## Cvičení 11

### Maticové rovnice z vyrovnávacího počtu. Vnější součin, determinant matice. Inverzní matice. Soustavy lineárních rovnic (část 2). Vlastní čísla matice.

1) Užitím Choleskyho metody obdržíme maticovou rovnici $\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l} = \mathbf{o}$. Vyjádřete její řešení $\mathbf{x}$.

2) Pro vyrovnání korelovaných měření platí $\mathbf{v} = \mathbf{F}_l^{-1}\mathbf{w}$. Matice $\mathbf{Q_f}$ korelovaných měření je $\mathbf{Q_f} = \mathbf{F}_l\mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}_l^T$. Vyjádřete $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}$.

3) Podle zákona hromadění vah odvoďte váhovou matici $\mathbf{Q_x} = \mathbf{H}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^T$ pro vyrovnání zprostředkujících měření, kde $\mathbf{H} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}$ a $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$. Odvoďte též váhovou matici $\mathbf{Q_{ff}} = \mathbf{H}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}^T$, když $\mathbf{H} = -\,\mathbf{f_x}^T\,\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}$.

4) Z podmínky $2\mathbf{P}\mathbf{v} - 2\mathbf{A}\mathbf{k} = \mathbf{o}$ odvoďte tzv. rovnice oprav $\mathbf{v}$. Rovnice oprav $\mathbf{v}$ dosaďte do přetvořených podmínkových rovnic $\mathbf{A}^T\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{o}$ pro vyrovnání pomocí korelát. Obdržíte normální rovnice pro výpočet pomocných neznámých $\mathbf{k}$ (tzv. rovnice korelát). Zde můžeme označit $\overline{\mathrm{N}} = \mathbf{A}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$. Určete vztah pro koreláty $\mathbf{k}$ a vyjádřete $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}$.

Opakování:
Vypočítejte obsah trojúhelníka *ABC*, jestliže *A*=[1,2], *B*=[6,1], *C*=[4,8].
Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu *ABCDEFGH*, jestliže *A*=[1,0,2], *B*=[8,6,1], *E*=[3,6,10], *D*=[6,0,5].
Vypočítejte objem čtyřstěnu *ABCD*, jestliže:
a) *A*=[2,0,1], *B*=[-1,1,-1], *C*=[2,-2,1], *D*=[-1,-2,-3].
b) *A*=[2,0,1], *B*=[-1,3,-1], *C*=[1,-1,3], *D*=[4,0,6].
c) *A*=[1,0,1], *B*=[0,6,-9], *C*=[1,9,6], *D*=[2,-1,-1].
d) *A*=[-2,0,1], *B*=[4,1,2], *C*=[6,5,0], *D*=[0,-1,5].

5) Určete *a* tak, aby objem čtyřstěnu *ABCD*, *A*=[2,0,1], *B*=[-1,1,-1], *C*=[2,-2,1], *D*=[-1,-2,*a*], byl roven 3.

6) Vypočtěte determinant, tzv. jakobián, pro substituci do: a) polárních, b) cylindrických, c) sférických souřadnic:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix},\ \text{b)}\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},\ \text{c)}\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \\ -\rho\cos\varphi\sin\lambda & \rho\cos\varphi\cos\lambda & 0 \\ -\rho\sin\varphi\cos\lambda & -\rho\sin\varphi\sin\lambda & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

7) Matice A, B jsou čtvercové regulární matice hodnosti 2.

$|\mathrm{xA}| =$ , $|\mathrm{A}^{-1}| =$ , $|2\mathrm{A}^T\mathrm{B}^T| =$ , $|(\mathrm{xB})^{-1}| =$

$|2\mathrm{xA}^{-1}| =$ , $|\mathrm{x}(\mathrm{B}^T)^{-1}| =$ , $|(2\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A})^2| =$

8) Z daných rovnic vypočítejte X, jestliže K, L, M, jsou čtvercové regulární matice stejné hodnosti: a) KXL=2KX+M, b) XM-L=M-4X.

9) Získejte matici X:

a) X$A$ – E = 2X + $A$, kde $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}X+3X=\begin{pmatrix}5 & 12\\ -8 & -4\end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 5\\ 6 & 1\end{pmatrix}$,

d) $AX+X=A^2-E$, kde $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

10) Pomocí inverzní matice vyřešte soustavy lineárních rovnic:

a) $\begin{aligned}3x-y+z&=8\\ x+2y-z&=3\\ 2x-3y+z&=0\end{aligned}$, b) $\begin{aligned}2x+y+5z&=11\\ -x+4y&=-1\\ 2x-3z&=10\end{aligned}$.

11) Vypočítejte determinanty:

a) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -1\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}-2 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix}1 & 0 & a & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ a & 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix}a & 0 & 1 & 1\\ b & 1 & 1 & 0\\ c & 1 & 0 & 1\\ d & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -4 & -1\\ a & b & c & d\end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix}0.1 & 2 & 3 & 40 & 5\\ 0.4 & 7 & 6 & 70 & 8\\ 0.2 & 5 & 9 & 100 & 11\\ 0.5 & 9 & 1 & 10 & 1\\ 0.9 & 1 & 2 & 30 & 4\end{vmatrix}$.

12) Určete, pro která $\lambda \in R$ má daná soustava lineárních rovnic právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, nebo nemá řešení:

a) $\begin{aligned}x+y+\lambda z&=\lambda^2\\ x+\lambda y+z&=\lambda\\ \lambda x+y+z&=1\end{aligned}$, b) $\begin{aligned}x+(\lambda+1)y+z&=-2\\ x+(\lambda+1)y+2z&=-5\\ \lambda x+6y+2z&=5\lambda\end{aligned}$.

13) Najděte báze vektorového prostoru všech řešení daných soustav homogenních lineárních rovnic:

a) $\begin{aligned}3x_1+x_2-x_3+x_4&=0\\ x_1-x_2+3x_3+2x_4&=0\\ 5x_1+2x_2+x_3-x_4&=0\\ 3x_1+5x_3&=0\end{aligned}$, b) $\begin{aligned}x_1-x_2+3x_3+5x_4&=0\\ 2x_1+x_2-4x_3+6x_4&=0\\ x_1+2x_2+x_3-x_4&=0\\ 3x_1-x_2+3x_3+x_4&=0\end{aligned}$,

c) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 \qquad &= 0 \\ x_1 - 7x_2 - 11x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$ , d) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 12x_5 &= 0. \end{aligned}$

14) Rozhodněte, zda je matice A pozitivně definitní, negativně definitní, indefinitní, pozitivně semidefinitní či negativně semidefinitní a určete její **vlastní čísla**:

a) A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, b) A=$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, c) A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, d) A=$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, e) A=$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$,
f) A=$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, g) A=$\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, i) A=$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, j) A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.