Cvičení 4
Asymptoty grafů funkcí. Derivace funkce.

Opakování. Bod T leží na grafu funkce $y=f(x)$. V bodě T určete směrnici tečny grafu funkce $f(x)$: a) $T=[4,2]$, $y=\sqrt{x}$, b) $T=[1/2,2]$, $y=1/x$.

1) Určete definiční obor a asymptoty grafu funkce $f(x)$.
   a) $f(x) = x-2 \operatorname{arctg} x$, b) $f(x) = x-\sin 2x$, c) $f(x) = x-\cos 2x$, d) $f(x) = \operatorname{tgh} x$,
   e) $f(x) = \operatorname{cotgh} x$, f*) $f(x) = x-2 \ln x$, g*) $f(x) = x-2\operatorname{tg} x$.

2) Určete definiční obor a asymptoty grafu funkce $f(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (součet geometrické řady s kvocientem x)

b) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ (hustota normovaného normálního rozdělení)

c) $f(x) = \dfrac{x(2-x)}{(1-x)^2}$ (čtverec druhé excentricity referenčního elipsoidu vzhledem ke zploštění x)

d) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{h}{x}$ (úhel sklonu délkového elementu čáry mezi vrstevnicemi s rozdílem výšek h vzhledem k jejich rozestupu x, volte $h \in \mathbf{N}$)

e) $f(x) = \ln \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (izometrická šířka vzhledem k zeměpisné šířce x příp. jedna ze zobrazovacích rovnic Mercatorova zobrazení)

f*) $f(x) = \dfrac{RU}{\cos x}$ (délka loxodromy mezi dvěma body vzhledem k jejímu azimutu x ; U je rozdíl zeměpisných šířek daných bodů, volte $U \in (0,\pi)$)

3) Ukažte, že přímky $y = \dfrac{b}{a}x$ a $y = -\dfrac{b}{a}x$ jsou šikmé asymptoty hyperboly $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

4) Užijte dvakrát pravidlo na derivování součinu a dokažte, že pro diferencovatelné funkce f, g, h platí: $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

5) Vypočítejte derivaci funkce $f(x)$ v daných bodech.
   $f(x) = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$ v bodech $-1, -2, -3$.

6) Dokažte, že derivace sudé funkce je funkce lichá a derivace funkce liché je funkce sudá.

7) $f(x)$ je diferencovatelná funkce. Určete vzorec pro y'.
   a) $y = x^2 f(x)$,
   b) $y = f(x^2)$,
   c) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$,

d) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$,

e) $y = \dfrac{1 + x\, f(x)}{\sqrt{x}}$.

8) Nakreslete graf dané funkce a určete body, ve kterých funkce není diferencovatelná.
a) $y = x^{2/3}$, *b)* $y = |x-6|$, *c)* $y = x|x|$,

d) $y = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{x^2 + x}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \\ 0, & x = 0 \\ 1 - x, & x \geq 1 \end{cases}$, e) $y = \begin{cases} -1 - 2x, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$,

f) $y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 5 - x, & 0 < x < 4 \\ 1/(5-x), & x \geq 4 \end{cases}$

Domácí cvičení 4 – tečna a normála, limita fce:
V úloze *a* napište obecné rovnice tečny a normály grafu funkce *f* v daném bodě *c*, v úloze *b* vypočítejte limitu l´Hospitalovým pravidlem.

1. a) $f(x) = x + \sqrt{x}$, $c = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{e^{3x} - 2x - 1}{\sin^2 2x}$

2. a) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $c = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$,

3. a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $c = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos x}{x}$,

4. a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $c = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$,

5. a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $c = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin x}{\ln x}$,

6. a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$, $c = -1$ b) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{cotg} x + x - \pi/2}{(x - \pi/2)^3}$,

7. a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$, $c = -1$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$,

8. a) $f(x) = \cos 2x - 4 \sin x$, $c = 0$ b) $\lim\limits_{x \to 1-} \log x \ln(1 - x)$,

9. a) $f(x) = \dfrac{1}{2} \sin 2x + 2 \cos x$, $c = 0$ b) $\lim\limits_{x \to 0+} x^n \ln x$, $(n > 0)$,

10. a) $f(x) = \sin^2 x + \cos 2x$, $c = \pi/4$ b) $\lim\limits_{x \to \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$,

11. a) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$, $c=\pi/2$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$,

12. a) $f(x)=e^x(x^2-2x+2)$, $c=0$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$,

13. a) $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$, $c=0$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$,

14. a) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $c=0$ b) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{\sin x}\right)$,

15. a) $f(x)=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $c=\pi/2$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$,

16. a) $f(x)=\ln\sqrt{x(x+1)}$, $c=1$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$,

17. a) $f(x)=\arcsin\sqrt{x}$, $c=1/2$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$,

18. a) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}$, $c=0$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$,

19. a) $f(x)=\operatorname{arccotg}\frac{1}{\sqrt{x}}$, $c=1$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$,

20. a) $f(x)=\arccos\sqrt{2x}$, $c=1/4$ b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$,

21. a) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $c=1$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x^2}$,

22. a) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $c=0$ b) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\ln\sin x}{x-\pi/2}$.