

9. CVIČENÍ M1A

ALEŠ NEKVINDA

Hodnost matice

Buď dána matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Označme $w_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, m$. Pak hodnotí A rozumíme $\dim \text{Lin}[w_1, w_2, \dots, w_m]$. Zjišťujeme ji Gaussovou eliminací.

Sčítání matic a násobení matice číslem

Buď dány matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A + B = \begin{pmatrix} a + b_{11} & a + b_{12} & a + b_{13} & \dots & a + b_{1n} \\ a + b_{21} & a + b_{22} & a + b_{23} & \dots & a + b_{2n} \\ a + b_{31} & a + b_{32} & a + b_{33} & \dots & a + b_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a + b_{m1} & a + b_{m2} & a + b_{m3} & \dots & a + b_{mn} \end{pmatrix}$$

a

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} & \dots & \alpha a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \alpha a_{m3} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Násobení matic

Jsou-li dány vektory

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_m),$$

pak skalární součin je definován

$$u.v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_mv_m = \sum_{i=1}^m u_iv_i.$$

Buď dány matice A typu mn a B typu nk

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3k} \\ \vdots & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Pak součin matic AB (v tomto pořadí) typu mk je

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2k} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3k} \\ \vdots & & & & \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj},$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Jsou to vlastně skalární součiny řádků matice A a sloupců matice B .

Příklady

Zjistěte hodnoty následujících matic.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -9 & -12 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -9 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -8 & 1 & -4 \\ 7 & 6 & -13 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & -5 & -8 & -13 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Zjistěte hodnoty následujících matic v závislosti na λ .

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \\ -2 & -2 & 3\lambda \end{pmatrix}$$

Vypočítejte

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 8 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (-3 \ 2 \ 4) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Zjistěte hodnotu následujících matic.

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad h = 2$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad h = 2$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ -7 & 10 & -20 \end{pmatrix} \quad h = 2$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad h = 3$$

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad h = 3$$

$$(6) \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad h = 4$$

Jak závisí hodnota matice v závislosti na λ .

$$(7) \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda = -\frac{6}{5} \Rightarrow \lambda = 1, h \neq -\frac{6}{5} \Rightarrow h = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ 2 & -2 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 1 \Rightarrow h = 1, \lambda = -1 \Rightarrow h = 2$$

$$\lambda \notin \{-1, 1\} \Rightarrow h = 3$$

Vypočítejte

$$(8) \quad \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 57 & -9 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$$

Zajímavé příklady pro zvědavce, co se nudí (nepovinné)

Problém 1. *Vypočítejte*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Řešení domácího cvičení

- (1) Zjistěte hodnotu následující matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Tedy $h = 2$.

- (2) Zjistěte hodnotu následující matice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tedy $h = 2$.

- (3) Zjistěte hodnotu následující matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ -7 & 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ -7 & 10 & -20 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 13 & -12 \\ 0 & 65 & -60 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & -12 & 13 \\ 0 & -60 & 65 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & -13 \\ 0 & -60 & 65 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & -13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy $h = 2$.

- (4) Zjistěte hodnotu následující matice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 14 & 12 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 14 & 12 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Tedy $h = 3$.

- (5) Zjistěte hodnotu následující matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tedy $h = 3$.

(6) Zjistěte hodnotu následující matice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $h = 4$.

(7) Jak závisí hodnota matice v závislosti na λ ?

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Zřejmě

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 6 + 5\lambda \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\lambda = -\frac{6}{5} \Rightarrow h = 1 \\ \lambda \neq -\frac{6}{5} \Rightarrow h = 2.$$

(8) Jak závisí hodnota matice v závislosti na λ ?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ 2 & -2 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ 2 & -2 & \lambda^2 + 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \lambda = 1 &\Rightarrow h = 1 \\ \lambda = -1 &\Rightarrow h = 2 \\ \lambda \notin \{-1, 1\} &\Rightarrow h = 3. \end{aligned}$$

(9) Vypočtěte

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zřejmě je

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 & -9 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$