6. CVIČENÍ M1A

ALEŠ NEKVINDA

L'Hospitalovo pravidlo

Platí: Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ a nechť existuje (třeba i nevlastní)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Potom

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklady

Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočtěte

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{2x^4-x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\mathrm{e}^{3x}-2x-1}{\sin^2 2x}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\cos x-1}$$

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$$

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln x$$

$$\lim_{x\to 1_-} \ln x \ln(1-x)$$

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

Šikmé asymptoty

Platí: Buď f funkce definovaná na nějakém (K,∞). Nechť existují reálná čísla k, q

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},$$
$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x)-kx), \text{ kde } k \text{ už známe z předchozí limity.}$$

Pak přímka $y = kx+q$ je asymptota funkce f v ∞. Analogicky v $-\infty$.

Příklady

Najďete asymptoty v $\pm\infty$

$$f(x) = \frac{4+x^3}{4-x^2}$$
$$f(x) = 5x + \frac{\sin x}{x}$$
$$f(x) = \frac{3}{x}$$

Domácí cvičení

(1) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln\sin x}{\ln x},$ $\quad 1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \mathrm{e}^{1/x^2},$ $\quad 3$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\mathrm{e}^{3x})\operatorname{cotg} x,$ $\quad 3$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right),$ $\quad \dfrac{1}{6}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0_+} \left(\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right),$ $\quad -\infty$

Najděte asymptoty v $\pm\infty$

(6) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1},$ $\quad y = 0$ v $\pm\infty$

(7) $f(x) = \dfrac{x^2 + x\operatorname{arctg} x}{x-1},$ $\quad y = x + \pi/2 + 1$ v ∞

$y = x - \pi/2 + 1$ v $-\infty$

Taylorův polynom - **Jen pro obor SI**

Nechť je dána funkce f, bod x_0 a n. Pak Taylorův polynom f v bodě x_0 stupně n je dán

$$Tf_{x_0,n}(x) = \sum_k = 0^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Příklady

$f(x) = \mathrm{e}^{3x},\ x_0 = 0,\ n = 4.\ Tf_{0,4}(x) = ?$

$$\mathrm{e}^x \doteq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Domácí cvičení

Najděte Taylorův polynom

(8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x_0 = 9,\ n = 3$

$$Tf_{3,3}(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2.3^3}(x-9) + \frac{3}{4.3^5.2}(x-9)^2 - \frac{15}{8.3^7.6}(x-9)^3$$

(9) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 0,\ n = 3$

$$Tf_{3,3}(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

Zajímavé příklady pro zvědavce, co se nudí (nepovinné)

Problém 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$