**Cvičení 8**
**Fyzikální význam derivace. Absolutní extrémy funkce. Taylorův polynom.**

1) Dva hmotné body se pohybují po stejné přímce proti sobě. Závislost dráhy $s$ (v metrech) na čase $t$ (v sekundách) prvního bodu je $s_1 = t^2 + 3t$ a druhého $s_2 = 5t$. Určete jejich vzájemnou rychlost a vzájemné zrychlení v čase $t_0 = 4$.

2.a) Poloměr kruhu *r(t)* se mění rychlostí *v* a se zrychlením *a*. Určete okamžitou rychlost a okamžité zrychlení obvodu, resp. obsahu kruhu v čase *t*.
2.b) Poloměr koule *r(t)* se mění rychlostí *v* a se zrychlením *a*. Určete okamžitou rychlost a okamžité zrychlení povrchu, resp. objemu koule v čase *t*.

3) Určete hodnotu $x_0$, pro kterou je dáno *n* nezávislých měření $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $n > 0$ tak, aby součet $S = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$ byl minimální.

4) Na intervalech $\langle -2{,}3 \rangle$, $(-2{,}3\rangle$, $\langle -2{,}3)$ a $(-2{,}3)$ najděte extrémy funkcí:
a) $f(x) = x^3$, b) $f(x) = x^4$, c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Pro ověření globálního extrému nakreslete grafy zadaných funkcí na daných intervalech.

5) Funkci $f(x) = x^4 + 10x^3 + 12x^2 + 5x + 6$ vyjádřete pomocí mocnin výrazu $(x+1)$.

6.a) Určete Taylorův polynom třetího stupně v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = \sinh x$.
6.b) Určete Taylorův polynom čtvrtého stupně v bodě $x_0 = 0$ pro funkci $f(x) = \cosh x$.
6.c) K vyjádření obou aproximací pomocí Taylorova polynomu použijte Taylorův polynom funkce $f(x) = e^x$.

7) Určete Taylorův polynom třetího stupně dané funkce v bodě $x_0 = 0$:
a) $f(x) = x^3 e^x$, b) $f(x) = x^3 e^{-x}$, c) $f(x) = x^3 \sqrt{x+1}$, d) $f(x) = x^3 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$,
e) $f(x) = x^3 \cos x$, f) $f(x) = x^3 \cosh x$, g) $f(x) = x^3 \dfrac{1}{1+x^2}$, h) $f(x) = x^3 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

8) Pro dané funkce určete v bodě $x_0 = 0$ Taylorův polynom třetího stupně:
a) $f(x) = x^2 e^x$, b) $f(x) = x^2 e^{-x}$, c) $f(x) = x^2 \sqrt{x+1}$, d) $f(x) = x^2 \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$,
popř. čtvrtého stupně: e) $f(x) = x^2 \cos x$, f) $f(x) = x^2 \cosh x$.

9) Užitím Taylorova polynomu vypočítejte s danou přesností následující hodnoty:
a) $\sqrt{0.997} = \sqrt{1 - 0.003}$, $10^{-3}$, použijte $f(x) = \sqrt{1-x}$ popř. $\sqrt{1+x}$,
b) $\sqrt[4]{82} = \sqrt[4]{81+1}$, $10^{-3}$, použijte $f(x) = \sqrt[4]{81+x}$,
c) $\ln 2 = \ln(1+1)$, $10^{-1}$, použijte $f(x) = \ln(1+x)$.

10) Je dán přibližný vzorec $\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

a) S jakou přesností platí tento vzorec pro $x \in (-\pi/4, \pi/4)$?

b) Na jakém intervalu je přesnost vzorce $10^{-4}$?

c) O kolik členů je třeba vzorec zpřesnit, aby pro $x \in (-\pi/4, \pi/4)$ dosahoval přesnosti $10^{-8}$?

11) Je dán přibližný vzorec $\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

a) S jakou přesností platí tento vzorec pro $x \in \langle 0,1 \rangle$?

b) Na jakém intervalu je přesnost vzorce $10^{-4}$?

c) O kolik členů je třeba vzorec zpřesnit, aby pro $x \in \langle 0,1 \rangle$ dosahoval přesnosti $2.10^{-2}$?

**Domácí cvičení 8** - Schmidtova ortogonalizace vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$.

1) $\mathbf{u}_1=(1,2,-2)$, $\mathbf{u}_2=(3,0,1)$, $\mathbf{u}_3=(1,1,1)$.

2) $\mathbf{u}_1=(2,1,3)$, $\mathbf{u}_2=(1,-2,1)$, $\mathbf{u}_3=(2,-3,5)$.

3) $\mathbf{u}_1=(1,0,1)$, $\mathbf{u}_2=(0,0,4)$, $\mathbf{u}_3=(4,2,0)$.

4) $\mathbf{u}_1=(1,1,0)$, $\mathbf{u}_2=(3,0,-2)$, $\mathbf{u}_3=(-2,3,5)$.

5) $\mathbf{u}_1=(1,2,-1)$, $\mathbf{u}_2=(2,1,1)$, $\mathbf{u}_3=(0,1,-3)$.

6) $\mathbf{u}_1=(3,-1,-1)$, $\mathbf{u}_2=(1,3,-4)$, $\mathbf{u}_3=(2,1,-3)$.

7) $\mathbf{u}_1=(2,1,-3)$, $\mathbf{u}_2=(1,0,4)$, $\mathbf{u}_3=(3,2,1)$.

8) $\mathbf{u}_1=(2,-1,1)$, $\mathbf{u}_2=(3,0,1)$, $\mathbf{u}_3=(1,2,0)$.

9) $\mathbf{u}_1=(2,1,5)$, $\mathbf{u}_2=(-1,3,2)$, $\mathbf{u}_3=(3,0,1)$.

10) $\mathbf{u}_1=(2,-1,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,3)$, $\mathbf{u}_3=(-1,3,2)$.

11) $\mathbf{u}_1=(-1,1,3)$, $\mathbf{u}_2=(1,3,1)$, $\mathbf{u}_3=(3,2,1)$.

12) $\mathbf{u}_1=(1,3,-1)$, $\mathbf{u}_2=(2,5,2)$, $\mathbf{u}_3=(-1,-4,1)$.

13) $\mathbf{u}_1=(1,3,-1)$, $\mathbf{u}_2=(2,5,2)$, $\mathbf{u}_3=(-1,-4,1)$.

14) $\mathbf{u}_1=(-1,-2,0)$, $\mathbf{u}_2=(3,0,1)$, $\mathbf{u}_3=(2,-1,1)$.

15) $\mathbf{u}_1=(2,1,-3)$, $\mathbf{u}_2=(1,3,-4)$, $\mathbf{u}_3=(3,-1,-1)$.

16) $\mathbf{u}_1=(1,-1,0)$, $\mathbf{u}_2=(1,2,-1)$, $\mathbf{u}_3=(1,2,3)$.

17) $\mathbf{u}_1=(1,-1,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,2,-1)$, $\mathbf{u}_3=(2,1,-1)$.

18) $\mathbf{u}_1=(2,0,1)$, $\mathbf{u}_2=(1,-1,2)$, $\mathbf{u}_3=(3,2,-1)$.

19) $\mathbf{u}_1=(2,1,-1)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,1)$, $\mathbf{u}_3=(2,3,1)$.

20) $\mathbf{u}_1=(2,0,-1)$, $\mathbf{u}_2=(2,1,-1)$, $\mathbf{u}_3=(1,-1,3)$.

21) $\mathbf{u}_1=(1,2,-1)$, $\mathbf{u}_2=(3,2,-1)$, $\mathbf{u}_3=(2,3,-1)$.

22) $\mathbf{u}_1=(1,-1,-1)$, $\mathbf{u}_2=(1,2,-2)$, $\mathbf{u}_3=(2,-3,2)$.

23) $\mathbf{u}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{u}_2=(2,-1,1)$, $\mathbf{u}_3=(3,-2,2)$.

*24) $\mathbf{u}_1=(2,1,4)$, $\mathbf{u}_2=(3,-2,1)$, $\mathbf{u}_3=(3,5,11)$.

*25) $\mathbf{u}_1=(1,2,0)$, $\mathbf{u}_2=(1,2,7)$, $\mathbf{u}_3=(2,4,7)$.