologických procesov a numerickému riešeniu prevažne inžinierskych problémov. Avšak viacerí matematici by súhlasili s konštatovaním, že vyučovanie matematiky, fyziky a odborných predmetov je na niektorých fakultách technických univerzít v Slovenskej a Českej republike doteraz poznamenané odtrhnutosťou a izolovanosťou navzájom [1], [2]. Rozvoj multidisciplinárnej komunikácie odborníkov prírodovedných a technických disciplín je nedostatočný. Na cvičeniach z matematických predmetov, vzhľadom na súčasný trend znižovania časovej dotácie po zavedení štruktúrovaného štúdia, absentujú motivačné a aplikačné úlohy a úlohy vyžadujúce si nešpecifický transfer: problémové a tvorivé úlohy. Potvrdili to aj výsledky prieskumu zameraného na prehodnotenie súčasného stavu vyučovania matematiky realizovaného na FVT TU v Košiciach. [3]. Až 71,6 % študentov v spomínanom prieskume uviedlo, že matematické poznatky v odborných predmetoch dokážu aplikovať len čiastočne a s problémami; 7,7 % študentov priznalo neschopnosť akejkolvek aplikácie matematických poznatkov v odborných predmetoch technického zamerania.

Odstránenie týchto nedostatkov vo vyučovaní matematiky je možné dosiahnuť len rozšírením a prehĺbením aplikačného charakteru matematiky v konkrétnych oblastiach techniky, čo sa považuje za jeden z dôležitých aspektov modernizácie vyučovania matematiky. [1], [2]. Preto cieľom spoločných snáh matematikov na technických univerzitách v novom európskom akademickom priestore je, aby študenti lepšie pochopili význam matematiky a jej kľúčovú úlohu v technických disciplínach, našli efektívnejšie metódy a prístupy k štúdiu matematiky, cieľavedome a efektívne využívali matematické poznatky vo svojom odbore a vedeli používať programy CAS pri riešení zložitých aplikačných problémov a pri matematickom modelovaní v technickej praxi. [4].

V kontexte uvedeného sme v rámci inovácie študijných programov štruktúrovaného štúdia uvítali zavedenie nového predmetu „Aplikovaná matematika“ v inžinierskom štúdiu na FVT TU v Košiciach v šk. roku 2008/2009. Tento predmet poskytuje nielen priestor pre prehĺbenie aplikačného charakteru matematických predmetov implementáciou technických aplikácií do výučby, ale taktiež priestor pre zefektívnenie vyučovacieho procesu využívaním IKT a zavádzaním nových foriem výučby, čo je

¹ Technická univerzita v Košiciach, FVT so sídlom v Prešove, Katedra matematiky, informatiky a kybernetiky, Bayerova 1, 080 01 Prešov, alena.vagaska@tuke.sk

vzhľadom na náročnosť matematických výpočtov v technických aplikáciách nevyhnutnosťou a samozrejmosťou. Cvičenia z tohto predmetu sa totiž realizujú v počítačovej učebni. V rámci tohto predmetu sa študenti okrem iného oboznámia aj s numerickým riešením obyčajných diferenciálnych rovníc v prostredí vhodného matematického softvéru. V článku prezentujem ukážku aplikačnej úlohy riešenej na cvičeniach z predmetu Aplikovaná matematika s cieľom podeliť sa o skúsenosti s výučbou matematickým aplikáciám za vhodnej počítačovej podpory.

2. Počítačová podpora riešenia matematických modelov v tvare diferenciálnych rovníc

Uvedme si možnosti, ktoré nám ponúka MS Excel a Matlab pri riešení diferenciálnej rovnice, ktorú získame po aplikácii teórie diferenciálnych rovníc na nižšie nastolený problém [2].

Motorový čln sa pohybuje po jazere rýchlosťou $v_0 = 20$ km/h. Za čas $t = 40$ sekúnd po vypnutí motora sa rýchlosť člna zmenšila na hodnotu $v_1 = 8$ km/h. Odpor vody je priamo úmerný rýchlosti pohybu člna. Určte rýchlosť pohybu člna po 2 minútach od vypnutia motora.

Pri riešení danej úlohy a vytváraní matematického modelu musíme vychádzať z úvahy, že na pohybujúci sa čln pôsobí proti smeru pohybu sila $F = -kv$, kde $k > 0$ je konštanta úmernosti. Podľa II. Newtonovho pohybového zákona je sila F rovná súčinu hmotnosti m a zrýchlenia $a = \frac{dv}{dt}$ člna, t.j. matematickým modelom uvedenej aplikačnej úlohy je obyčajná diferenciálna rovnica v tvare:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad (1)$$

Ide o separovateľnú diferenciálnu rovnicu, odkiaľ po separácii premenných a zintegrovaní získavame všeobecné riešenie. Ak využijeme počiatočnú podmienku $v(0) = 20$, čo znamená, že v čase $t = 0$ s od vypnutia motora je rýchlosť motorového člna $v_0 = 20$ km/h, získame partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice (1) určením všeobecnej konštanty C v tvare:

$$v = 20 \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \quad (2)$$

Použijúc doplnujúcu podmienku $v(40) = 8$ určíme konštantu k z rovnice

$$8 = 20 \cdot e^{-\frac{k}{m}40} \Rightarrow k = \frac{m}{40} \cdot \ln \frac{5}{2} \quad (3)$$

Ak zoberieme do úvahy (1) a (3), dostaneme diferenciálnu rovnicu znižovania počiatočnej rýchlosti motorového člna po vypnutí motora v tvare

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{40} \ln \frac{2}{5} \cdot v \quad (4)$$

odkiaľ separáciou premenných a využitím počiatočnej podmienky získame riešenie rovnice:

$$v = 20 \cdot \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{t}{40}} \quad (5)$$

Zo vzťahu (5) je zrejmé, že rýchlosť pohybu člna po 2 minútach od vypnutia motora, je $v = \frac{32}{25} = 1,28 \text{ km/h}$.

Ukážme si, akoby vyzeralo numerické riešenie vyššie nastoleného problému znižovania rýchlosti člna s využitím MS-Excelu a Matlabu.

Numerické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím MS Excelu

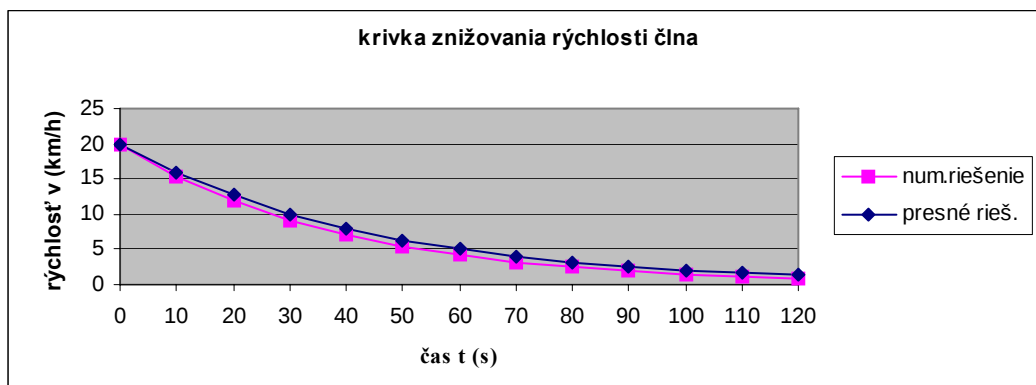
Riešenie rovnice (4) s počiatočnou podmienkou $v(0) = 20$. nezískame v tvare funkcie $v = v(t)$ vyjadrujúcej znižovanie rýchlosti člna, získame len jej aproximáciu v tvare dvojíc $(t_i), (v_i)$ prezentovaných v Exceli v stĺpcovej podobe. Pre približné riešenie použijeme Eulerovu metódu a metódu Runge-Kutta 2. rádu s krokom $h = 10$. Počas riešenia vyplynie, že rovnicu (4) je potrebné riešiť na časovom intervale v sekundách $\langle 0, 120 \rangle$. Podľa algoritmu Eulerovej metódy riešenia diferenciálnej rovnice $v'(t) = f(t, v)$ na intervale $\langle t_0, t_0 + n.h \rangle$ s krokom h a počiatočnou podmienkou $v(t_0) = v_0$ vpisujeme do buniek Excelu potrebné vzťahy, vid' obrázok 1.

Eulerova metóda $v' = kv, k = 1/40 \cdot \ln(2/5)$		presné riešenie		Runge-Kutta 2. rádu $v' = kv, k = 1/40 \cdot \ln(2/5)$	
čas t(s)	rýchlosť	čas	rýchlosť	čas	rýchlosť
0	20	0	20	0	20
10	15,4185	10	15,9054146	10	15,4185
20	11,8866	20	12,6491106	20	11,8866
30	9,16369	30	10,0594674	30	9,16369
40	7,06454	40	8,07647	40	7,06454
50	5,44624	50	6,36216583	50	5,44624
60	4,19866	60	5,05964426	60	4,19866
70	3,23686	70	4,02378697	70	3,23686
80	2,49538	80	3,2	80	2,49538
90	1,92376	90	2,54486633	90	1,92376
100	1,48308	100	2,0238577	100	1,48308
110	1,14335	110	1,60951479	110	1,14335
120	0,88144	120	1,28	120	0,88144

Obr. 1: Numerické riešenie diferenciálnej rovnice (4) v Exceli

V stĺpci A si vytvoríme číselnú postupnosť vyjadrujúcu zmenu času od vypnutia motora člna. V bunke B3 je využitá počiatočná podmienka. V D3 je zápis pravej strany diferenciálnej rovnice (4) v tvare $v'(t) = \frac{1}{40} \ln \frac{2}{5} \cdot v$, čo po prepise do Excelu vyzerá takto: $=(1/40)*LN(2/5)*B3$. Rýchlosť v_1 v čase $t_1 = 10\text{s}$ vyjadríme podľa algoritmu Eulerovej metódy $v_1 = t_0 + h \cdot v'(t_0) = t_0 + h \cdot f(t_0, v_0)$ v bunke B4 vzorcom v tvare: $=B3+C3*D3$. Bunku D4 doplníme kopírovaním bunky D3. Ďalšie aproximované hodnoty v_i rýchlosti v získame kopírovaním riadku 4. V stĺpcoch E, F je vyjadrené

presné riešenie získané analyticky. Využitím vzťahov algoritmu riešenia diferenciálnej rovnice $v'(t) = f(t, v)$ podľa metódy Runge-Kutta 2. rádu a ich prepísaním do buniek Excelu získame diskkrétne riešenie rovnice (4), t.j. aproximované hodnoty rýchlosti v_i v čase t_i . Na obr. 1 sú zvýraznené v stĺpci G, H; v grafe na obr. 2 kvôli prehľadnosti zakreslené nie sú. Porovnaním aproximovaných hodnôt v_i v čase t_i s presnými hodnotami získanými analyticky vidíme, že Eulerova metóda dáva menej presné výsledky.



Obr. 2 Integrálna krivka riešenia diferenciálnej rovnice znižovania rýchlosti člna

Numerické riešenie diferenciálnej rovnice s využitím Matlabu

Uvažujme o riešení diferenciálnej rovnice (4) na intervale $[0,120]$ pomocou Eulerovej a Heunovej metódy s využitím M-funkcií v Matlabe. M-funkcie vytvárame ako užívatelia systému a rozširujeme nimi možnosti systému vzhľadom na naše konkrétne potreby. M-funkcia je (po obsahovej stránke) postupnosť príkazov zapísaná do súboru pod nejakým menom. Jednoduchou implementáciou Eulerovej metódy, v ktorej vstupným argumentom nie je krok siete h , ale počet n uzlov siete, keď $a = x_1$, $b = x_{n+1}$, vytvoríme v Matlabe M-funkciu potrebnú pri riešení našej problematiky nazvanú napríklad „Eulern“, volaním ktorej získame riešenie rovnice (4).

```
function mxy=Eulern(mf,a,b,y0,n)
% mf meno(t.j. string) funkcie f=(x,y)
% y0 zac.podm.: y(a)=y0
% n = pocet uzlov siete ( bez bodu a )
% mxy matica n x 2 [x(i), aprox. y(x(i))]
```

$$h = (b-a)/n;$$

$$x = a:h:b;$$

$$y = \text{zeros}(1,n+1);$$

$$y(1)=y0;$$

```
for i=1:n
    y(i+1) = y(i) + h*feval(mf,x(i),y(i));
end
mxy = [x',y'];
```

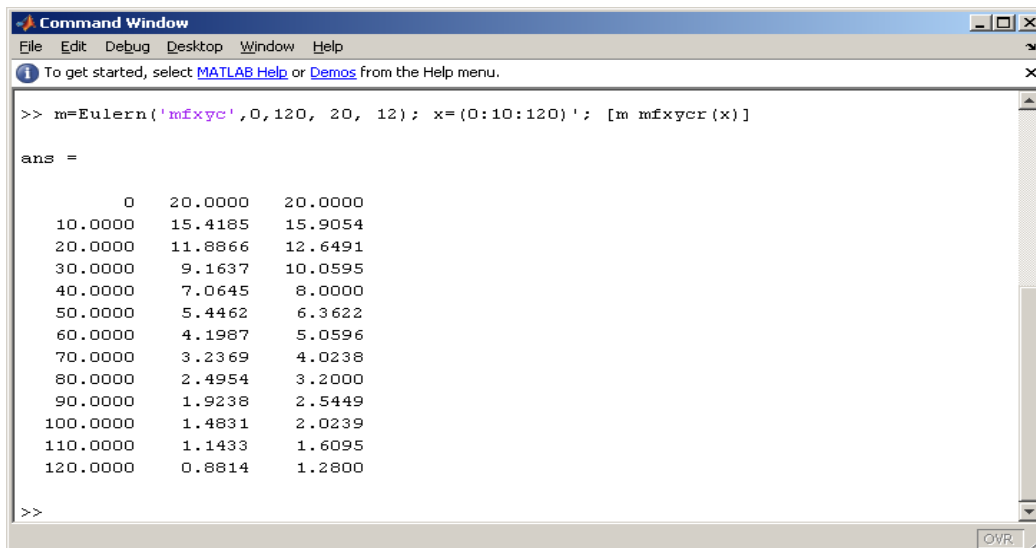
Ďalšou potrebnou M-funkciou bude funkcia „mfxyc“, ktorá vyjadruje rovnicu (4).

```
function z = mfxyc(x,y)
% dif rovnica znizovania rychlosti mot.clna
% v' = (-1/40)*ln(5/2)*v (y' = (1/40)*ln(2/5)*y)
z = (y/40)*log(2/5);
```

M-funkcia „mfxycr“ vyjadruje presné riešenie diferenciálnej rovnice (4)

```
function z=mfxycr(x)
% presne riesenie DR zniz.rychlosti mot.clna
% v=20*(5/2)^(-t/40)
z=20*(2/5).^(x/40);
```

Volaním funkcie „Eulern“ získame diskkrétne numerické riešenie rovnice (4):



Obr. 3 Diskkrétne riešenie rovnice (4) v Matlabe s využitím M -funkcií

V prvom stĺpci sú časové hodnoty, v druhom diskkrétne riešenie rovnice (4), tretí stĺpec predstavuje hodnoty presného riešenia (4). Je zrejmé, že globálna chyba [5] je veľká. Znížiť ju môžeme zmenšením kroku h , čo je aj tak pri tejto metóde dosť neefektívne. Slabým miestom Eulerovej metódy je, že prírastok riešenia na intervale $[x_i, x_{i+1}]$ sa aproximuje prírastkom dotyčnice v bode (x_i, y_i) . To znamená, že smerová funkcia nemôže dobre vystihnúť priebeh derivácie Preto treba použiť iné, vhodnejšie metódy. Uvádzam Heunovu metódu, ktorej rekurentný vzorec v tvare

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + h \cdot f(x_0, y_0))) \quad (6)$$

sa získava inou úvahou – integrovaním. Implementáciou vzťahu (6) vytvoríme novú M-funkciu „Heunh“, ktorá je len malou obmenou M-funkcie „Eulern“. Pri tejto metóde je argumentom veľkosť kroku a nie počet uzlov.

Volaním príslušnej M-funkcie získavame následovné diskkrétne riešenie:

```
m=Heunh('mfxycr',0,120, 20, 10); x=(0:10:120)'; [m mfxycr(x)]
```

```
ans =
```

x	m (Heunh)	m (mfxycr)
0	20.0000	20.0000
10	15.9433	15.9054
20	12.7094	12.6491
30	10.1315	10.0595
40	8.0765	8.0000
50	6.4383	6.3622
60	5.1324	5.0596
70	4.0913	4.0238
80	3.2615	3.2000

90.0000	2.5999	2.5449
100.0000	2.0726	2.0239
110.0000	1.6522	1.6095
120.0000	1.3171	1.2800

Všimnime si, že teraz je veľkosť globálnej chyby v bode $x=120$ rádovo menšia v porovnaní s Eulerovou metódou. Ešte presnejšie výsledky možno získať pomocou M-funkcií „ode23“ a „ode45“, ktoré sú už súčasťou Matlabu, avšak ich použitie nenúti študenta pochopiť a osvojiť si numerické metódy riešenia diferenciálnych rovníc.

3. Záver

Na cvičeniach z Aplikovanej matematiky sa osvedčilo, aby po klasickom výklade, vyriešení príkladu na danú tému a overení, či je pochopený algoritmus, nasledovala etapa využitia výpočtovej techniky s vhodným matematickým softvérom. Implementácia ICT do výučby aplikovanej matematiky nám totiž umožňuje nielen vypočítať viac príkladov, ale aj porovnať jednotlivé metódy z hľadiska odhadu chyby, rýchlosti, konvergenzie a vhodnosti danej metódy. Nespornou výhodou je taktiež grafická interpretácia výsledkov numerického riešenia pomocou matematického softvéru. Cieľom však ostáva, aby študenti mali numerické metódy pochopené a osvojené do takej miery, aby ich vedeli samostatne naprogramovať v akomkoľvek vhodnom prostredí matematického softvéru. Nemusí to byť len MS-Excel a Matlab. Na základe pedagogických skúseností môžeme vysloviť presvedčenie, že programové produkty nachádzajú efektívne uplatnenie aj v posilnení aplikačného charakteru matematiky a v podpore medzipredmetových vzťahov.

Literatúra

- [1] ČIŽMÁR, J.: Tradičné vyučovanie a modernizačné trendy v matematike. In: *Nové trendy vo výučbe matematiky*. Nitra: FEM SPU Nitra, 2001. ISBN 80-7137-953-0.
- [2] FULIER, J.: *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*. Nitra: FPV UKF v Nitre, 2001. 177 s. ISBN 80-8050-418-0.
- [3] VAGASKÁ, A.: *Niektoré špecifiká vyučovania matematiky na fakultách technických univerzít*. Dizertačná práca. 2004.
- [4] VELICHOVÁ, D.: Európa, e-learning a matematika: straty a nálezy. In: *Matematika v inžényrskom vzdelávaní*, Sborník 29. konferencie o matematice na VŠTEZ, Mutěnice, 4.-8.9.2006. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. ISBN:80-7318-450-8
- [5] VOLAUFG, P.: Numerické a štatistické výpočty v Matlabe. Bratislava: STU, 2005. ISBN 80-227-2259-6