2. CVIČENÍ M1A

ALEŠ NEKVINDA

Definiční obory funkcí

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$

$$f(x) = \sqrt{\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} \qquad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{3}{8}\pi + k\pi, \frac{1}{8}\pi + k\pi\right]$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 6x + 8) \qquad x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$$

Omezenost funkcí

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4} \qquad \text{Je omezená}$$

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad \text{Je omezená zdola}$$

$$f(x) = 2 + \sin^2 x \qquad \text{Je omezená}$$

Monotonie funkcí

$$f(x) = \frac{x}{1+x},\ x \in (-1, \infty) \qquad \text{Je rostoucí}$$

Sudost, lichost, periodičnost funkce

$$f(x) = x^2 \qquad \text{Je sudá}$$

$$f(x) = x^3 \qquad \text{Je lichá}$$

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} \qquad \text{Je sudá}$$

$$f(x) = \sin x \qquad \text{Je lichá a periodická}$$

$$f(x) = \cos x \qquad \text{Je sudá a periodická}$$

$$f(x) = 1 + x \qquad \text{Není sudá, lichá ani periodická}$$

Elementární funkce

$$f(x) = x^a, a^x, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x, \ln_a x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$$

Inverzní funkce

$$f(x) = 4x + 2 \qquad f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$$
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \qquad f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

Skládání funkcí

$$f(x) = \mathrm{e}^x, g(x) = \sin x \qquad f(g(x)) = \mathrm{e}^{\sin x},\ g(f(x)) = \sin(\mathrm{e}^x)$$

Domácí cvičení

(1)

Najděte definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 5\ln x + 6}$ $\quad x \in (0, \mathrm{e}^2] \cup [\mathrm{e}^3, \infty)$

(2)

Najděte definiční obor funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \sin x}}$ $\quad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big(-\frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \Big)$

(3)

Je funkce omezená? $f(x) = \dfrac{2x^3}{1+x^6}$ $\quad$ Ano

(4)

Je funkce klesající ? $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2},\ x \in (2, \infty)$ $\quad$ Ano

(5)

Najděte definiční obor funkce. Je lichá? $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, Ano

(6)

Najděte inverzní funkci k $f(x) = \sqrt{9-x^2}, x \in [0,3]$ $\quad f^{-1}(x) = \sqrt{9-x^2}$

(7)

$f(x) = x^3, g(x) = \cos x$. Pak $f(g(x)) = ?,\ g(f(x)) = ?$ $\quad f(g(x)) = \cos^3 x,\ g(f(x)) = \cos(x^3)$

Řešení domácího cvičení

(1) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 5\ln x + 6}$. Podmínky jsou

$$x > 0,$$
$$\ln^2 x - 5\ln x + 6 \geq 0.$$

Označme $y = \ln x$ a máme

$$y^2 - 5y + 6 \geq 0.$$

Kořeny jsou

$$y_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$

Parabola $y^2 - 5y + 6$ je otočena nahoru, tedy

$$y^2 - 5y + 6 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; y \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty).$$

Tedy

$$\ln x \in \;(-\infty, 2] \cup [3, \infty) \;\Leftrightarrow\; x \in (0, \mathrm{e}^2] \cup [\mathrm{e}^3, \infty).$$

Ještě je podmínka $x > 0$, tedy $x \in (0, \infty)$. Pak

$$D(f) = (0, \infty) \cap ((0, \mathrm{e}^2] \cup [\mathrm{e}^3, \infty)) = (0, \mathrm{e}^2] \cup [\mathrm{e}^3, \infty).$$

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \sin x}}$. Podmínka je

$$\frac{1}{2} + \sin x > 0.$$

Tedy

$$\sin x > -\frac{1}{2}.$$

Protože $\sin \pi/6 = 1/2$, je $x \in (-\pi/6, \pi + \pi/6) + 2k\pi$, tedy

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Big(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Big).$$

(3) Je funkce $f(x) = \frac{2x^3}{1+x^6}$ omezená? Dokážeme, že $|f(x)| \leq 1$.

$$\frac{2|x^3|}{1 + x^6} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2|x^3| + x^6 \geq 0.$$

Pro $x \geq 0$ je $|x^3| = x^3$ a

$$1 - 2|x^3| + x^6 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2x^3 + x^6 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (1 - x^3)^2 \geq 0.$$

To je ovšem vidět. Pro $x < 0$ je $|x^3| = -x^3$ a

$$1 - 2|x^3| + x^6 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + 2x^3 + x^6 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (1 + x^3)^2 \geq 0.$$

To je ovšem také vidět.

(4) Je funkce $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$, $x \in (2, \infty)$ klesající ? Nechť $2 < x < y$. Pak

$$\begin{aligned} &\frac{x-1}{x-2} > \frac{y-1}{y-2} \\ \Leftrightarrow\; &(x-1)(y-2) > (y-1)(x-2) \\ \Leftrightarrow\; &xy - 2x - y + 2 > xy - 2y - x + 2 \\ \Leftrightarrow\; &-2x - y > -2y - x \\ \Leftrightarrow\; &y > x \end{aligned}$$

což je zřejmé, neboť jsme měli $2 < x < y$.

(5) Najděte definiční obor funkce $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. Je lichá? Nejprve $D(f)$. Podmínka je

$$x + \sqrt{1 + x^2} > 0.$$

Zřejmě je pro $x \in \mathbb{R}$

$$1 + x^2 > x^2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{1 + x^2} > |x| \;\Rightarrow\; \sqrt{1 + x^2} > -x \;\Rightarrow\; x + \sqrt{1 + x^2} > 0.$$

Nyní lichost. Máme

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) \\ &= \ln \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \ln \frac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x). \end{aligned}$$

(6) Najděte inverzní funkci k $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [0, 3]$. Nechť $0 \le x < y \le 3$. Pak

$$x^2 < y^2 \;\Rightarrow\; 9 - x^2 > 9 - y^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{9 - x^2} > \sqrt{9 - y^2}$$

a f je klesající, tedy prostá. Existuje tedy inverzní. Prohodíme x a y a máme

$$x = \sqrt{9 - y^2} \;\Leftrightarrow\; x^2 = 9 - y^2 \;\Leftrightarrow\; y^2 = 9 - x^2 \;\Leftrightarrow\; y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Tedy

$$f^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2},\; x \in [0, 3].$$

(7) Buď $f(x) = x^3, g(x) = \cos x$. Pak

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(\cos x) = (\cos x)^3 = \cos^3 x, \\ g(f(x)) &= g(x^3) = \cos(x^3). \end{aligned}$$

Zajímavé příklady pro zvědavce, co se nudí (nepovinné)

Problém 1. *Spočtěte pomocí odmocnin*

$$\sin \frac{\pi}{12},\; \cos \frac{\pi}{12}.$$