Cvičení 2
Vlastnosti polynomů, Lagrangeův a Newtonův interpolační polynom, Legendreovy polynomy.

1) **Polynom** $P_n(x)$ **je Legendreův polynom n-tého stupně. Nalezněte polynom** $Q(x)$ **těchto vlastností:**

a) $Q(x)$ je násobkem polynomu $P_4(x)$, funkční hodnota $Q(0.5)=37$.

b) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ je kořenem $Q(x)$, funkční hodnota $Q(1) = -1$ a $Q(x) = \alpha\, P_2 + \beta\, P_0$.

c) 0.5 je kořenem $Q(x)$, 1 je koeficient u nejvyšší mocniny $Q(x)$ a $Q(x)=c\, P_2(x) + d\, P_3(x)$.

2) **Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom** fce $y=f(x)$ na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ pro ekvidistantní argumenty s krokem h, tj. $x_k=x_0+kh$. Uvažujte a) $n=2$, b*) $n=3$**.**

3) **Sestrojte Newtonův interpolační polynom** fce $y=f(x)$ na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ pro ekvidistantní argumenty s krokem h, tj. $x_k=x_0+kh$. Uvažujte a) $n=2$, b*) $n=3$.

4) **Lineární interpolací pomocí Lagrangeova i Newtonova interpolačního polynomu najděte přibližné hodnoty** cos 33°40′10′′a arctan 0.3. Pro funkce cos x a arctan x jsou známy pouze následující hodnoty:

x_i	33°40′00′′	33°40′40′′	33°41′10′′	33°42′00′′
cos x_i	0.832277	0.832169	0.832089	0.831954

x_i	0.176327	0.267949	0.363970	0.466308
arctan x_i	10°	15°	20°	25°

5) **Je dána ekvidistantní tabulka funkce** $y=f(x)$ s krokem $h=0.1$. **Kubickou interpolací Newtonovým polynomem vypočítejte přibližné hodnoty funkce** f **v bodech 0.55, 0.62 a 0.73.**

x_i	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
y_i	0.8409	0.8801	0.9147	0.9457	0.9740

6) **Je dána ekvidistantní tabulka funkce** $y=f(x)$ s krokem $h=0.1$. **Vypočítejte funkční hodnotu Newtonova polynomu druhého stupně v bodě 0.55, v bodě 0.65 dvakrát („zleva“ i „zprava“) a funkční hodnotu Newtonova polynomu třetího stupně v bodech 0.55 a 0.65.**

x_i	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
y_i	0.53125	0.07776	-0.33193	-0.67232	-0.90951

7) **Graf funkce** $y=f(x)$ **prochází body** [10,3], [15,7], [17,11], [20,17]. **Pomocí kubického interpolačního polynomu najděte přibližnou hodnotu argumentu** x**, pro kterou je** $f(x)=10$**.**

8) Graf funkce $y=$ sinh x prochází body [2, 3.627] [2.2, 4.457], [2.4, 5.466], [2.6, 6.695]. **Pomocí interpolačního polynomu třetího stupně najděte přibližnou hodnotu argumentu** x **tak, aby sinh** $x=5$**.**

9*) Parametrické rovnice Bernoulliovy lemniskáty $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ jsou $x = \frac{t(1+t^2)}{1+t^4}$, $y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^4}$. **Sestrojte kubickou interpolaci** části lemniskáty, pro kterou platí $x \geq 0$, $y \geq 0$. Načrtněte.

10*) Parametrické rovnice Descartova listu $x^3+y^3-3xy = 0$ jsou $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$.

Sestrojte kubickou interpolaci části listu, pro kterou platí a) $x \leq 0, y \geq 0$, b) $x \geq 0, y \geq x$. Načrtněte.

11*) Parametrické rovnice strofoidy $x(x^2+y^2)-(x^2-y^2) = 0$ jsou $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$.

Sestrojte kubickou interpolaci strofoidy, pro kterou platí a) $x \geq 0, y \geq 0$, b) $x \leq 0, y \geq 0$.

Domácí cvičení 2 - limita posloupnosti, vlastnosti fce:

1. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\frac{n^2+1}{n+1} - an - b \right) = 0$.

   b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f : y = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x}$.

2. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\frac{n^2+1}{n+1} - an - b \right) = 1$.

   b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f : y = \frac{\cosh 2x}{\sinh 2x}$.

3. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\frac{n^2+1}{n+1} - an - b \right) = +\infty$.

   b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f : y = \frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$.

4. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\frac{n^2+1}{n+1} - an - b \right) = -\infty$.

   b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f : y = \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x-1}$.

5. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\frac{n^2+1}{n+1} - an - b \right) = -1$.

   b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f : y = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$.

6. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\sqrt{n^2-n+1} - an - b \right) = 0$.

   b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f : y = arctg \frac{2}{x}$.

7. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\sqrt{n^2-n+1} - an - b \right) = 1$.

   b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f : y = \mathrm{arccotg} \frac{2}{x}$.

8. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\sqrt{n^2-n+1}-an-b\right)=-1$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

9. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\sqrt{n^2-n+1}-an-b\right)=+\infty$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=\dfrac{1}{\sin 2x}$.

10. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\sqrt{n^2-n+1}-an-b\right)=-\infty$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $y=\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x}$.

11. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\dfrac{n^2-1}{n+2}-an-b\right)=0$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

12. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\dfrac{n^2-1}{n+2}-an-b\right)=1$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

13. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\dfrac{n^2-1}{n+2}-an-b\right)=-1$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=arctg\dfrac{1}{x+1}$.

14. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\dfrac{n^2-1}{n+2}-an-b\right)=+\infty$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech
$f: y=\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x+1}$.

15. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\dfrac{n^2-1}{n+2}-an-b\right)=-\infty$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech
$f: y=\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x-1}$.

16. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\sqrt{n^2+n}-an-b\right)=0$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$.

17. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\sqrt{n^2+n}-an-b\right)=1$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

18. a) Určete reálná a,b tak, aby $\lim \left(\sqrt{n^2+n}-an-b\right)=-1$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

19. a) Určete reálná *a,b* tak, aby $\lim \left(\sqrt{n^2+n}-an-b\right)=+\infty$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=\ln\frac{x+1}{x-1}$.

20. a) Určete reálná *a,b* tak, aby $\lim \left(\sqrt{n^2+n}-an-b\right)=-\infty$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=\ln\frac{x-1}{x+1}$.

21. a) Určete reálná *a,b* tak, aby $\lim \left(\frac{n^3+1}{(n+1)^2}-an-b\right)=0$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

22. a) Určete reálná *a,b* tak, aby $\lim \left(\frac{n^3+1}{(n+1)^2}-an-b\right)=1$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

23. a) Určete reálná *a,b* tak, aby $\lim \left(\frac{n^3+1}{(n+1)^2}-an-b\right)=-1$.

b) Určete definiční obor, sudost/lichost a limity v krajních bodech $f: y=arctg\,\frac{1}{x}$.