Úvod do numerické matematiky.
Přednáška pro posluchače informatiky.
Zimní resp. Letní semestr 2/2

Ivo Marek, Petr Mayer a Bohuslav Sekerka

0.1 Racionální aproximace exponenciální funkce

Jednou z řady ekvivalentních definic exponenciální funkce může posloužit formule daná Taylorovou řadou. Pro všechna komplexní čísla je platný rozvoj

$$\exp\{z\} \equiv e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},\ z \in \mathcal{C}^1. \tag{0.1}$$

Snadno si uvědomíme, že platí

$$|e^z| \leq 1 \text{ pro } z \in \mathcal{C}^1, \Re z \leq 0 \tag{0.2}$$

a dále, že

$$\lim_{z\to\infty} e^{|z|} = 0. \tag{0.3}$$

Dále nechť $P = P(z)$ a $Q = Q(z)$ označují polynomy s komplexními koeficienty. Bude-li to vhodné, budeme indexy vyznačovat odpovídající stupeň. Tedy, na př.

$$P_0(z) = 1,\ P_1(z) = 2z + 1/2,\ Q_1(z) = 1 - z,$$

a tak podobně.

Buď $R = R(z)$ racionální funkce daná polynomy P a Q:

$$R(z) = \frac{P(zP}{Q(z)},\ z \in \mathcal{C}^1. \tag{0.4}$$

V následujícím textu budeme předpokládat, že polynomy v (0.4) jsou nesoudělné, tedy, že neexistují polynomy $\tilde{P}, \tilde{Q}$, při čemž stupeň polynomu $\tilde{Q}$ je nižší než stupeň polynomu Q, takové, že

$$R(z) = \frac{P\tilde{(z)}}{Q\tilde{(z)}},\ z \in \mathcal{C}^1.$$

Definice 0.1 *Řekneme, že racionální funkce R je* Padéovou aproximací exponenciální funkce *řádu p, pakliže platí vztahy*

$$e^z - R(z) = g(z)z^{p+1} = 0(z^{p+1}),\ z \in \Omega_0, \tag{0.5}$$

kde Ω_0 je nějaké okolí bodu $0 \in \mathcal{C}^1$ a přitom

$$0 \neq \kappa = \sup\{|g(z)| : z \in \Omega_0\} < +\infty.$$

Příklady.

$$R_{1,0}(z) = \frac{P_1(z)}{Q_0(z)} = 1 + z,\ P_1(z) = z,\ Q_0(z) = 1, \tag{0.6}$$

$$R_{0,1}(z) = \frac{P_0(z)}{Q_1(z)} = \frac{P_0(z)}{Q_1(z)} = \frac{1}{1-z},\ P_0(z) = 1, Q_1(z) = 1 - z, \tag{0.7}$$

$$R_{1,1}(z) = \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \frac{2+z}{2-z},\ P_!(z) = 2 + z,\ Q_1(z) = 2 - z. \tag{0.8}$$

Snadno zjistíme, že

$$R_{0,1}(z) = 1 + z + z^2 + ...,$$

a

$$R_{1,1}(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + ...$$

a tedy,

$$|e^z - R_{1,0}(z)| = 0(z^2),\ p = 1, \tag{0.9}$$

$$|e^z - R_{0,1}(z)| = 0(z^2),\ p = 1, \tag{0.10}$$

$$|e^z - R_{1,1}(z)| = 0(z^3),\ p = 2. \tag{0.11}$$

Definice 0.2 *Racionální aproximace R exponenciální funkce se nazývá* A$-$přijatelnou*, platí-li vztahy*

$$|R(z)| \leq 1 \text{ pro } \Re z \leq 0. \tag{0.12}$$

Příklady.

Snadno ověříme, že $R_{1,0}$ v (0.6) není A-přijatelná. Na druhé straně však, $R_{0,1}$ v (0.7) a $R_{1,1}$ v (0.8) A-přijatelné jsou a navíc pro ně platí

$$\lim_{z\to\infty} |R_{0,1}(z)| = 0 \tag{0.13}$$

a

$$\lim_{z\to\infty} |R_{1,1}(z)| = 1. \tag{0.14}$$

Definice 0.3 *Racionální aproximace $R_{1,0}, R_{0,1}$ a $R_{1,1}$ v (0.6)-(0.8) nesou názvy svých původních autorů. Aproximace $R_{1,0}$ se tedy nazývá* Eulerovou přímou aproximací*, $R_{0,1}$* Eulerovou zpětnou aproximací *a $R_{1,1}$* aproximací Cranka-Nicholsonové*.*

Test 0.1 *Buď λ takové, že $\Re\lambda < 0$ je v absolutní hodnotě dostatečně velké číslo. Jest tedy číslo $|e^\lambda|$ velmi malé. Ptáme se, jak tuto skutečnost zprostředkovávají jednotlivé racionální aproximace exponenciální funkce.*

Protože v tomto případě,

$$\lim_{\Re\lambda \to -\infty} |e^\lambda| = \lim_{\Re\lambda \to -\infty} e^{\Re\lambda} = 0,$$

1^0 *Eulerova dopředná aproximace dává*

$$\begin{aligned} \left|e^\lambda - R_{1,0}(\lambda)\right| &= \left|e^\lambda - 1 - \lambda\right| \\ &\geq |\lambda| - 1 - e^{\Re\lambda}. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že tato aproximace poskytuje libovolně velkou chybu.

Naproti tomu,

2^0 *pro zpětnou Eulerovu metodu zjistíme, že platí*

$$\begin{aligned} \left|e^\lambda - R_{0,1}(\lambda)\right| &= \left|e^\lambda - \tfrac{1}{1-\lambda}\right| \\ &\leq \textstyle\sum_{k=2}^\infty \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=2}^\infty z^k \\ &= O(|z|^2) \end{aligned}$$

takže chyba aproximace je pro $\Re\lambda < 0$ malá.

3^0 *Ještě uspokojivější se jeví situace pro aproximaci Crankovu-Nicholsonové,*

$$\left|e^\lambda - R_{1,1}(\lambda)\right| = \left|e^\lambda - \frac{2+\lambda}{2-\lambda}\right| = O(|z|^3).$$