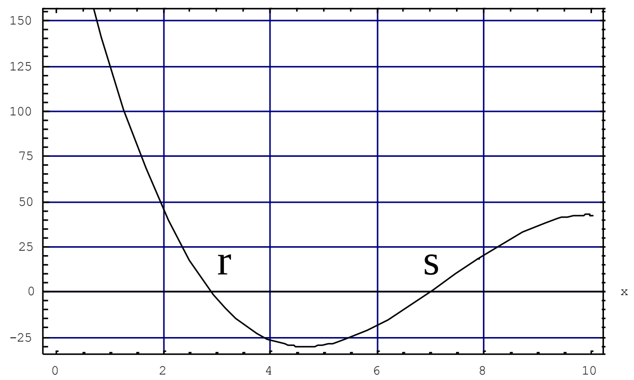
**Cvičení 9**

**Numerické řešení rovnice *f(x)*=0. Diferenciál funkce. Schmidtova ortogonalizace.**

1) Na obrázku je graf funkce $y = f(x)$. Užijte Newtonovu metodu s první aproximací $x_1$=1 pro určení kořene *r* a vysvětlete, proč $x_1$=9.5 nepovede k určení kořene *s*. Pro oba případy načrtněte tečny, které určují druhou a třetí aproximaci $x_2$ a $x_3$ a graficky odhadněte hodnoty $x_2$ a $x_3$.




2) Vysvětlete, proč Newtonova metoda s první aproximací $x_1$=1 neurčí řešení rovnice $x^3$-3$x$+6=0.

3) Pomocí metody půlení intervalu, metody regula falsi, stacionární metody sečen a Newtonovy metody vyřešte rovnice na daném intervalu:
   a) $x^2 - 8 = 0$, $x \in \langle 2,3 \rangle$... algoritmus pro výpočet druhé odmocniny,
   b) $xe^x - 2 = 0$, $x \in \langle 0,1 \rangle$, c) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, $x \in \langle -3,-2 \rangle$.

4) Pomocí tzv. prosté iterační metody nalezněte řešení Keplerovy rovnice $E = M + e\sin E$ pro známé hodnoty první numerické excentricity *e* a střední anomálie *M*. Ověřte předpoklady pro konvergenci této metody. První iteraci pro excentrickou anomálii *E* volte *E*=*M*. Hodnoty excentrické a střední anomálie dosazujte do výpočtu v obloukové míře! Hodnoty první numerické excentricity *e* pro tělesa ve Sluneční soustavě jsou tyto: planetka Schlaun 0.002, Venuše 0.00682069, Neptun 0.00899704, Země 0.016722, Uran 0.0463444, Jupiter 0.04833475, Saturn 0.05589232, Mars 0.09331290, Merkur 0.20561421, Pluto 0.25234645, Halleyova kometa 0.967, kometa Hyakutake 0.9998. Střední anomálii *M* volte např. libovolně na intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$.

5*) Délka oblouku kružnice *k* nad tětivou *AB* je 5 cm, délka tětivy samotné je 4 cm. Určete středový úhel kružnice *k* příslušný tětivě *AB* s přesností na vteřiny.

Opakování. Výpočtem příslušného diferenciálu funkce ověřte, že pro $x \to 0$ platí:

a) $1/(1+2x)^4 \approx 1-8x$, b) $1/\sqrt{4-x} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x$, c) $(1+x)^n \approx 1+nx$, d) $\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}$.

6) Na okolí bodu $x_0$ vypočítejte přírůstek funkční hodnoty funkce *f* odpovídající přírůstku *dx* a diferenciál funkce *df* v bodě $x_0$. Určete velikost chyby při aproximaci diference funkce $\Delta f$ diferenciálem funkce *df*:
   a) $f(x)= x^2-x$, $x_0$=5, d$x$ = 2, b) $f(x)= x^2-x$, $x_0$=5, d$x$ = 0.2, c) $f(x)= x^2-x$, $x_0$=5, d$x$ = 0.02.

7) Bod $A=[x_0,y_0]$ leží na křivce $y = x^2\sqrt{x}$. Měřením bylo zjištěno, že $x$-ová souřadnice bodu $A$ je $4\pm0.02$. Jestliže je z takto naměřené hodnoty vypočítána $y$-ová souřadnice bodu $A$, určete její přibližnou hodnotu.

8) Poloměr referenční sféry, která má přibližně stejný povrch i objem jako Krasovského elipsoid, je $R$= 6 371 113 m. Poloměr referenční sféry Křovákova zobrazení je větší o 9590.61 m. Pomocí diferenciálu odhadněte povrch a objem Křovákovy sféry.

9) Průměr kmene sledovaného stromu byl 20 cm. Za rok se měřením zjistilo, že obvod kmene je delší o 4 cm. O kolik přibližně se v tom případě zvětšil průměr kmene? A o kolik obsah jeho příčného řezu?

*10) Určete přibližně nejmenší možnou přesnost, s níž je třeba změřit $x$-ovou souřadnici $x_0$ bodu $A=[x_0,y_0]$ (pro $x_0 > 0.5$) ležícího na křivce $xy = 4$, abychom se při výpočtu $y$-ové souřadnice $y_0$ bodu $A$ dopustili chyby nejvýše 0.1.

11) Z dané skupiny vektorů vytvořte ortogonální bázi stejného vektorového zaměření $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, kde $\vec{u} = (1,2,0)$ a $\vec{v} = (0,-4,1)$.

12) Najděte ortonormální bázi vektorového podprostoru $V_3$ generovaného skupinou vektorů $\vec{u} = (1,1,1,1)$, $\vec{v} = (3,3,-1,-1)$, $\vec{w} = (-2,0,6,8)$.

**Domácí cvičení 9 - matice:**

a) Určete hodnost matice v závislosti na parametru $a$,
b) pro dané $a$ určete $LU$ rozklad matice.

1. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & a \\ a & 0 & -5 \end{pmatrix}$, b) $a = 1$,

2. a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ -10 & -4 & a \end{pmatrix}$, b) $a = 1$,

3. a) $\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ -11 & -6 & -a \end{pmatrix}$, b) $a = 2$,

4. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & a & 5 \\ -11 & -a & -1 \end{pmatrix}$, b) $a = 1$,

5. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 7 & 6 & 5 \\ a & -2 & -7 \end{pmatrix}$, b) $a = 1$,

6. a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & -a & -7 \end{pmatrix}$, b) $a = 1$,

7. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 6 & 5 \\ 3 & -2 & -a \end{pmatrix}$, b) $a = 1$,

8. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ a & a & a \end{pmatrix}$, b) $a = 1$,

9. a) $\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ a & 0 & -4 \end{pmatrix}$, b) $a = 1$,

10. a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ a & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, b) $a = 2$,

11. a) $\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ a & -6 & -1 \end{pmatrix}$, b) $a=1$,

12. a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 7 & a & 5 \\ -11 & -6 & -1 \end{pmatrix}$, b) $a=2$,

13. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 7 & a & 5 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, b) $a=1$,

14. a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & a & -7 \end{pmatrix}$, b) $a=1$,

15. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 6 & 5 \\ 3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$, b) $a=1$,

16. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & a \\ 8 & 8 & a \end{pmatrix}$, b) $a=1$,

17. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$, b) $a=2$,

18. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$, b) $a=3$,

19. a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 2 & a \end{pmatrix}$, b) $a=2$,

20. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & a & 5 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $a=2$,

21. a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & a & 1 \\ a & 3 & -1 \end{pmatrix}$, b) $a=2$,

22. a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & a \\ a & -2 & 3 \end{pmatrix}$, b) $a=2$,

23. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ a & -2 & -3 \end{pmatrix}$, b) $a=3$.