

### Cvičení 3

#### Limita posloupnosti a funkce.

Opakování. Algebraické operace na množině  $R^* = R \cup \{\pm\infty\}$ .

$$13 - \infty, \infty + \infty, -\infty - \infty, -13 \cdot \infty, 13 \cdot (-\infty), \infty \cdot \infty, \infty \cdot (-\infty), (-\infty) \cdot (-\infty), \frac{13}{\infty}, \frac{-13}{\infty}, \frac{13}{-\infty},$$

$$\frac{0}{\infty}, \frac{0}{-\infty}, \frac{13}{0_+}, \frac{13}{0_-}, \frac{\infty}{0_+}, \frac{\infty}{0_-}, \frac{-\infty}{0_-}.$$

Neurčitě výrazy:  $\infty - \infty, 0_+ \cdot \infty, 0_+ \cdot (-\infty), \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}.$

Opakování.  $\lim 1^n, \lim 1.01^n, \lim 0.99^n, \lim(-1.01)^n, \lim(-0.99)^n.$

Opakování. Najděte posloupnosti  $\{a_n\}, \{b_n\}$  takové, aby platilo:

- a)  $\lim a_n = 0, \lim b_n = \infty, \lim a_n b_n = 4,$
- b)  $\lim a_n = 0, \lim b_n = \infty, \lim a_n b_n$  neexistuje,
- c)  $\lim a_n = 1, \lim b_n = \infty, \lim a_n^{b_n} = e.$

1) Vypočítejte dané limity:

$$\lim \sqrt[n]{n}, \lim \frac{(-1)^n}{n}, \lim \frac{\sin n}{n}, \lim \frac{\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{2}}, \lim \operatorname{arctg} \frac{2n}{2n+1}.$$

2) Vypočítejte dané limity:

- a)  $\lim \left( \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \right),$
- b)  $\lim \frac{1+2+\dots+n}{\sqrt[3]{8n^6 - n}},$
- c)  $\lim \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}},$
- \*d)  $\lim \frac{(2n-3)^{20} (3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}},$
- \*e)  $\lim \left( \cos \left( \frac{n}{2n-1} \right) \right)^{2n}.$

3) Vypočítejte limity:

$$\lim(5^n - 9^n), \lim \frac{2^n - 3^n}{5^n - 9^n}, \lim \sqrt{n^2 - 6n - 9}, \lim(\sqrt{n^2 - 6n - 9} - n^3),$$

$$\lim(\sqrt{(n+1)(n+2)} - n).$$

4) Určete nejmenší hodnotu  $n$ , od které počínaje je při nahrazení  $a_n$  číslem  $L = \lim a_n$  chyba menší než  $\varepsilon$ .

a)  $\left(\frac{3n^2 - n + 2}{1 - n^2}\right), \varepsilon = 0.01$ , b)  $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)\right), \varepsilon = 0.001$ , c\*)  $(n^5/n!), \varepsilon = 0.1$ ,  
d)  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3}\right), \varepsilon = 0.01$ .

5) Určete limitu funkce  $f$  pro  $x$  jdoucí k  $c$ . Jestliže limita neexistuje, zdůvodněte proč.

a)  $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}, c=2$ , b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}, c=0$ , c)  $f(x) = \arctg^2 \frac{\pi}{x}, c=0$ ,  
d)  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}, c=0$ , e)  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 7x}{3\operatorname{tg} 2x}, c = \pi/2$ .

6) Pro které hodnoty reálného parametru  $c$  je funkce  $f$  spojitá na  $\mathbf{R}$ ?

a)  $f(x) = \begin{cases} cx + 1, & x \leq 3, \\ cx^2 - 1, & x > 3. \end{cases}$  b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin cx}{x}, & x < 0, \\ c^2 - \cos x, & x \geq 0. \end{cases}$

7) Určete takové okolí bodu  $x_0$ , pro jehož hodnoty  $x$  je při nahrazení (aproximaci) hodnoty  $f(x)$  číslem  $L$  chyba menší než  $\varepsilon$ .

a)  $y = 1/x, L=0.5, x_0=2, \varepsilon = 0.2$ , b)  $y = \sin x, L=1, x_0=\pi/2, \varepsilon = 0.1$ .

### Domácí cvičení 3 – vlastnosti fce, derivace:

- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = x - 2\arctg x$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{2x^5 - 4}{x^4 + 7x^2}$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{x^2}{1 + 2x}$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{2x^4 - 4}{x^3 + 7x}$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = 2x - 2\arctg x$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = 3x - 2\arctg x$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = 2x + 2\arctg x$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = x + 2\arctg x$ .
- Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = x + 2\operatorname{arccot} g x$ .

13. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = x - 2\operatorname{arccot}gx$ .
14. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = 2x - 2\operatorname{arccot}gx$ .
15. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = 2x + 2\operatorname{arccot}gx$ .
16. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{x^2}{1 - 2x}$ .
17. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = 2x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ .
18. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = 2x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ .
19. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{x^2}{3 - 2x}$ .
20. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{x^2}{3 + 2x}$ .
21. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{2x^4 - 3}{x^3 + 2x}$ .
22. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{2x^3 + x}{x^2 + 1}$ .
23. Určete definiční obor, asymptoty a derivaci funkce  $f : y = \frac{x^2 + x + 1}{2x - 1}$ .