

Cvičení 6

Derivace a vlastnosti funkce. Graf funkce.

Opakování. **Načrtněte graf funkce** f , která má požadované vlastnosti:

- a) $f(3)=1$, $f'(3)=0$, $x=3$ je inflexní bod, $f'(x)>0$ pro $x>3$.
- b) $f(-1) = 1$, $f'(x) < 0$ pro $x < -1$, $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$ pro $x > -1$.
- c) $f(3) = 5$, $f'(x) > 0$ pro $x < 3$, $f'(3) = 0$, $f'(x) > 0$ pro $x > 3$.
- d) $(-2,-1)$ a $(2,5)$ leží na grafu funkce f , $f'(-2) = 0$, $f'(2) = 0$, $f''(x) > 0$ pro $x < 0$, $f''(0) = 0$, $f''(x) < 0$ pro $x > 0$.
- e) $f'(4) = f'(10) = 0$, $f'(x) < 0$ pro $|x| < 2$, $f'(x) \geq 0$ pro $2 < x < 10$, $f'(x) < 0$ pro $x > 10$, $f'(x) = 1$ pro $x < -2$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1$.
- f) $f'(5) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$, $f'(x) < 0$ pro $x < 3$ a pro $x > 5$, $f'(x) > 0$ pro $3 < x < 5$.
- g) $f'(2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $f'(x) < 0$ pro $0 < x < 2$ a pro $x > 2$, f je lichá funkce.

1) **Ověřte**, že funkce f má v bodě x_0 stacionární bod, ale nemá v tomto bodě extrém.

- a) $f(x) = x^5$, $x_0 = 0$,
- b) $f(x) = 2 + (5-x)^3$, $x_0 = 5$.

2) **Pro která reálná čísla** $a, b \in \mathbb{R}$ **má funkce** $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ **lokální extrémy** v bodech -1 a -3 ?

*3) **Určete parametry** a, b, c, d **tak, aby funkce** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **měla lokální maximum** rovné 3 v bodě -2 a lokální minimum rovné 0 v bodě 1.

*4) **Dokažte, že funkce** $f(x) = x^{2n-1} + x^n + x + 1$, kde n je liché přirozené číslo větší než osm, **nemá lokální extrém.**

*5) **Dokažte, že funkce** $f(x) = x^{2n-1} - x^n + x + 1$, kde n je liché přirozené číslo větší než osm, **má lokální extrém.**

6) Vyšetřete průběh daných funkcí a nakreslete jejich graf:

a) $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$, c) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$, d) $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}$,

*e) $f(x) = x \arctg \frac{1}{x}$.

Domácí cvičení 6 – analytická geometrie (část 1):

1. V trojúhelníku ABC jsou dány vrcholy $A = [2,7]$, $B = [8,-3]$ a těžiště $T = [0,0]$. Určete vrchol C a délky těžnic.
2. V trojúhelníku ABC , $A = [2,5]$, $B = [5,8]$, $C = [8,2]$ napište rovnice stran a vypočítejte jejich délky.
3. V trojúhelníku ABC , $A = [2,5,1]$, $B = [5,8,2]$, $C = [8,2,-1]$ napište rovnice stran a vypočítejte jejich délky.
4. V trojúhelníku ABC , $A = [2,5,1]$, $B = [5,8,2]$, $C = [8,2,-1]$ napište rovnice těžnic a určete těžiště.

5. V trojúhelníku ABC , $A = [2,5]$, $B = [5,8]$, $C = [8,2]$ napište rovnice výšek a určete jejich průsečíky.
6. V trojúhelníku ABC , $A = [2,5]$, $B = [5,8]$, $C = [8,2]$ vypočítejte délky výšek.
7. Určete délku úsečky, kterou na přímce MN , $M = [-4,9]$, $N = [12,-3]$, vytínají osy x,y .
8. Určete délku úsečky, kterou na přímce MN , $M = [4,9,3]$, $N = [12,3,5]$, vytínají souřadnicové roviny (x,y) a (z,y) .
9. Určete délku úsečky, kterou na přímce MN , $M = [4,9,3]$, $N = [12,3,5]$, vytínají souřadnicové roviny (x,y) a (z,x) .
10. Určete délku úsečky, kterou na přímce MN , $M = [4,9,3]$, $N = [12,3,5]$, vytínají souřadnicové roviny (x,z) a (z,y) .
11. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $M = [8,3]$ a s osami x,y určuje pravoúhlý trojúhelník o obsahu 50cm^2 .
12. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $M = [3/2,3]$ a na osách x,y vytíná úseky, jejichž součet je 10.
13. K bodu $A = [-3,8]$ určete bod souměrný podle přímky $X = [-2,1] + t(3,4)$.
14. K bodům A,B,C , $A = [4,13]$, $B = [-5,1]$, $C = [10,7]$, najděte bod D tak, aby $ABCD$ byl rovnoběžník. Napište rovnice úhlopříček.
15. Určete a tak, aby přímka $p: x = 2 + t$, $y = 1 + a - 2t$, $t \in R$, procházela průsečíkem přímek $(P = [1,3], \mathbf{u} = (-1,2))$, $(Q = [1,4], \mathbf{v} = (2,-3))$.
16. Určete a tak, aby přímka $(1+a)x - (2-3a)y + a = 0$ byla rovnoběžná s přímkou $x + 8y - 1 = 0$.
17. Určete vzájemnou polohu přímky $(P = [1,2,3], \mathbf{u} = (1,-2,4))$ a roviny $2x + 3y + z - 3 = 0$.
18. Určete vzájemnou polohu rovin $2x - y + 3z + 2 = 0$, $2x - y - z = 0$.
19. Určete vzájemnou polohu přímky $X = [1,0,2] + t(-1,1,-3)$, $t \in R$, a roviny $x - 2y - z + 1 = 0$.
20. K bodům A,B,C , $A = [4,13]$, $B = [-5,1]$, $C = [10,7]$, najděte bod D tak, aby $ABCD$ byl rovnoběžník. Vypočítejte výšku na stranu AB .
21. Určete průsečík tří rovin: $3x - y + z + 1 = 0$, $x - 2y + z + 5 = 0$,
 $X = [-8 + r - 3s, -1 + r, 2 + 3s]$, $r, s \in R$.
22. Vypočítejte skalární součin vektorů \mathbf{u} , \mathbf{v} , pro které platí: $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 1/2$,
 $\varphi = 135^\circ$.
23. Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD , $A = [1,0,-1]$, $B = [2,1,1]$, $C = [1,2,-2]$,
 $D = [0,-1,2]$.