**Cvičení 10**
**Matice a jejich užití. Soustavy lineárních rovnic (část 1).**

1) Jsou dány vektory **u**=(1,2,3), **v**=(0,2,*y*), **w**=(1,*x*,3).
   a) Určete všechna reálná *x*,y, pro která vektory **u**, **v, w** nejsou bází aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$.
   b) Určete nějaká *x*,y, pro která vektory **u**, **v, w** jsou bází aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$.
   c) Vektor **a**=(-1,4,2) vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů **u**, **v, w** z bodu b).
   d) Určete souřadnice vektoru **a** vzhledem k bázi {**u**, **v, w**} z bodu b).
   e) Určete souřadnice vektoru **a** vzhledem k bázi $\{2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \tfrac{1}{2}\mathbf{e}_3\}$.

2) Jsou dány matice $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Vypočítejte $3A-B^T$,
b) Určete A.B, B.A,
c) Vypočítejte $(A.B)^2$,
d) Matici $B^TA^T$ rozložte na matici symetrickou a antisymetrickou.

3) Najděte všechny matice, které komutují s danou maticí $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ vzhledem k násobení matic.

4) Rozhodněte o vzájemné poloze přímek *p, q*. (Pozn. Rovnice přímek jsou zadány tak, že o vzájemné poloze lze rozhodnout na první pohled.)
   a) X=[2,1,3]+ $t$ (3,2,1), Y=[5,3,4]+ $s$ (-6,-4,-2), kde $t,s \in R$
   b) X=[2,1,3]+ $t$ (3,2,1), Y=[12,1,3]+ $s$ (-6,-4,-2), kde $t,s \in R$
   c) X=[2,1,3]+ $t$ (3,2,1), Y=[0,-3,-3]+ $s$ (1,2,3), kde $t,s \in R$
   d) X=[2,1,3]+ $t$ (2,3,0), Y=[2,1,0]+ $s$ (1,2,0), kde $t,s \in R$

5) Rozhodněte o vzájemné poloze přímek *p, q* ($\alpha,\beta \in R$):
a) *p*: *X*=[-3,-1,-1]+ $\alpha$ (1,2,1), *q*: *X*=[-4,2,0]+ $\beta$ (3,1,1) ,
b) *p*: $x=t$, $y=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}t$, $z=3-t$, *q*: $x=3+3s$, $y=7+2s$, $z=-3-3s$ ,
c) *p*: *X*=[-2,2,1]+ $\alpha$ (3,1,-1), *q*: *X*=[10,4,-1]+ $\beta$ (-9,-3,$a$) (diskutujte vzhledem k $a \in R$).

6) Určete hodnost matice

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 19 & -14 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 5 & 1 & 10 \\ 0 & -4 & -20 \end{pmatrix}$.

7) Určete hodnost matice v závislosti na parametru $a$

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & a \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ a & -5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & a & 5 \\ a & 9 & -15 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & a \end{pmatrix}$.

8) Určete, zda je skupina vektorů lineárně závislá či nezávislá, dimenzi jejího lineárního obalu a jestli je daná skupina bází vektorového prostoru $R^3$, popř. $R^4$:

a) $\vec{u} = (0,-1,1)$, $\vec{v} = (1,1,2)$, $\vec{w} = (1,0,2)$,

b) $\vec{u}_1 = (2,1,3)$, $\vec{u}_2 = (1,3,-1)$, $\vec{u}_3 = (-3,-4,-1)$, $\vec{u}_4 = (4,-2,0)$,

c) $\vec{u} = (1,2,4)$, $\vec{v} = (2,\lambda,-4)$, $\vec{w} = (-1,-2,2\lambda)$, diskutujte vzhledem k parametru $\lambda \in R$,

d) $\vec{u}_1 = (1,2,5,3)$, $\vec{u}_2 = (-2,-4,1,27)$, $\vec{u}_3 = (1,1,1,\lambda)$, $\vec{u}_4 = (1,0,\mu,3\mu)$, diskutujte vzhledem k parametrům $\lambda, \mu \in R$.

9) Určete dimenzi lineárního obalu skupiny vektorů $\vec{u}_1 = (1,-4,5,0)$, $\vec{u}_2 = (2,1,3,-1)$, $\vec{u}_3 = (4,-7,13,-1)$, $\vec{u}_4 = (3,1,-2,2)$ a najděte jeho libovolnou bázi.

10) Určete souřadnice vektoru $\vec{v} = (4,13,9)$ vzhledem k bázi $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$, kde $\vec{u}_1 = (-1,3,2)$, $\vec{u}_2 = (8,1,1)$, $\vec{u}_3 = (-1,1,-1)$.

11) Vypočítejte průsečík tří rovin $3x - y + z - 8 = 0$, $x + 2y - z - 3 = 0$, $2x - 3y + z = 0$. Soustavu lineárních rovnic řešte pomocí LU rozkladu matice soustavy.

12) Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem $\lambda \in R$.

$$\lambda x + (\lambda + 2)y = 3\lambda,$$
$$(\lambda - 1)x + (2\lambda - 2)y = \lambda + 1.$$

**Domácí cvičení 10 – užití determinantu.**

a) Určete inverzní matici k matici z domácího cvičení 9.

Volba b1) Vypočítejte objem čtyřstěnu *ABCD*.

1. $A = [2,0,1], B = [-1,1,-1], C = [2,-2,1], D = [-1,-2,0]$
2. $A = [2,0,1], B = [-1,1,-1], C = [2,-2,1], D = [-1,-2,1]$
3. $A = [2,0,1], B = [-1,1,-1], C = [2,-2,1], D = [-1,-2,2]$
4. $A = [2,0,1], B = [-1,1,-1], C = [2,-2,1], D = [-1,-2,3]$
5. $A = [0,0,1], B = [-1,1,-1], C = [2,-2,1], D = [-1,-2,7]$
6. $A = [1,0,1], B = [-1,1,-1], C = [2,-2,1], D = [-1,-2,7]$
7. $A = [2,0,1], B = [-1,1,-1], C = [2,-2,1], D = [-1,-2,7]$
8. $A = [3,0,1], B = [-1,1,-1], C = [2,-2,1], D = [-1,-2,7]$
9. $A = [2,0,2], B = [-1,0,-1], C = [2,-2,1], D = [-1,-2,7]$
10. $A = [2,0,2], B = [-1,1,-1], C = [2,-2,1], D = [-1,-2,7]$

11. $A=[2,0,2]$, $B=[-1,2,-1]$, $C=[2,-2,1]$, $D=[-1,-2,7]$

12. $A=[2,0,2]$, $B=[-1,3,-1]$, $C=[2,-2,1]$, $D=[-1,-2,7]$

13. $A=[2,0,1]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,0]$, $D=[-1,-2,5]$

14. $A=[2,0,1]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,1]$, $D=[-1,-2,5]$

15. $A=[2,0,1]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,2]$, $D=[-1,-2,5]$

16. $A=[2,0,1]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,3]$, $D=[-1,-2,5]$

17. $A=[2,0,0]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,1]$, $D=[-1,-2,5]$

18. $A=[2,0,1]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,1]$, $D=[-1,-2,5]$

19. $A=[2,0,2]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,1]$, $D=[-1,-2,5]$

20. $A=[2,0,3]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,1]$, $D=[-1,-2,5]$

21. $A=[2,0,1]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,1]$, $D=[0,-2,5]$

22. $A=[2,0,1]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,1]$, $D=[1,-2,5]$

23. $A=[2,0,1]$, $B=[-1,1,-1]$, $C=[2,-2,1]$, $D=[2,-2,5]$

Volba b2) Určete vlastní čísla a vlastní vektory pozitivně definitní matice A, negativně definitní matice B a indefinitní matice C (přesvědčte se, že matice splňují dané vlastnosti):

1. A=$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -10 & -4 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.
2. A=$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.
3. A=$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
4. A=$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -16 & -6 \\ -6 & -16 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.
5. A=$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -14 & -8 \\ -8 & -14 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.
6. A=$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -12 & -10 \\ -10 & -12 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

7. A=$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -16 & -10 \\ -10 & -16 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

8. A=$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -14 & -12 \\ -12 & -14 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$.

9. A=$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -18 & -8 \\ -8 & -18 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$.

10. A=$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -16 & -2 \\ -2 & -16 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

11. A=$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -16 & 2 \\ 2 & -16 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

12. A=$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -12 & 10 \\ 10 & -12 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

13. A=$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -14 & 8 \\ 8 & -14 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

14. A=$\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -16 & 6 \\ 6 & -16 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$.

15. A=$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

16. A=$\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

17. A=$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

18. A=$\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -18 & 8 \\ 8 & -18 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$.

19. A=$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -14 & 12 \\ 12 & -14 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$.

20. A=$\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} -16 & 10 \\ 10 & -16 \end{pmatrix}$, C=$\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$.