

## Cvičení 5

### Tečna a normála grafu funkce, L'Hospitalovo pravidlo.

Opakování.  $\lim_{x \rightarrow \infty} 1^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0_+} 0^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^0$ .

Opakování. Určete definiční obor a derivaci funkce  $f(x)$ : a)  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,

b)  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ , c)  $f(x) = \ln \sqrt{x(x+1)}$ , d)  $f(x) = \operatorname{arc} \cot g \frac{1}{\sqrt{x}}$ , e)  $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

Opakování. Necht'  $f(x)=x^2$ ,  $C=[2,4]$ ,  $D=[2+h,f(2+h)]$ . Určete směrnici  $k_t$  tečny grafu funkce v bodě  $C$  a směrnici  $k_s$  sečny  $CD$  grafu funkce  $f$ , jestliže a)  $h=1$ , b)  $h=0.1$ , c)  $h=0.01$ .

Opakování.  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ,  $p: ax + by + c = 0$ ; kde  $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in R$  volte sami.

Napište rovnici:

- tečny grafu funkce  $f(x)$  rovnoběžné s přímkou  $p$ ,
- tečny grafu funkce  $f(x)$  kolmé na přímkou  $p$ ,
- normály grafu funkce  $f(x)$  rovnoběžné s přímkou  $p$ ,
- normály grafu funkce  $f(x)$  kolmé na přímkou  $p$ .

1) Určete derivaci funkce  $f(x)$ : a)  $f(x) = x^x$ , b)  $f(x) = \cos x^{\sin x}$ , c)  $f(x) = \ln x^{\cot g x}$ ,  
d)  $f(x) = \operatorname{arc} \cot g x^{\log_{10} x}$ .

2) Najděte směrový vektor tečny a rovnici tečny a normály křivky  $k$  v bodě  $C \in k$ , jestliže:

- |   |  |
|---|--|
| a) $y = x^2 - 3x - 1$ , $C = [2, ?]$ ,                              | *b) $y^2 = x^3$ , $C = [?, -8]$ ,                                      |
| c) $y = \frac{5}{1+x^2}$ , $C = [2, ?]$ ,                           | d) $y = \ln x$ , $C = [?, 1]$ ,  |
| e) $y = \sqrt{2} \cos x$ , $C = \left[ \frac{3\pi}{4}, ? \right]$ , | f) $y = \arcsin \frac{1}{x}$ , $C = \left[ ?, \frac{\pi}{4} \right]$ . |

3) Určete velikosti úhlů, v nichž graf funkce  $f$  protíná osu  $x$ , jestliže:

- |   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| a) $f(x) = \cos x$ ,                    | b) $f(x) = \ln x$ ,               |
| c) $f(x) = \arctan x$ ,                 | d) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ ,       |
| e) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ , | f) $f(x) = x^2 \ln \frac{1}{x}$ . |

4) Určete velikost úhlu, v němž graf funkce  $f$  protíná osu  $y$ , jestliže:

- a)  $f(x) = e^{\sqrt{3}x}$ , b)  $f(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ , c)  $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$ .

5) Určete úhel dvou křivek  $xy = 8$  a  $x^2 - y^2 = 12$ . Křivky pojmenujte a nakreslete.

6) Objevte chybu ve výpočtu  $\frac{2}{\pi} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{1} = \frac{0}{1} = 0$ .

7) Pomocí L'Hospitalova pravidla dokažte, že  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$ .

### Domácí cvičení 5 – monotonie, konvexita, graf fce:

Určete intervaly monotonie, konvexnosti a konkávnosti, inflexní body funkcí, načrtněte graf funkcí.

1.  $f(x) = x + \sqrt{x}$ , 2.  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ , 3.  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ , 4.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ,

5.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ , 6.  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$ , 7.  $f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ , 8.  $f(x) = \cos 2x - 4 \sin x$ ,

9.  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 2 \cos x$ , 10.  $f(x) = \sin^2 x + \cos 2x$ , 11.  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cot g \frac{x}{2}$ ,

12.  $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$ , 13.  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ , 14.  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ , 15.  $f(x) = \ln \tan \frac{x}{2}$ ,

16.  $f(x) = \ln \sqrt{x(x+1)}$ , 17.  $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$ , 18.  $f(x) = \arctan \frac{1}{x+1}$ ,

19.  $f(x) = \operatorname{arc} \cot \frac{1}{\sqrt{x}}$ , 20.  $f(x) = \arccos \sqrt{2x}$ , 21.  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ,

22.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .