MATEMATIKA 1

ALEŠ NEKVINDA

DIFERENCIÁLNÍ POČET

1. Přednáška

Označíme jako na střední škole $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ postupně množinu přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel.

Rozšířená reálná osa.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Platí:

$$\begin{array}{ll}
\forall\, x \in \mathbb{R} & -\infty < x < \infty; \\
\forall\, x > -\infty & x + \infty = \infty; \\
\forall\, x < \infty & x - \infty = -\infty; \\
\forall\, x \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\} & x.(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{pokud } x > 0; \\ \mp\infty & \text{pokud } x < 0; \end{cases} \\
\forall\, x \in \mathbb{R} & \dfrac{x}{\pm\infty} = 0.
\end{array}$$

Supremum a infimum množiny.

Definice 1.1. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^*$. Horní (resp. dolní) závorou množiny M nazveme každé číslo $c \in \mathbb{R}^*$, pro které platí:*

$$x \in M \quad \Rightarrow \quad x \leq c \qquad (\textit{resp. } x \geq c).$$

Množina M je shora omezená, jestliže existuje aspoň jedna horní závora b tak, že $b < \infty$.
Množina M je zdola omezená, jestliže existuje aspoň jedna dolní závora b tak, že $b > -\infty$.
Množina M je omezená, jestliže je omezená shora i zdola.

Definice 1.2. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^*$. Existuje-li $c \in M$, c je horní (resp. dolní) závora M, pak $c = \max M$ (resp. $\min M$).*

Definice 1.3. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^*$. Jestliže $c \in \mathbb{R}^*$ je nejmenší horní závora M, nazýváme ho supremem M (píšeme $c = \sup M$).*
Jestliže $d \in \mathbb{R}^*$ je největší dolní závora M, nazýváme ho infimem M (píšeme $c = \inf M$).

Věta 1.4. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\sup M$ i $\inf M$.*

Věta 1.5. *Nechť* $c = \max M$*. Pak* $c = \sup M$*. Analogicky, nechť* $c = \min M$*. Pak* $c = \inf M$*.*

Číselné posloupnosti.

Definice 1.6. *Posloupnost je zobrazení z* $\mathbb{N}$ *do* $\mathbb{R}$*. Píšeme* $a_1, a_2, \dots$ *místo* $a(1), a(2), \dots$*.*

Definice 1.7. *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *se nazývá*

rostoucí	$a_n < a_{n+1}$;
klesající	$a_n > a_{n+1}$;
neklesající	$a_n \leq a_{n+1}$;
nerostoucí	$a_n \geq a_{n+1}$.

Všem těmto posloupnostem se říká monotónní.

Definice 1.8. *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *se nazývá*

shora omezená, pokud existuje $K < \infty$ *tak, že* $a_n \leq K$;
zdola omezená, pokud existuje $K > -\infty$ *tak, že* $a_n \geq K$;
omezená, pokud je shora omezená a zdola omezená.

Definice 1.9. *Říkáme, že posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* a *(píšeme* $\lim a_n = a$*), pokud existuje reálné číslo* a *takové, že*
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N}(m > n \Rightarrow |a_m - a| < \varepsilon).$$

Definice 1.10. *Říkáme, že posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* ∞*, pokud*
$$\forall\ K > 0\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N}(m > n \Rightarrow a_m > K).$$
Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* ∞*, pokud*
$$\forall\ K < 0\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ m \in \mathbb{N}(m > n \Rightarrow a_m < K).$$

Definice 1.11. *Buď dána posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a buď* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom posloupnost* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$*, kde* $b_k = a_{n_k}$ *nazýváme vybranou posloupností. Zkráceně píšeme* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$*.*

Věta 1.12. *Buď* $\lim a_n = a$*. Pak* $\lim a_{n_k} = a$ *pro každou vybranou posloupnost.*

Definice 1.13. *Posloupnosti, které mají reálnou limitu, se nazývají konvergentními. Ostatní se nazývají divergentními.*

Věta 1.14. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Věta 1.15. *Každá monotónní posloupnost má (konečnou či nekonečnou) limitu.*

Věta 1.16. *Z každé posloupnosti lze vybrat posloupnost, která má (konečnou či nekonečnou) limitu.*

Věty pro konkrétní výpočet limit.

Věta 1.17. *Nechť* $\lim a_n = a,\ \lim b_n = b$. *Nechť* $\odot$ *je jedno z následujících znamének:* $+,\ -,\ .,\ :$. *Nechť* $a \odot b$ *má smysl. Potom*

$$\lim(a_n \odot b_n) = \lim a_n \odot \lim b_n \quad (= a \odot b).$$

Věta 1.18. *Nechť* $\lim a_n = a,\ \lim b_n = b$. *Nechť* a^b *má smysl. Potom*

$$\lim(a_n^{b_n}) = (\lim a_n)^{(\lim b_n)} \quad (= a^b).$$

a

$$\lim |a_n| = |a|.$$

Věta 1.19. *Nechť* $a_n \le b_n \le c_n$. *Nechť* $\lim a_n = d,\ \lim c_n = d$. *Potom* $\lim b_n = d$.

Důležité limity.

Věta 1.20. *Nechť* $a > 0$. *Pak*

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1;$$

$$\lim a^n = \begin{cases} \infty & \text{pokud } a > 1; \\ 1 & \text{pokud } a = 1; \\ 0 & \text{pokud } |a| < 1; \\ \text{neexistuje,} & \text{pokud } a \le -1. \end{cases}$$

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Pokud $\alpha \in \mathbb{R}$, *pak*

$$\lim \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\alpha}.$$

Důkaz. Dokažme $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Zřejmě je $\lim \sqrt[n]{n} \ge 1$ pro každé n. Existují tedy $\varepsilon_n \ge 0$ taková, že

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \varepsilon_n. \tag{1.1}$$

Umocněním a užitím binomické věty máme

$$n = (1+\varepsilon_n)^n = 1 + \tbinom{n}{1}\varepsilon_n + \tbinom{n}{2}\varepsilon_n^2 + \tbinom{n}{3}\varepsilon_n^3 + \dots \tbinom{n}{n}\varepsilon_n^n \ge \tbinom{n}{2}\varepsilon_n^2.$$

Užijeme-li vztahu $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, dostaneme tedy nerovnost

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon_n^2 \le n$$

a tedy

$$\varepsilon_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Z toho plyne
$$\lim \varepsilon_n = 0$$
což dává s (1.1) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Zdůvodněme, že pro $\alpha > 0$ platí
$$\lim \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \mathrm{e}^\alpha.$$
Nejprve dokažme, že existuje limita $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Položme
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
Dokážeme, že a_n je neklesající a b_n nerostoucí. Vyjdeme ze známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Pro $p_1, p_2, \dots, p_k \geq 0$ platí
$$\sqrt[k]{p_1 p_2 \dots p_k} \leq \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_k}{k}. \tag{1.2}$$
Užijeme nerovnost (1.2) pro $k = n+1$, $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1 + \frac{1}{n}, p_{n+1} = 1$, dostaneme
$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{n(1 + \frac{1}{n}) + 1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$
Úpravou máme
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$
což je totéž jako $a_n \leq a_{n+1}$. Tedy a_n je vskutku neklesající. Užijme opět nerovnost (1.2) pro $k = n+2$, $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}, p_{n+2} = 1$ a dostaneme
$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}} \leq \frac{\frac{n+1}{1+\frac{1}{n}} + 1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}},$$
což dává
$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2},$$
tedy $b_n \geq b_{n+1}$ a posloupnost b_n je vskutku klesající.

Zřejmě je $a_n \leq b_n \leq b_1 = 4$ a posloupnost a_n je tedy shora omezená, neklesající a má tedy limitu. Označme ji e. Buď nyní $\alpha > 0$. Pak
$$\lim \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim \left[(1 + \frac{1}{n/\alpha}\right)^{(n/\alpha)}\Bigg]^\alpha = \mathrm{e}^\alpha.$$
$\square$

Praktický výpočet limit.

Příklad. *Vypočítejte*
$$\lim \frac{n^3 - 3n^2 + 2n - 1}{3n^3 - 6n + 5}.$$

Řešení.
$$\lim \frac{n^3 - 3n^2 + 2n - 1}{3n^3 - 6n + 5} = \lim \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{6}{n^2} + \frac{5}{n^3}} = \frac{1 - 0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = \frac{1}{3}.$$
$\square$

Příklad. *Vypočítejte*

$$\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\infty}+\sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.\end{aligned}$$

□

Příklad. *Vypočítejte*

$$\lim\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{\frac{n^3-1}{5n}}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}\lim\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{\frac{n^3-1}{5n}} &= \lim\left(1+\frac{-2}{n^2+3}\right)^{(n^2+3)\frac{n^3-1}{5n(n^2+3)}}\\ &= \lim\left[\left(1+\frac{-2}{n^2+3}\right)^{(n^2+3)}\right]^{\frac{n^3-1}{5n^3+15n}} = \lim\left[\left(1+\frac{-2}{n^2+3}\right)^{(n^2+3)}\right]^{\frac{1-1/n^3}{5+15/n^2}}\\ &= (\mathrm{e}^{-2})^{1/5} = \mathrm{e}^{-2/5}.\end{aligned}$$

□

Příklad. *Vypočítejte*

$$\lim\frac{1+(-1)^n}{2}.$$

Řešení. Dosadíme $n=1,2,\dots$ a vidíme, že jde o posloupnost

$$0,1,0,1,0,\dots.$$

Tato posloupnost nemá limitu.

□

2. Přednáška

Pojem reálné funkce.

Definice 2.1. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Předpis f, který každému prvku $x \in M$ přiřadí reálné číslo, nazýváme reálnou funkcí reálné proměnné (krátce funkcí). Množinu M nazýváme definičním oborem funkce f a značíme též $\mathcal{D}(f)$.*

Zápis funkcí.

$$f(x) = x^2, \qquad x \in \langle -1, 3\rangle;$$
$$f : y = x^2, \qquad x \in \langle -1, 3\rangle;$$
$$f : x \to x^2, \qquad x \in \langle -1, 3\rangle;$$
$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ je iracionální,} \\ 1 & x \text{ je racionální.} \end{cases}$$

Graf funkce a obor hodnot.

Definice 2.2. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Potom množinu bodů v rovině $\{[x, f(x)]; x \in M\}$ nazýváme grafem funkce a množinu $\{f(x); x \in M\}$ nazýváme oborem hodnot.*

Příklad. *Dána funkce $f(x) = x^2, x \in \langle -1, 3\rangle$. Pak $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 3\rangle$, $\mathcal{H}(f) = \langle 0, 9\rangle$ a grafem je část paraboly.*

Funkce monotónní, prostá, sudá, lichá, peridocká.

Definice 2.3. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Říkáme, že funkce f je*

(i) *rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající), pokud pro $\forall\ x, y \in M$ platí:*
$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\ \ (f(x) > f(y), f(x) \geq f(y), f(x) \leq f(y));$$
(ii) *prostá, pokud pro $\forall\ x, y \in M$ platí:*
$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y);$$
(iii) *sudá (lichá), pokud pro $\forall\ x \in M$ platí:*
$$f(-x) = f(x)\ \ (f(-x) = -f(x));$$
(iv) *periodická, pokud existuje $p \neq 0$ tak, že pro $\forall\ x \in M$ platí:*
$$f(x + p) = f(x).$$

Příklady. *Funkce $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$ je rostoucí,*
funkce $f(x) = x^2$, $x \in [-\infty, 0]$ je klesající,
funkce $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$ je sudá,
funkce $f(x) = x^3$, $x \in (-\infty, \infty)$ je lichá,
funkce $f(x) = \sin x$, $x \in (-\infty, \infty)$ je periodická.

Lokální extrémy funkce.

Definice 2.4. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je daná funkce a $x_0 \in M$. Jestliže existuje $\lambda > 0$ tak, že*

$$f(x) \leq \ (<, \geq, >)\ f(x_0) \quad \textit{pro všechna} \quad x \in (x_0 - \lambda, x_0) \cup (x_0, x_0 + \lambda),$$

říkáme, že f má v x_0 lokální maximum (ostré lokální maximum, lokální minimum, ostré lokální minimum).

Funkce složená.

Definice 2.5. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : \mathcal{H}(f) \to \mathbb{R}$ jsou dané funkce. Potom funkci $h : M \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $h(x) = g(f(x))$ nazýváme funkcí složenou, funkci f nazýváme funkcí vnitřní a funkci g funkcí vnější.*

Příklady. *Dány funkce $f(x) = x^3$, $x \in [-\infty, \infty)$ a $g(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in [-\infty, \infty)$. Pak*

$$f(g(x)) = (g(x))^3 = (\mathrm{e}^x)^3 = \mathrm{e}^{3x}$$

a

$$g(f(x)) = \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{x^3}.$$

Jedná se o dvě naprosto odlišné funkce.

Funkce inverzní.

Definice 2.6. *Nechť $f : \mathcal{D}(f) \to \mathcal{H}(f)$ je prostá. Buď $g : \mathcal{H}(f) \to \mathcal{D}(f)$ taková, že $g(f(x)) = x$ pro $\forall x \in M$. Pak funkci g nazýváme funkcí inverzní k f a značíme f^{-1}.*

Příklad. *Dána funkce $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$. Tato funkce je rostoucí, tedy prostá, navíc $\mathcal{D}(f) = [0, \infty)$ a $\mathcal{H}(f) = [0, \infty)$. Existuje tedy inverzní f^{-1} a vypočítá se takto:*
daná funkce se dá psát ve tvaru

$$y = x^2.$$

Prohodíme x a y a vypočteme y. To nám dá formulku pro inverzní funkci.

$$x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Lze snadno ověřit, že $f(f^{-1}(x)) = x$ pro $x \in \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ a $f^{-1}(f(x)) = x$ pro $x \in \mathcal{D}(f)$.

Limita funkce.

Definice 2.7. *Buď $c \in \mathbb{R}^*$. Označme pro $r > 0$ redukované okolí bodu c*

$$P_r(c) = \begin{cases} (c - r, c) \cup (c, c + r) & \ldots c \in \mathbb{R}; \\ (\frac{1}{r}, \infty) & \ldots c = \infty; \\ (-\infty, -\frac{1}{r}) & \ldots c = -\infty. \end{cases}$$

Označme ještě $P_r^+(c) = P_r(c) \cap \{x;\ x > c\}$ a $P_r^-(c) = P_r(c) \cap \{x;\ x < c\}$.

Definice 2.8. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ a nechť M obsahuje nějaké redukované okolí $P_r(c)$ $(P_r^+(c),\ P_r^-(c))$ bodu c. Říkáme, že*
$$\lim_{x\to c} f(x) = a \qquad (\lim_{x\to c_+} f(x) = a,\ \lim_{x\to c_-} f(x) = a)$$
pokud
$$x_n \in P_r(c)\ (P_r^+(c),\ P_r^-(c)) \wedge x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to a.$$

Jiná definice limity.

Definice 2.9. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ a nechť M obsahuje nějaké redukované okolí $P_r(c)$ bodu c. Říkáme, že*
$$\lim_{x\to c} f(x) = a$$
pokud
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M \quad (0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon).$$

Věta 2.10. *Obě definice dávají totéž.*

Spojitost funkce.

Definice 2.11. *Buď $c \in \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ a $c \in M$. Říkáme, že funkce f je spojitá (zprava spojitá, zleva spojitá) v bodě c, pokud*
$$\lim_{x\to c} f(x) \quad (\lim_{x\to c^+} f(x),\ \lim_{x\to c^-} f(x)) = f(c).$$

Jiná definice spojitosti.

Definice 2.12. *Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ a nechť M obsahuje nějaké neredukované okolí $(c-\lambda, c+\lambda)$ bodu c, kde λ je nějaké kladné číslo. Říkáme, že f je spojitá v bodě c pokud*
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M \quad (|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Věta 2.13. *Obě definice dávají totéž.*

Věty pro konkrétní výpočet limit.

Věta 2.14. *Buď $\odot$ jedna z operací $+,\ -,\ .,\ :$. Pak*
$$\lim_{x\to c} f(x) \odot g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \odot \lim_{x\to c} g(x)$$
a
$$\lim_{x\to c} |f(x)| = |\lim_{x\to c} f(x)|,$$
pokud limity vpravo existují.

Věta 2.15. *Buď*
$$\lim_{x\to c} f(x) = a,\ \lim_{x\to a} g(x) = b.$$
Nechť je splněn aspoň jeden z následujících předpokladů:

(i) *g je spojitá v bodě a;*
(ii) *existuje redukované okolí bodu c tak, že pro $\forall x \in P(c)$ je $f(x) \neq a$.*

Pak

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = b.$$

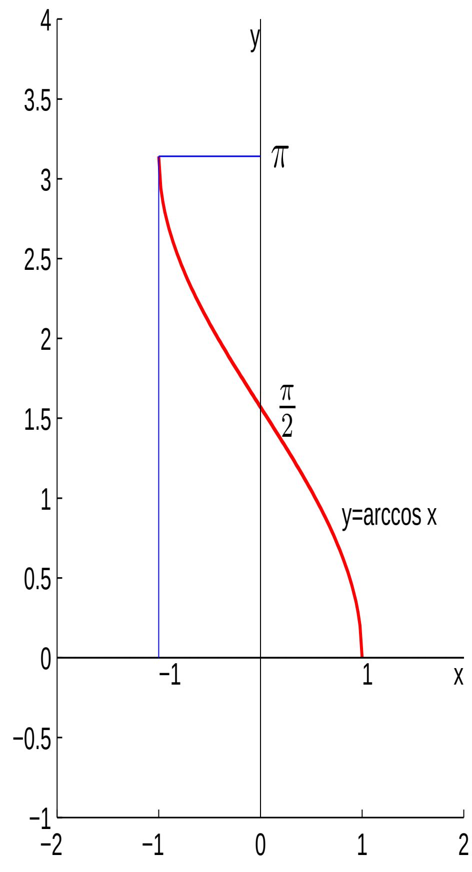
Elementární funkce.

Předpokládáme znalost funkcí $x^a, a^x, \mathrm{e}^{\mathrm{x}}, \log_{\mathrm{a}} \mathrm{x}, \ln \mathrm{x}, \cos \mathrm{x}, \sin \mathrm{x}, \tan \mathrm{x}, \operatorname{cotg} \mathrm{x}$.

Nyní si definujme inverzní funkce k funkcím $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\operatorname{cotg} \mathrm{x}$, jsou to po řadě $\arccos x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccotg} \mathrm{x}$ (Podrobnosti viz "Budinský, Charvát: Matematika I, str. 231").

Funkce $\arcsin x$ a $\arccos x$.

Vezmeme interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a na něm funkci sin. K ní inverzní označme arcsin. Vezmeme interval $[0, \pi]$ a na něm funkci cos. K ní inverzní označme arccos. Jejich grafy vidíte na obrázcích **??** a 1.



Obrázek 1

Z obou grafů vidíme základní vlastnosti:

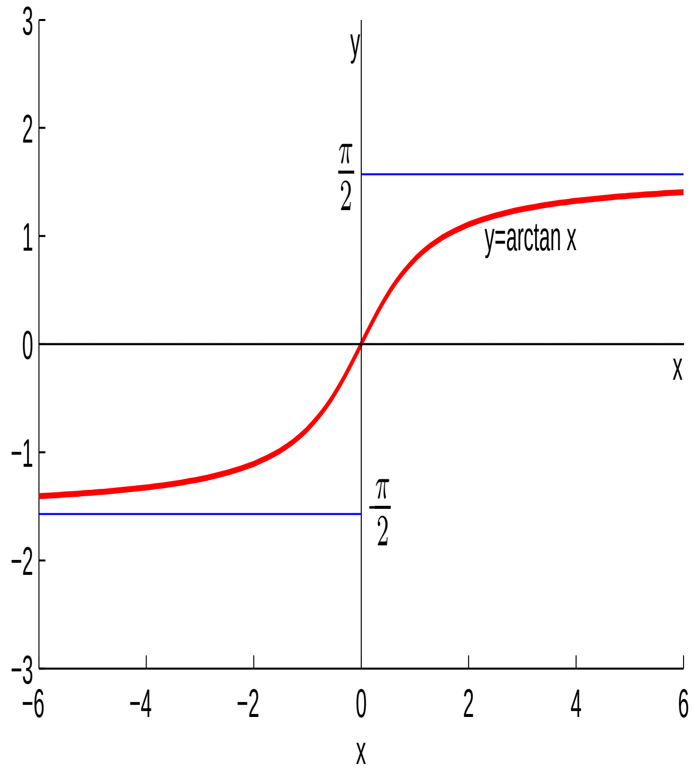
$$\mathcal{D}(\arcsin) = \mathcal{D}(\arccos) = [-1,1],\ \mathcal{H}(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \mathcal{H}(\arccos) = [0,\pi]$$

$$\arcsin(0) = 0,\ \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2},\ \arcsin(1) = \frac{\pi}{2},\ \arcsin \text{ je funkce rostoucí a lichá}$$

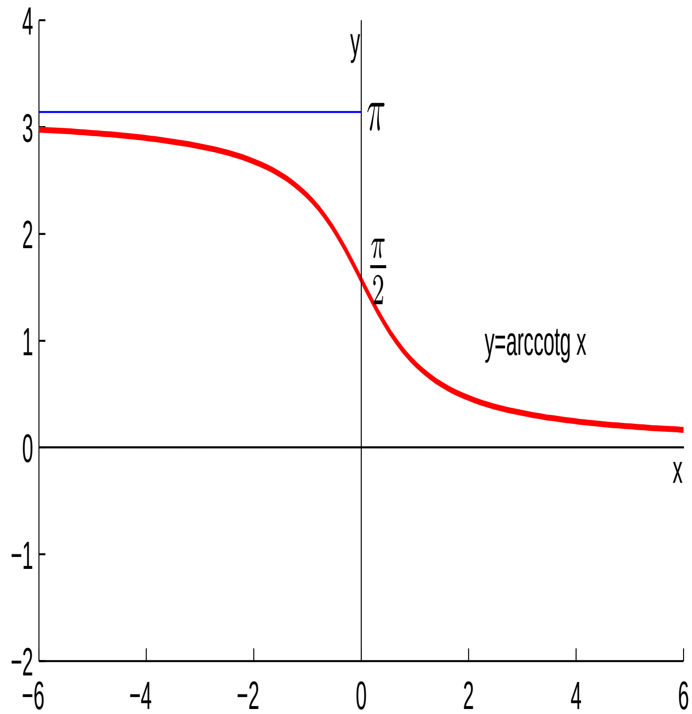
$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2},\ \arccos(-1) = \pi,\ \arcsin(1) = 0,\ \arccos \text{ je funkce klesající}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1,1].$$

Vezmeme interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a na něm funkci tan. K ní inverzní označme arctan. Nyní vezmeme interval $(0,\pi)$ a na něm funkci cotg. K ní inverzní označme arccotg. Jejich grafy vidíte na obrázcích 2 a 3.



Obrázek 2



Obrázek 3

Z obou grafů vidíme základní vlastnosti:

$\mathcal{D}(\text{arctan}) = \mathcal{D}(\text{arccotg}) = \mathbb{R},\ \mathcal{H}(\text{arctan}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ \mathcal{H}(\text{arccotg}) = (0, \pi)$

$\text{arctan}(0) = 0, \lim_{x\to\infty} \text{arctan}\, x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to-\infty} \text{arctan}\, x = -\frac{\pi}{2},$ arctan je funkce rostoucí a lichá

$\text{arccotg}\,(0) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to\infty} \text{arccotg}\, x = 0, \lim_{x\to-\infty} \text{arccotg}\, x = \pi,$ arccotg je funkce klesající

$\text{arctan}\, x + \text{arccotg}\, x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Důležité limity.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

Praktický výpočet limit–příklady.

Příklad. *Vypočítejte*
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x-12}.$$

Řešení.
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2+4x-12} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+6)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+6} = \frac{5}{8}.$$

□

Příklad. *Vypočítejte*
$$\lim_{x\to\infty} x\ (\sqrt{x^2-1}-x).$$

Řešení.
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} x\ (\sqrt{x^2-1}-x) = \lim_{x\to\infty} x\ (\sqrt{x^2-1}-x)\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} x\ \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to\infty} x\ \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Příklad. *Vypočítejte*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}.$$

Řešení.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\ \frac{5}{3} = \frac{5}{3}\ \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{5}{3}.$$

□

Příklad. *Vypočítejte*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}-\mathrm{e}^{3\mathrm{x}}}{\sin x}.$$

Řešení.
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{3x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1+1-\mathrm{e}^{3x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sin x} - \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{\sin x} \\
&= 2\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}\ \frac{x}{\sin x} - 3\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x}\ \frac{x}{\sin x} \\
&= 2\ \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x}}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} - 3\ \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{3x}}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = 2-3 = -1.
\end{aligned}$$

□

3. Přednáška

Věty o spojitých funkcích.

Definice 3.1. *Nechť I je interval (uzavřený, polouzavřený, otevřený) a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce. Říkáme, že f je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě $x \in I$ (pokud je interval uzavřený nebo polouzavřený, jedná se o jednostrannou spojitost v krajních bodech).*

Věta 3.2 (O nabývání maxima a minima)**.** *Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak existují body $a \le y, z \le b$ tak, že pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí:*

$$f(y) \le f(x) \le f(z).$$

Věta 3.3 (O překročení řeky)**.** *Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá a $f(a)f(b) < 0$. Pak existuje $a \le x \le b$ tak, že $f(x) = 0$.*

Derivace funkce.

Definice 3.4. *Nechť f je daná funkce definovaná v nějakém okolí $(c - \delta, c + \delta)$. Říkáme, že funkce f má v bodě c derivaci (značíme $f'(c)$), pokud*

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Viz obrázek 4.

Věta 3.5. *Nechť existuje $f'(c)$. Potom funkce f je spojitá v c.*

Značení. *Nechť $y = f(x)$. Pak derivaci značíme:*

$$y', \quad f', \quad \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}, \quad \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f.$$

Věta 3.6. *Nechť existuje $f'(c)$, $g'(c)$. Potom*

(i) $(kf)'(c) = kf'(c)$;

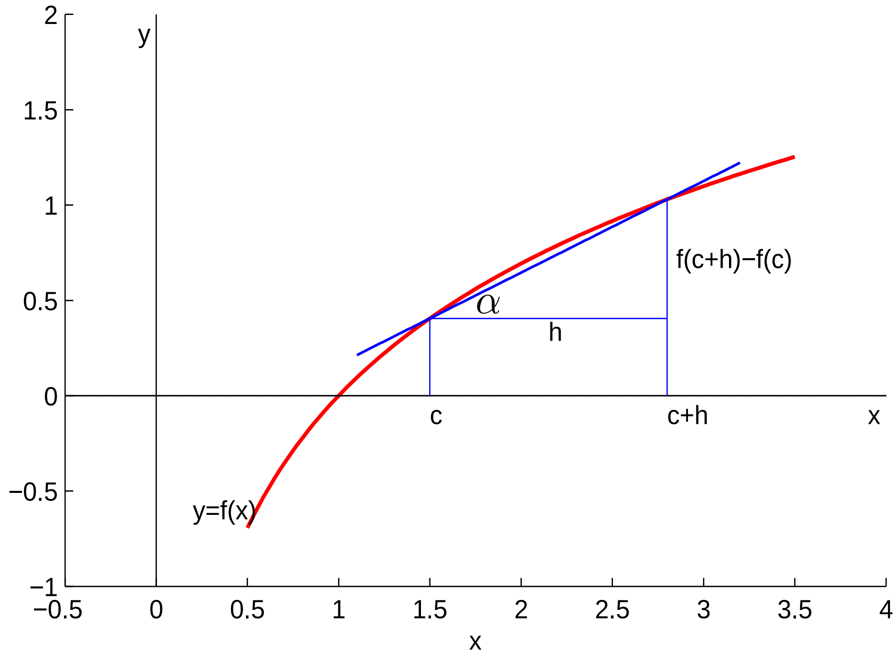
(ii) $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$;

(iii) $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$;

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g^2(c)}$, *pokud* $g(c) \ne 0$.

Věta 3.7. *Nechť f, g jsou dvě funkce a nechť existují $g'(c), f'(g(c))$. Pak*

$$(f \circ g)'(c) = \text{"}\ \big[f(g(c))\big]'\ \text{"} = f'(g(c))g'(c).$$



Obrázek 4

Věta 3.8. *Buď f spojitá a ryze monotónní na (a,b) a $c \in (a,b)$. Buď g inverzní funkce k f a označ $d = f(c)$. Pak*

$$f'(c) = \frac{1}{g'(d)} \qquad \left(g'(d) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{f'(g(d))}\right).$$

<u>Vzorce pro derivování.</u>

$$k' = 0$$
$$x' = 1$$
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{Z},\ n < 0$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$(\mathrm{e}^x)' = (\mathrm{e}^x) \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Praktický výpočet derivací.

Příklad. *Vypočtěte*
$$(2x^2 + 3x - 6)'.$$

Řešení.
$$(2x^2 + 3x - 6)' = (2x^2)' + (3x)' - (6)' = 2(x^2)' + 3(x)' - 0 = 2.2x + 3 = 4x + 3.$$
□

Příklad. *Vypočtěte*
$$(\mathrm{e}^x \sin x)'.$$

Řešení.
$$(\mathrm{e}^x \sin x)' = (\mathrm{e}^x)' \sin x + \mathrm{e}^x (\sin x)' = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x).$$
□

Příklad. *Vypočtěte*
$$\left(\frac{x + \sin x}{\mathrm{e}^x - \cos x}\right)'.$$

Řešení.
$$\left(\frac{x + \sin x}{\mathrm{e}^x - \cos x}\right)' = \frac{(x + \sin x)'(\mathrm{e}^x - \cos x) - (x + \sin x)(\mathrm{e}^x - \cos x)'}{(\mathrm{e}^x - \cos x)^2}$$
$$= \frac{(1 + \cos x)(\mathrm{e}^x - \cos x) - (x + \sin x)(\mathrm{e}^x + \sin x)}{(\mathrm{e}^x - \cos x)^2}.$$
□

Příklad. *Vypočtěte*

$$(\sin 3x)'.$$

Řešení.

$$(\sin 3x)' = \cos 3x(3x)' = \cos 3x.3 = 3\cos 3x.$$

□

Příklad. *Vypočtěte*

$$(\mathrm{e}^{x^2-x})'.$$

Řešení.

$$(\mathrm{e}^{x^2-x})' = \mathrm{e}^{x^2-x}(x^2-x)' = \mathrm{e}^{x^2-x}(2x-1).$$

□

Příklad. *Vypočtěte*

$$(3^{2x})'.$$

Řešení.

$$(3^{2x})' = 3^{2x}\ln 3(2x)' = 2\ 3^{2x}\ln 3.$$

□

Příklad. *Vypočtěte*

$$(\sin(x^2))'.$$

Řešení.

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2)(x^2)' = \cos(x^2)\ 2x.$$

□

Příklad. *Vypočtěte*

$$(\sin^2 x)'.$$

Řešení.

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x.$$

□

Příklad. *Vypočtěte*

$$(\cos^2(3x+5))'.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}&(\cos^2(3x+5))' = 2\cos(3x+5)(\cos(3x+5))'\\ &= 2\cos(3x+5)(-\sin(3x+5))(3x+5)' = 2\cos(3x+5)(-\sin(3x+5))\ 3\\ &= -6\cos(3x+5)\sin(3x+5).\end{aligned}$$

□

Příklad. *Vypočtěte*

$$(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'.$$

Řešení.

$$
\begin{aligned}
&(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+[(1+x^2)^{1/2}]') = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\Big(1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}\ (1+x^2)'\Big) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\Big(1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}\ 2x\Big) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\Big(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Big) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\Big(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}
$$

□

Derivace zprava a zleva.

Definice 3.9. *Nechť f je daná funkce definovaná v nějakém pravém (resp. levém)okolí $\langle c, c+\delta)$ (resp. $(c-\delta, c\rangle$). Říkáme, že funkce f má v bodě c derivaci zprava (resp. zleva),značíme $f'_+(c)$ (resp. $f'_-(c)$), pokud*

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \in \mathbb{R} \quad \Big(\textit{resp. } f'_-(c) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \in \mathbb{R}\Big)$$

Nekonečné derivace.

Definice 3.10. *Nechť f je daná funkce definovaná v nějakém okolí $(c-\delta, c+\delta)$ Říkáme, že funkce f má v bodě c derivaci rovnou nekonečnu (minus nekonečnu), pokud*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \infty\ (-\infty).$$

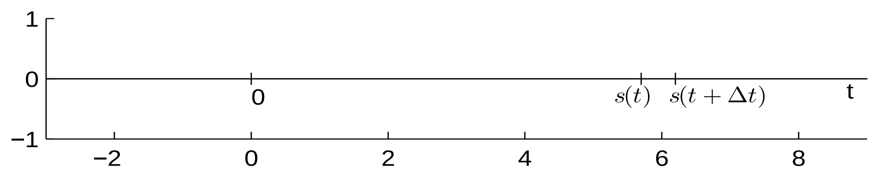
Analogicky bychom definovali jednostranné nekonečné derivace.

4. Přednáška

Fyzikální význam první a druhé derivace

Pozorujme pohyb hmotného bodu po přímce. Zvolme na této přímce počátek, tj. bod s nulovou souřadnicí. Pohyb tohoto hmotného bodu je popsán funkcí polohy v závislosti na čase, tj. matematicky nějakou funkcí $s(t)$. Písmeno t znamená čas a $s(t)$ je souřadnice daného hmotného bodu v čase t. Zjistěme okamžitou rychlost a okamžité zrychlení hmotného bodu v čase t.

Nejprve rychlost. To uděláme tak, že sledujeme průměrnou rychlost v časovém intervalu $(t, t+\Delta t)$. Označme ji $v_{\Delta t}(t)$. Vzdálenost, kam se dostane bod v čase t, je $x(t)$, a podobně vzdálenost, kam se dostane bod v čase $t+\Delta t$, je $s(t+\Delta t)$, viz obrázek 5.



Obrázek 5

Ze základního kurzu fyziky víme, že

$$v_{\Delta t}(t) = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Je celkem přirozené definovat nyní okamžitou rychlost $v(t)$ předpisem

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Tento výraz je definice derivace funkce s v bodě t, tj.

$$v(t) = s'(t).$$

Říkáme, že rychlost je derivací dráhy podle času.

Analogicky zavedeme

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = s''(t)$$

a říkáme, že zrychlení je derivací rychlosti podle času nebo druhou derivací dráhy podle času.

Příklad. *Za jak dlouho spadne z výšky h puštěný kámen na zem?*

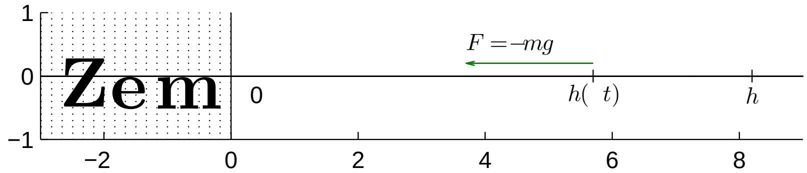
Řešení. Předpokládejme, že v nějakém čase t má těleso výšku $h(t)$, to je jeho vzdálenost od povrchu země v čase t. Působ i na něj síla F o velikosti mg. Její znaménko je ale minus díky její orientaci, viz obrázek 6.

Užitím Newtonova pohybového zákona máme

$$mh''(t) = -mg, \; h(0) = h, \; h'(0) = 0$$

Z toho dostaneme

$$h''(t) = -g \Rightarrow h'(t) = -gt + c_1 \Rightarrow h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2.$$



OBRÁZEK 6

Z hodnot $h(0) = h,\ h'(0) = 0$ vypočteme $c_1 = 0,\ c_2 = h$ a dostaneme

$$h(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \text{ a tedy } t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

□

Diferenciál funkce

Počítáme-li přibližnou hodnotu funkce f v bodě $c+h$ pro "malá" h, můžeme aproximovat funkci f její tečnou (tj. lineární funkcí $l(x) = f(c) + f'(c)x$) a spočíst hodnotu $l(c+h)$. Tedy

$$f(c+h) \doteq f(c) + f'(c)h.$$

Tato aproximace je tím přesnější, čím je h menší.

Definice 4.1. *Nechť existuje $f'(c)$. Potom zobrazení $h \mapsto D_c f(h) := f'(c)h$ se nazývá diferenciálem funkce f v bodě c.*

Příklad. *Spočtěte přibližně bez pomoci kalkulačky hodnotu $\sqrt{101}$.*

Řešení.

$$\sqrt{101} = 10\sqrt{1+0.01} = \left| \begin{smallmatrix} c=1 \\ h=0.01 \\ f(x)=\sqrt{x} \end{smallmatrix} \right| \doteq 10(f(c) + D_c f(h)) = 10(1 + \frac{1}{2}\ \ 0.01) = 10.05$$

Přesná hodnota je $10.0499\ldots$

□

Věta 4.2 (Lagrangeova věta). *Nechť $a < b$, $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť existuje $f'(c)$ pro každé $c \in (a,b)$. Potom existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta 4.3. *Nechť $a < b$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a nechť $f'(c) > 0$ ($\geq 0,\ < 0,\ \leq 0$) pro každé $c \in (a,b)$. Potom funkce f je rostoucí (neklesající , klesající , nerostoucí) v (a,b).*

Definice 4.4. *Říkáme, že funkce f má lokální minimum (ostré lokální minimum, lokální maximum, ostré lokální maximum) v bodě c, pokud existuje $\delta > 0$ tak,že*

$$f(x) \geq f(c)\ (>, \leq, <) \quad \text{pro všechna} \quad x \in (c - \delta, c + \delta).$$

Příklad. *Vyšetřete, v kterých intervalech je funkce $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$ rostoucí a v kterých klesající.*

Řešení. Spočtěme derivaci f. Zějmě je

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(2x + x^2).$$

Řešme nerovnici

$$\mathrm{e}^x(2x + x^2) > 0.$$

Protože $\mathrm{e}^x > 0$ pro každé x, stačí vyřešit nerovnici

$$2x + x^2 > 0.$$

Nulové body jsou $x = 0$ a $x = -2$. Rešení nerovnice je tedy $x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$. V každém z těchto intervalů je proto f rostoucí. Analogickým postupem zjistíme, že je klesající v intervalu $(-2, 0)$. V bodě -2 je tedy lokální maximum a v bodě 0 je lokální minimum.

$\square$

Věta 4.5 (Cauchyova věta). *Nechť $a < b$, f, $g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, nechť existuje f', g' v intervalu (a, b) a $g'(c) \neq 0$ pro každé $c \in (a, b)$. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta 4.6 (L'Hospitalovo pravidlo). *Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$. Nechť existuje*

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pak existuje i

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{a navíc} \quad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Totéž platí pro jednostranné limity.

Příklad. *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \text{„}\ \frac{0}{0}\ \text{"} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \text{„}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \text{„}\ \frac{0}{0}\ \text{"} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$\square$

Příklad. *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$$

Řešení.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\cos x-1} = \text{"}\ \frac{0}{0}\ \text{"} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{-\sin x} = \text{"}\ \frac{0}{0}\ \text{"}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}+4x^2\mathrm{e}^{x^2}}{-\cos x} = -2.$$

□

Příklad. *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+6x-9}{3x^3+4x^2-6}.$$

Řešení.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x^2+6x-9}{3x^3+4x^2-6} = \text{"}\ \frac{\infty}{\infty}\ \text{"} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-8x+6}{9x^2+8x} = \text{"}\ \frac{\infty}{\infty}\ \text{"}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{12x-8}{18x+8} = \text{"}\ \frac{\infty}{\infty}\ \text{"} = \lim_{x\to\infty}\frac{12}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

□

Příklad. *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln x.$$

Řešení.

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln x = \text{"}\ (-\infty).0\ \text{"} = \lim_{x\to 0_+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \text{"}\ \frac{\infty}{\infty}\ \text{"}$$
$$= \lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} -x = 0.$$

□

Příklad. *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1_-}\ln x\ln(1-x).$$

Řešení.

$$\lim_{x\to 1_-}\ln x\ln(1-x) = \text{"}\ 0\ (-\infty)\ \text{"} = \lim_{x\to 1_-}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \text{"}\ \frac{-\infty}{-\infty}\ \text{"} = \lim_{x\to 1_-}\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\ \frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to 1_-}\frac{\ln^2 x}{1-x}\ \lim_{x\to 1_-}\frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1_-}\frac{\ln^2 x}{1-x} = \text{"}\ \frac{0}{0}\ \text{"} = \lim_{x\to 1_-}\frac{2\ln x\ \frac{1}{x}}{-1} = 0.$$

□

Příklad. *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0_+} x^{\sin x}.$$

Řešení.

$$\lim_{x\to 0_+} x^{\sin x} = \text{"}\ 0^0\ \text{"} = \lim_{x\to 0_+}\mathrm{e}^{\ln x\ \sin x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0_+}\ln x\ \sin x} = \text{"}\ \mathrm{e}^{(-\infty)\ 0}\ \text{"}.$$

Stačí tedy vypočítat

$$\lim_{x\to 0_+}\ln x\ \sin x.$$

Zřejmě je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0_+} \ln x \ \ \sin x = \text{"}\ (-\infty)\ 0\ \text{"} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \text{"}\ \frac{-\infty}{\infty}\ \text{"} \\
&= \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\ \cos x} = -\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin^2 x}{x} \ \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{\cos x} \\
&= -\lim_{x\to 0_+} \frac{\sin^2 x}{x} = \text{"}\ \frac{0}{0}\ \text{"} = -\lim_{x\to 0_+} \frac{2\sin x\ \cos x}{1} = 0.
\end{aligned}$$

Původní limita je tedy

$$\lim_{x\to 0_+} x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0_+} \ln x \ \ \sin x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

$\square$

Příklad. *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\frac{x+3}{x+1}\Big)^{2x+5}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \Big(\frac{x+3}{x+1}\Big)^{2x+5} = \text{"}\ 1^{\infty}\ \text{"} \\
&= \lim_{x\to 0_+} \mathrm{e}^{(2x+5)\ \ \ln\frac{x+3}{x+1}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x+5)\ \ \ln\frac{x+3}{x+1}} = \text{"}\ \mathrm{e}^{\infty\ 0}\ \text{"}.
\end{aligned}$$

Stačí tedy vypočítat

$$\lim_{x\to\infty} (2x+5)\ \ \ln\frac{x+3}{x+1}.$$

Zřejmě je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} (2x+5)\ \ \ln\frac{x+3}{x+1} = \text{"}\ \infty\ 0\ \text{"} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{x+3}{x+1}}{\frac{1}{2x+5}} = \text{"}\ \frac{0}{0}\ \text{"} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x+3}\ \ \frac{x+1-(x+3)}{(x+1)^2}}{-\frac{2}{(2x+5)^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+5)^2}{x^2+4x+3} = \text{"}\ \frac{\infty}{\infty}\ \text{"} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{4(2x+5)}{2x+4} = \text{"}\ \frac{\infty}{\infty}\ \text{"} = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{2} = 4.
\end{aligned}$$

Původní limita je tedy

$$\lim_{x\to\infty} \Big(\frac{x+3}{x+1}\Big)^{2x+5} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x+5)\ \ \ln\frac{x+3}{x+1}} = \mathrm{e}^4.$$

$\square$

Příklad. *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1} \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\Big).$$

Řešení.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1} \Big(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\Big) = \text{"}\ \infty - \infty\ \text{"} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \text{"}\ \frac{0}{0}\ \text{"} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \text{"}\ \frac{0}{0}\ \text{"} = \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

5. Přednáška

Konvexita a konkávita funkce

Definice 5.1. *Nechť funkce f je definovaná v intervalu J. Potom říkáme, že f je konvexní (ryze konvexní , konkávní , ryze konkávní) v J, pokud platí implikace*

$$x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \ (<,\ \geq,\ >)\ \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Věta 5.2. *Nechť funkce f je definovaná v intervalu J a nechť $f'' \geq 0$ $(>,\ \leq,\ <)$ v J, pak f je konvexní (ryze konvexní , konkávní , ryze konkávní) v J.*

Poznámka. *Jestliže v nějakém bodě c přechází graf funkce f z jedné strany tečny na druhou, nazýváme bod c inflexním bodem funkce f.*

Přesněji to říká následující definice.

Definice 5.3. *Nechť funkce f je definovaná v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a nechť existuje $f'(x_0)$. Položme*

$$R(x) = f(x) - \Big(f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\Big).$$

Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 inflexní bod, pokud existuje $0 < \lambda < \delta$ takové, že platí následující výrok:

$$R(x) \geq 0 \text{ pro } x \in (x_0, x_0 + \lambda) \wedge R(x) \leq 0 \text{ pro } x \in (x_0 - \lambda, x_0)$$
$$\text{nebo}$$
$$R(x) \leq 0 \text{ pro } x \in (x_0, x_0 + \lambda) \wedge R(x) \geq 0 \text{ pro } x \in (x_0 - \lambda, x_0).$$

Následující věta nám dává postačující podmínku pro existanci inflexního bodu.

Věta 5.4. *Nechť funkce f je definovaná v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a nechť $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$. Pak funkce f má v bodě x_0 inflexní bod.*

Asymptoty grafu funkce

Definice 5.5. *Říkáme, že funkce f má asymptotu v ∞, pokud existují reálná čísla k, q taková, že*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - q) = 0.$$

Analogicky v $-\infty$.

Výpočet asymptot grafu funkce

Nechť funkce f má asymtotu v ∞. Pak

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

a

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx), \quad \text{kde} \quad k \text{ je vypočteno výše.}$$

Analogicky v $-\infty$.

Průběh funkce

Nechť funkce f je daná předpisem. Průběh funkce znamená vyšetřit

(1) $\mathcal{D}(f)$;
(2) sudá, lichá, periodická;
(3) limity v krajních bodech $\mathcal{D}(f)$;
(4) intervaly monotonie a lokální extrémy;
(5) intervaly konvexity, konkávity a inflexní body;
(6) asymptoty;
(7) $\mathcal{H}(f)$.

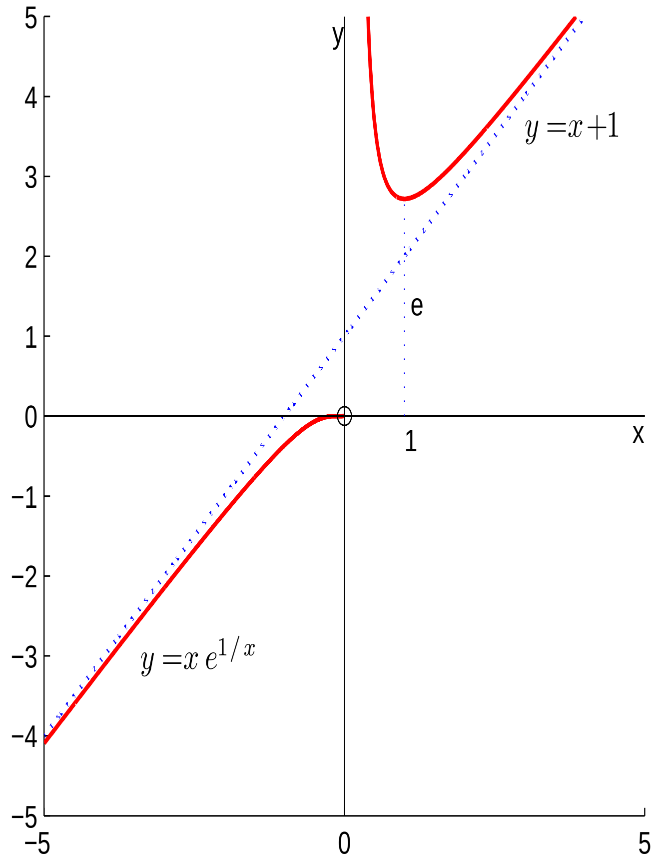
Příklad. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = x\mathrm{e}^{1/x}$.

Řešení.

(1) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
(2) ani jedno;
(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\mathrm{e}^{1/x} = \infty \,.\, \mathrm{e}^{1/\infty} = \infty \,.\, \mathrm{e}^0 = \infty \,.\, 1 = \infty$,
$\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{1/x} = (-\infty) \,.\, \mathrm{e}^{1/(-\infty)} = (-\infty) \,.\, \mathrm{e}^0 = (-\infty) \,.\, 1 = -\infty$,
$\lim\limits_{x\to 0_-} x\mathrm{e}^{1/x} = 0 \,.\, \mathrm{e}^{1/0_-} = 0 \,.\, \mathrm{e}^{-\infty} = 0 \,.\, 0 = 0$,
$\lim\limits_{x\to 0_+} x\mathrm{e}^{1/x} = 0 \,.\, \mathrm{e}^{1/0_+} = 0 \,.\, \mathrm{e}^{\infty} = 0 \,.\, \infty =$ ”neurčitý výraz”, tedy užijeme L'Hospitalova pravidla a dostaneme
$\lim\limits_{x\to 0_+} x\mathrm{e}^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{1/x} = \lim\limits_{x\to 0_+} \frac{-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0_+} \mathrm{e}^{1/x} = \mathrm{e}^{1/0_+} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty$.
(4) $f'(x) = \mathrm{e}^{1/x} - \frac{1}{x}\mathrm{e}^{1/x} = \frac{x-1}{x}\mathrm{e}^{1/x}$.
Nulové body jsou $0, 1$.
$x \in (-\infty, 0)$, pak $f'(x) > 0$ a tedy funkce f je rostoucí;
$x \in (0, 1)$, pak $f'(x) < 0$ a tedy funkce f je klesající;
$x \in (1, \infty)$, pak $f'(x) > 0$ a tedy funkce f je rostoucí.
V $x = 1$ je tedy lokální minimum $f(1) = \mathrm{e}$.
(5) $f''(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} - (-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} + \frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2})\mathrm{e}^{1/x}) = \frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{1/x}$.
Nulový bod je 0.
$x \in (-\infty, 0)$, pak $f''(x) < 0$ a tedy funkce f je konkávní;
$x \in (0, \infty)$, pak $f''(x) > 0$ a tedy funkce f je konvexní.
(6) Asymptoty v $\pm\infty$.
$k_\infty = \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{1/x} = \mathrm{e}^{1/\infty} = \mathrm{e}^0 = 1$,
$k_{-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{1/x} = \mathrm{e}^{1/-\infty} = \mathrm{e}^0 = 1$.
Dále
$q_\infty = \lim\limits_{x\to\infty} x\mathrm{e}^{1/x} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} = \lim\limits_{y\to 0_+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$;
$q_{-\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{1/x} - x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} = \lim\limits_{y\to 0_-} \frac{e^y - 1}{y} = 1$.
Funkce f má tedy stejnou asymptotu v ∞ a v $-\infty$. Je to přímka $y = x + 1$.
(7) $\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0) \cup \langle \mathrm{e}, \infty)$.

Graf je na obrázku 7.

$\square$



OBRÁZEK 7

Příklad. *Vyšetřete průběh funkce* $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$.

Řešení.

(1) Musíme vyřešit nerovnosti

$$-1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1.$$

Protože $x^2+1>0$, lze dané nerovnice vynásobit výrazem x^2+1 a máme

$$-(x^2+1) \leq 2x \leq x^2+1 \;\Leftrightarrow\; -(x+1)^2 \leq 0 \;\wedge\; 0 \leq (x-1)^2.$$

Toto platí pro každé reálné x a tedy $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

(2) Protože $\frac{2x}{x^2+1}$ je lichá funkce a $\arcsin x$ je také lichá funkce, je $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$ také lichá funkce. Sudá ani periodická není.

(3) $\lim_{x\to\infty} \arcsin \frac{2x}{x^2+1} = \arcsin\left(\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1}\right) = \arcsin 0 = 0$;
$\lim_{x\to-\infty} \arcsin \frac{2x}{x^2+1} = 0$ protože f je lichá,
$f(0) = 0$.

(4) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{x^2+1})^2}} \frac{2(x^2+1)-2x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}}} \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1-4x^2}{(x^2+1)^2}}} \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}} \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} =$
$\frac{(x^2+1)}{|x^2-1|} \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1} \frac{1-x^2}{|x^2-1|}$.

Stačí uvažovat funkci jen v intervalu $\langle 0,\infty)$ (je lichá). Nulový bod je 1.
$x \in (0,1)$, pak $f'(x) > 0$ a tedy funkce f je rostoucí;
$x \in (1,\infty)$, pak $f'(x) < 0$ a tedy funkce f je klesající;
V $x = 1$ je tedy lokální maximum $f(1) = \pi/2$.
Zajímavá situace je s derivací v bodě 1. Zřejmě je

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1_+} f'(x) = \lim_{x\to 1_+} \frac{2}{x^2+1} \frac{1-x^2}{|x^2-1|} = \lim_{x\to 1_+} \frac{2}{x^2+1}(-1) = -1$$

a

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1_-} f'(x) = \lim_{x\to 1_-} \frac{2}{x^2+1} \frac{1-x^2}{|x^2-1|} = \lim_{x\to 1_-+} \frac{2}{x^2+1}(+1) = 1.$$

Funkce má tedy v bodě 1 ”hrot ve tvaru střechy”.

(5) Zřejmě je

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+1} & \text{pro} \quad x \in (0,1), \\ -\frac{2}{x^2+1} & \text{pro} \quad x \in (1,\infty) \end{cases}$$

a tedy

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{pro} \quad x \in (0,1), \\ \frac{4x}{(x^2+1)^2} & \text{pro} \quad x \in (1,\infty) \end{cases}$$

$x \in (0,1)$, pak $f''(x) < 0$ a tedy funkce f je konkávní;
$x \in (1,\infty)$, pak $f''(x) > 0$ a tedy funkce f je konvexní.
Uvědomme si, že v intervalu $(-1,0)$ je f konvexní (to plyne z toho, že je lichá a konkávní v $(0,1)$) a tedy má v bodě 0 inflexní bod.

(6) Asymptoty v $\pm\infty$.
Protože $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ a f je lichá, je asymptotou v $\pm\infty$ přímka $y = 0$.

(7) $\mathcal{H}(f) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

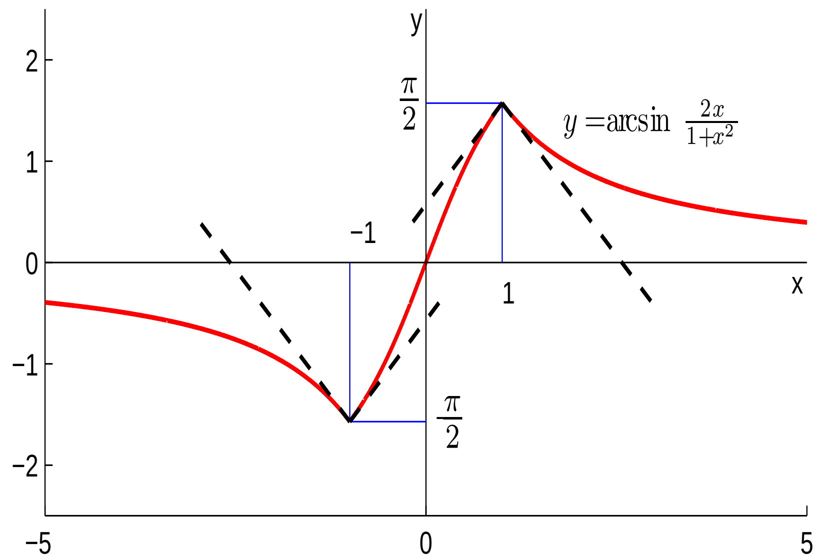
Graf je na obrázku 8. Všimněte si bodů 1 a -1, ve kterých jsou tečny zleva a zprava namalovány čárkovaně.

□

Hledání lokálních extrémů funkce

Věta 5.6. *Nechť funkce f je definovaná v nějakém okolí bodu $c \in \mathbb{R}$. Nechť $f'(c) = 0$ a existuje $f''(c)$. Je-li $f''(c) > 0$ pak c je bodem lokálního minima funkce f. Je-li $f''(c) < 0$ pak c je bodem lokálního maxima funkce f. Je-li $f''(c) = 0$ pak nemůžeme nic říci.*

Příklad. *Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 7$.*



Obrázek 8

Řešení. Zřejmě je

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12,$$
$$f''(x) = 12x - 18.$$

Vyřešme rovnici $f'(x) = 0$. Snadno najdeme

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = 1 \lor x = 2.$$

Dále je

$$f''(1) = -6, \; f''(2) = 6.$$

Funkce f má tedy v bodě 1 lokální maximum $f(1) = -2$ a v bodě 2 lokální minimum $f(2) = -3$.

□

6. Přednáška

Globální extrémy na intervalu

Úkol. *Je dána spojitá funkce f na intervalu (otevřeném, polouzavřeném či uzavřeném) s krajními body a, b. Najděte její maximum a minimum.*

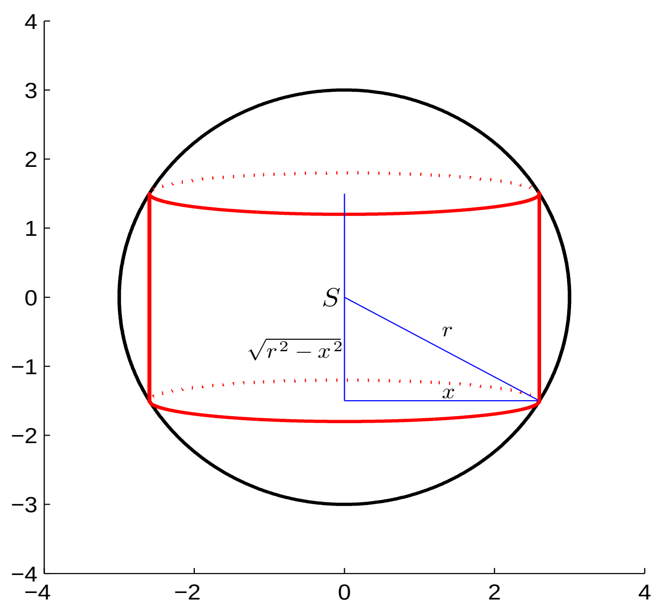
Řešení. V případě uzavřeného intervalu. Víme, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá maxima i minima. Základní fakt je, že pokud v bodě c nabývá funkce f globálního extrému, nabývá tam funkce f i lokálního extrému. V kterých bodech může být lokální extrém?
1. $f'(x) = 0$ pro $x \in (a, b) \ldots x_1, x_2, \ldots, x_n$;
2. $f'(x)$ neexistuje pro $x \in (a, b) \ldots x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_m$;
3. body a, b.

Nyní vybereme z čísel
$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m), f(a), f(b)$$
největší a nejmenší hodnotu.

□

Příklad. *Dané kouli o poloměru r vepište válec maximálního objemu.*

Řešení. Označme poloměr válce x. Viz obrázek 9.



Obrázek 9

Pak polovina výšky je $\sqrt{r^2 - x^2}$ a celkový objem $V(x)$ je
$$V(x) = 2\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Z geometrického hlediska je jasné, že $x \in \langle 0, r\rangle$. Spočteme derivaci V.

$$V'(x) = 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2} + 2\pi x^2 \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2\pi x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\big(2(r^2 - x^2) - x^2\big)$$
$$= \frac{2\pi x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\big(2r^2 - 3x^2\big).$$

Derivace existuje v každém bodě $x \in (0, r)$, tedy body typu 2. odpadají.
Body typu 1.

$$\frac{2\pi x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\big(2r^2 - 3x^2\big) = 0 \Leftrightarrow 2r^2 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = r\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Máme tedy tři podezřelé body z extrému, $0, r\sqrt{\frac{2}{3}}, r$. Zřejmě je $V(0) = V(r) = 0$ (to je vidět i geometricky) a maximum je tedy v bodě $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$.

□

Někdy daná funkce není definována na uzavřeném intervalu, ale např. na otevřeném.

Věta 6.1. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*, a < b$, funkce f je spojitá na (a, b), $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to b_-} f(x) = \infty$. Pak f má minimum v (a, b).*

Příklad. *Nechť $A = [a, b]$ je bod prvního kvadrantu. Která z přímek jdoucí bodem A vytne v prvním kvadrantu nejkratší úsek?*

Řešení. Označme $[a + x, 0]$ a $[0, b + y]$ průsečíky nějaké přímky jdoucí bodem A s osami. Viz obrázek 10.

Pak

$$\frac{y}{a} = \frac{b}{x} \Rightarrow xy = ab.$$

Tedy

$$d(x) = \sqrt{a^2 + \left(\frac{ab}{x}\right)^2} + \sqrt{b^2 + x^2} = \left(1 + \frac{a}{x}\right)\sqrt{b^2 + x^2}.$$

Evidentně $x \in (0, \infty)$. Zřejmě

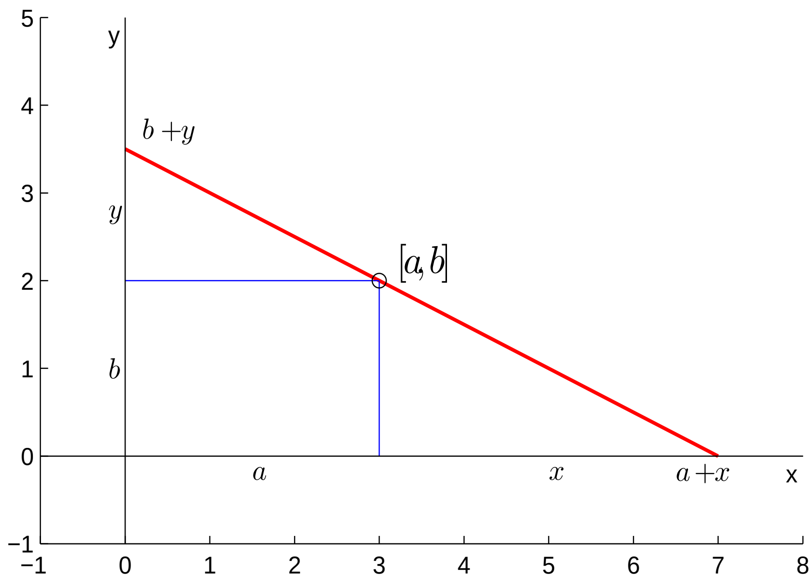
$$\lim_{x\to 0_+} d(x) = \lim_{x\to 0_+} \left(1 + \frac{a}{x}\right)\sqrt{b^2 + x^2} =$$
$$\left(1 + \frac{a}{0_+}\right)\sqrt{b^2 + 0_+^2} = (1 + \infty)\sqrt{b^2 + 0} = \infty\ b = \infty$$

a

$$\lim_{x\to\infty} d(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)\sqrt{b^2 + x^2} =$$
$$\left(1 + \frac{a}{\infty}\right)\sqrt{b^2 + \infty^2} = (1 + 0)\sqrt{\infty} = \infty.$$

Počítejme derivaci.

$$d'(x) = -\frac{a}{x^2}\sqrt{b^2 + x^2} + \left(1 + \frac{a}{x}\right)\frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}.$$



OBRÁZEK 10

Jelikož $d'(x)$ existuje pro všechna $x \in (0, \infty)$, body typu 2 nejsou. Řešme rovnici $d'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& -\frac{a}{x^2}\sqrt{b^2+x^2} + \Big(1+\frac{a}{x}\Big)\frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} = 0 && /.\sqrt{b^2+x^2} \\
& -\frac{a(b^2+x^2)}{x^2} + \Big(1+\frac{a}{x}\Big)x = 0 && /.x^2 \\
& -a(b^2+x^2) + (x+a)x^2 = 0 && /\text{převedeme na druhou stranu} \\
& (x+a)x^2 = a(b^2+x^2) && /\text{roznásobíme} \\
& x^3 + ax^2 = ab^2 + ax^2 && /-ax^2 \\
& x = \sqrt[3]{ab^2}.
\end{aligned}
$$

pro toto x tedy nastává minimum. Spočítejme $d(\sqrt[3]{ab^2})$. Zřejmě

$$
d(\sqrt[3]{ab^2}) = \Big(1+\frac{a}{(ab^2)^{1/3}}\Big)\sqrt{b^2+(ab^2)^{2/3}} = \frac{a^{2/3}+b^{2/3}}{b^{2/3}}\sqrt{b^2+a^{2/3}b^{4/3}} =
$$
$$
\frac{a^{2/3}+b^{2/3}}{b^{2/3}}\sqrt{b^{4/3}(b^{2/3}+a^{2/3})} = (a^{2/3}+b^{2/3})\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}} = (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}.
$$

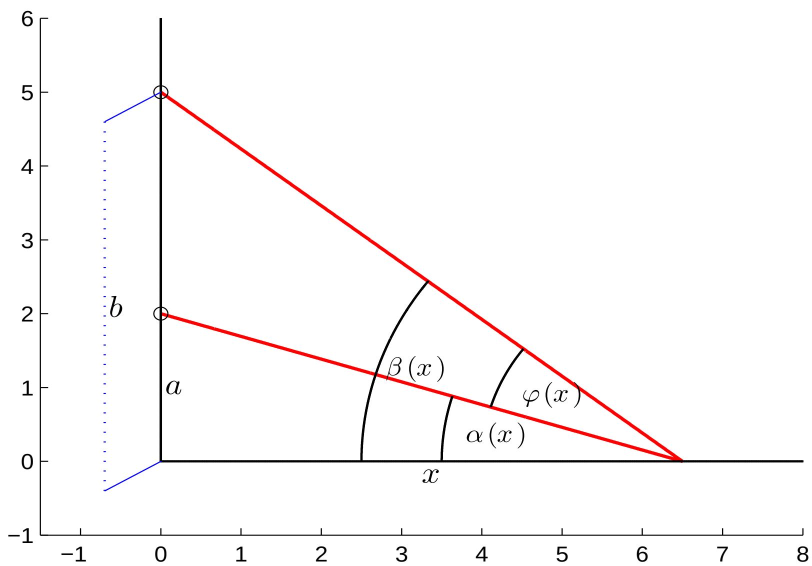
Nejmenší délka je tedy $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$.

$\square$

Věta 6.2. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*, a < b$, funkce f je spojitá na (a, b), $\lim_{x\to a_+} f(x) = \lim_{x\to b_-} f(x) = 0$ a f je kladná funkce. Pak f má maximum v (a, b).*

Příklad. *Na stěně visí obraz. Dolní rám obrazu je vzdálen a, horní b od roviny očí. V jaké vzdálenosti v rovině očí vidíme obraz pod největším úhlem?*

Řešení. Naši vzdálenost od obrazu označíme x. Viz obrázek 11.



Obrázek 11

Úhly $\alpha(x)$ a $\beta(x)$ splňují

$$\operatorname{tg}\big(\alpha(x)\big) = \frac{a}{x}, \qquad \operatorname{tg}\big(\beta(x)\big) = \frac{b}{x}$$

a tedy

$$\alpha(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{x}\right), \qquad \beta(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{x}\right).$$

Obraz pak vidíme pod úhlem $\varphi(x) = \beta(x) - \alpha(x)$, tedy

$$\varphi(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{x}\right).$$

Zřejmě $x \in (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to 0_+} \varphi(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{0_+}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{0_+}\right) = \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

a

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{\infty}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{\infty}\right) = \operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(0) = 0.$$

Dále

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{1+\frac{b^2}{x^2}}\ \frac{b}{x^2} + \frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}}\ \frac{a}{x^2}.$$

Jelikož $\varphi'(x)$ existuje pro všechna $x \in (0,\infty)$, body typu 2 nejsou. Tedy

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{1+\frac{b^2}{x^2}}\ \frac{b}{x^2}+\frac{1}{1+\frac{a^2}{x^2}}\ \frac{a}{x^2}=0 && /\text{upravíme}\\
&-\frac{b}{b^2+x^2}+\frac{a}{a^2+x^2}=0 && /\text{upravíme}\\
&\frac{b}{b^2+x^2}=\frac{a}{a^2+x^2} && /.(b^2+x^2)(a^2+x^2)\\
&b(a^2+x^2)=a(b^2+x^2) && /\text{roznásobíme}\\
&ba^2+bx^2=ab^2+ax^2 && /-ba^2-ax^2\\
&ba^2-ab^2=ax^2-bx^2 && /\text{vytkneme}\\
&ba(a-b)=x^2(a-b) && /:(a-b)\\
&x^2=ab\\
&x=\sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

Ze vzdálenosti $x=\sqrt{ab}$ vidíme tedy obraz pod největším úhlem

□

Příklad. *V bodě A ve vzdálenosti a od břehu jsme na lodi a potřebujeme se dostat co nejrychleji do bodu B ve vzdálenosti b od břehu na souši. Vzdálenost kolmých průmětů A', B' bodů A, B je d. Břeh považujeme za přímku, po vodě se pohybujeme rychlostí v_1, po břehu rychlostí v_2.*

Řešení. Označme X bod na břehu, který má vzdálenost x od B'. Viz obrázek 12.

Potom vzdálenost z bodu A do bodu X je

$$d(AX)=\sqrt{a^2+(d-x)^2}$$

a vzdálenost z bodu X do bodu B je

$$d(XB)=\sqrt{b^2+x^2}.$$

Čas potřebný k přemístění z A do X je potom dán vzorcem

$$T_1(x)=\frac{\sqrt{a^2+(d-x)^2}}{v_1}$$

a čas potřebný k přemístění z X do B je potom dán

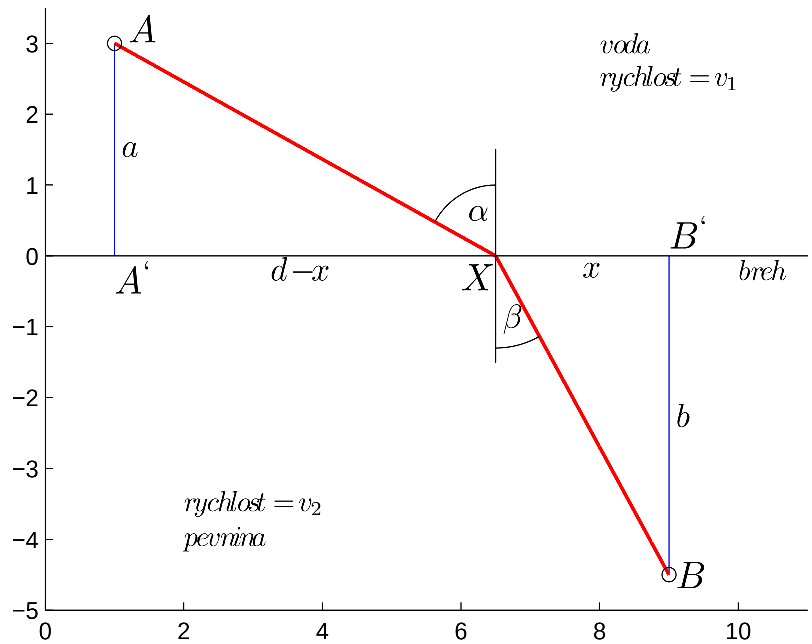
$$T_2(x)=\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{v_2}.$$

Čas potřebný k přemístění z A do B je součet časů potřebných k přemístění z A do X a dále z X do B, tedy celkový čas je

$$T(x)=T_1(x)+T_2(x)=\frac{\sqrt{a^2+(d-x)^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{v_2}.$$

Interval pro x je $(-\infty,\infty)$. Zřejmě je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}T(x)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{a^2+(d-x)^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{v_2}\\
&=\frac{\sqrt{a^2+\infty^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+\infty^2}}{v_2}=\frac{\infty}{v_1}+\frac{\infty}{v_2}=\infty
\end{aligned}$$



Obrázek 12

a

$$\lim_{x\to\infty} T(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{a^2+(d-x)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+x^2}}{v_2}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+\infty^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+\infty^2}}{v_2} = \frac{\infty}{v_1} + \frac{\infty}{v_2} = \infty.$$

Spočítejme $T'(x)$. Snadno zjistíme, že

$$T'(x) = \frac{-(d-x)}{v_1\sqrt{a^2+(d-x)^2}} + \frac{x}{v_2\sqrt{b^2+x^2}}.$$

Jelikož $T'(x)$ existuje pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$, body typu 2 nejsou. Zkoumejme rovnici $T'(x) = 0$.

$$T'(x) = \frac{-(d-x)}{v_1\sqrt{a^2+(d-x)^2}} + \frac{x}{v_2\sqrt{b^2+x^2}} = 0.$$

Tedy

$$\frac{d-x}{v_1\sqrt{a^2+(d-x)^2}} = \frac{x}{v_2\sqrt{b^2+x^2}}.$$

Označ α, β úhly, které svírá kolmice k břehu v bodě X s přímkami AX a BX. Pak předchozí vztah dává

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{d-x}{\sqrt{a^2+(d-x)^2}}}{\frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

což je známý zákon lomu.

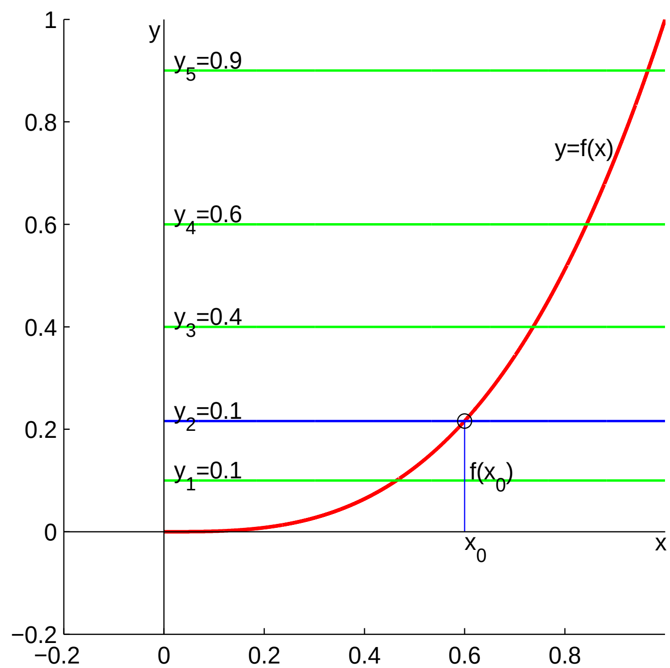
$\square$

7. Přednáška

Taylorův polynom

Motivace. Nechť je dána v intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ funkce f. Volme $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Zajímá nás, zda přibližný výpočet hodnoty $f(x)$ pro x blízká bodu x_0 lze nahradit výpočtem hodnoty nějakého polynomu $P_n(x)$ stupně dejme tomu n.

Zkusme nejprve polynom stupně 0. Označme jej $P_0(x)$. Takový polynom je konstantní funkce. Zajímá nás tedy, jaká konstantní funkce nejlépe aproximuje funkci $f(x)$ v blízkosti bodu x_0. Několik příkladů konstantních funkcí je namalováno na obrázku 13. Geometricky vidíme, že nejlépe ze všech



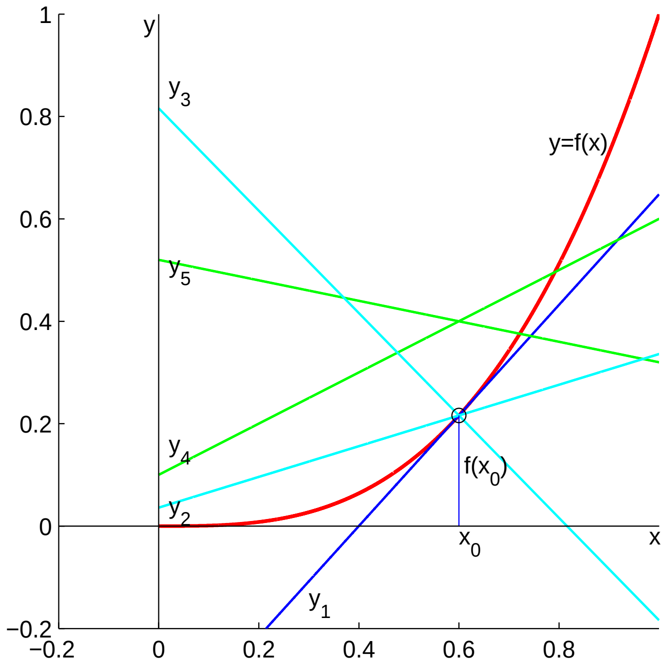
Obrázek 13

konstantních funkcí aproximuje $f(x)$ v blízkosti x_0 funkce y_2 (na obrázku je její graf modře). Je to funkce $y = f(x_0)$. Tedy $P_0(x) = f(x_0)$. Podmínka na funkci $P_0(x)$ 0-tého stupně je tedy

$$P_0(x) = f(x_0).$$

Zkusme nyní polynom stupně 1. Označme jej $P_1(x)$. Takový polynom je lineární funkce. Zajímá nás tedy, jaká lineárí funkce nejlépe aproximuje funkci $f(x)$ v blízkosti bodu x_0. Několik příkladů konstantních funkcí je namalováno na obrázku 14.

Geometricky vidíme, že funkce y_4, y_5 aproximují $f(x)$ v blízkosti x_0 velmi špatně. Je to způsobeno tím, že $P_1(x_0) \neq f(x_0)$. Polynom $P_1(x)$ by měl aspoň procházet bodem $[x_0, f(x_0)]$, tj. $P_1(x_0) = f(x_0)$.



Obrázek 14

Na obrázku 14 vidíme tři funkce, které procházejí bodem $[x_0, f(x_0)]$. Jsou to y_1, y_2, y_3. Opět je vidět, že y_1 aproximuje $f(x)$ v blízkosti x_0 daleko lépe než y_2, y_3. To je způsobeno tím, že y_2, y_3 mají v x_0 jinou tečnu než $f(x)$. Z toho plyne druhý požadavek na $P_1(x)$. Chceme, aby $P_1'(x_0) = f'(x_0)$.

Aby nám polynom prvního stupně $P_1(x)$ co nejlépe aproximoval $f(x)$ v blízkosti x_0, chceme, aby byly splněny dvě podmínky:

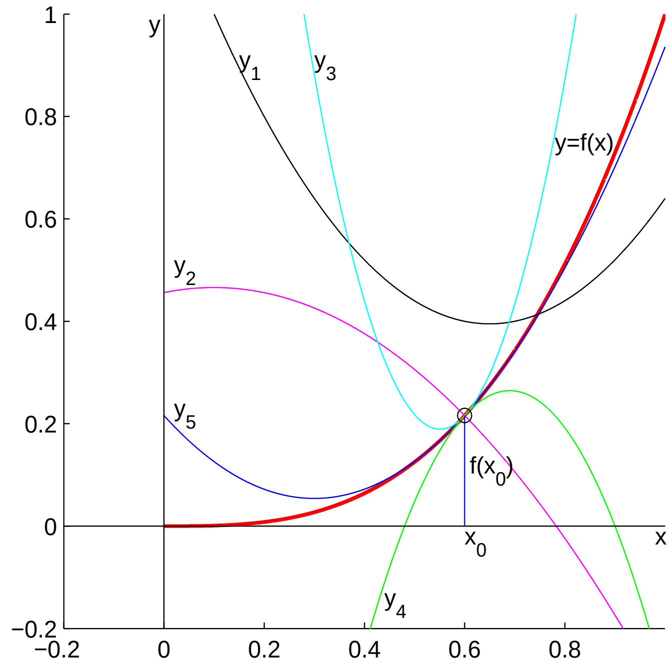
$$P_1(x_0) = f(x_0);$$
$$P_1'(x_0) = f'(x_0).$$

Najděme tvar $P_1(x)$. Protože jde o lineární funkci, jistě existují čísla a, b tak, že $P_1(x) = a+b(x-x_0)$. Pak $P_1(x_0) = a = f(x_0)$ a $P_1'(x_0) = b = f'(x_0)$ a dostáváme

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Zkusme nyní polynom stupně 2. Označme jej $P_2(x)$. Takový polynom je lineární funkce. Zajímá nás tedy, jaká kvadratická funkce nejlépe aproximuje funkci $f(x)$ v blízkosti bodu x_0. Několik příkladů kvadratických funkcí je namalováno na obrázku 15.

Geometricky vidíme, že funkce y_1 aproximuje $f(x)$ v blízkosti x_0 velmi špatně. Je to způsobeno tím, že $P_2(x_0) \neq f(x_0)$. Polynom $P_2(x)$ by měl aspoň procházet bodem $[x_0, f(x_0)]$, tj. $P_2(x_0) = f(x_0)$. Na obrázku 15 vidíme také funkci y_2, která prochází bodem $[x_0, f(x_0)]$. Vidíme, že aproximuje



Obrázek 15

$f(x)$ v blízkosti x_0 špatně ($P_2(x)$ a $f(x)$ mají různé tečny v bodě x_0, tj. $P_2'(x_0) \neq f'(x_0)$), ale přece jen lépe než y_1 (platí již $P_2(x_0) = f(x_0)$).

Lepší aproximece dávají funkce y_3, y_4, y_5. To je způsobeno faktem, že y_3, y_4, y_5 mají v bodě x_0 stejnou tečnu jako $f(x)$. To nám dává další podmínku: $P_2'(x_0) = f'(x_0)$. Jak ale poznat, která z nich je nejlepší? Jistě ne y_4. Ta je otočená dolů. Matematicky to znamená, že má zápornou druhou derivaci (kdežto funkce $f(x)$ má kladnou, protože je konvexní). Lepší aproximace tedy dávají funkce y_3 a y_5. Ale funkce y_3 je zase příliš uzavřená do sebe. Matematicky to znamená, že má velikou druhou derivaci oproti funkci $f(x)$ v bodě x_0. Nejvhodnější kandidát je tedy funkce y_5. Ta má stejnou druhou derivaci jako $f(x)$ v bodě x_0. To nás vede k podmínce $P_2''(x_0) = f''(x_0)$.

Aby nám polynom druhého stupně $P_2(x)$ co nejlépe aproximoval $f(x)$ v blízkosti x_0, chceme, aby byly splněny dvě podmínky:

$$
\begin{aligned}
P_2(x_0) &= f(x_0);\\
P_2'(x_0) &= f'(x_0);\\
P_2''(x_0) &= f''(x_0).
\end{aligned}
$$

Najděme tvar $P_2(x)$. Protože jde o kvadratickou funkci, jistě existují čísla a, b, c tak, že $P_2(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2$. Pak $P_2(x_0) = a = f(x_0)$. Derivací máme $P_2'(x) = b + 2c(x - x_0)$ a tedy $P_2'(x_0) = b = f'(x_0)$. Dále $P_2''(x) = 2c$ máme $P_2''(x_0) = 2c = f''(x_0)$, což dává

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Pokusme se zobecnit naše zkoumání na polynom n-tého stupně. Z předchozích geometrických úvah vidíme, že největší šanci má polynom splňující následující podmínky:

$$
\begin{aligned}
P_n(x_0) &= f(x_0);\\
P_n'(x_0) &= f'(x_0);\\
P_n''(x_0) &= f''(x_0);\\
&\vdots\\
P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0).
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Takový polynom se nazývá Taylorův polynom. Hledejme Taylorův polynom ve tvaru

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

Snadno spočteme

$$
\begin{aligned}
P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} k a_k (x - x_0)^{k-1};\\
P_n''(x) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2};\\
P_n'''(x) &= \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) a_k (x - x_0)^{k-3};\\
&\text{atd.}
\end{aligned}
$$

Dosadíme do podmínky (7.1) hodnotu $x = x_0$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
& f(x_0) = a_0;\\
& f'(x_0) = a_1;\\
& f''(x_0) = 1.2a_2;\\
& f'' = (x_0) = 1.2.3a_3;\\
& \vdots\\
& f^{(k)} = (x_0) = 1.2.3.\ldots k a_k;\\
& \vdots\\
& f^{(n)} = (x_0) = 1.2.3.\ldots n a_n.
\end{aligned}
$$

Tím jsme spočítali koeficienty polynomu $P_n(x)$ a tedy

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Definice 7.1. *Nechť f je definována na nějakém okolí $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ bodu x_0 a nechť existují derivace $f^{(k)}(x_0)$ pro $k = 1, 2, \dots, n$. Taylorovým polynomem n-tého stupně se středem v x_0 nazýváme polynom*

$$P_{n,x_0}f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Taylorova věta (odhad chyby)

Další důležitá věc je odhadnout, jak moc se liší hodnota $f(x)$ od hodnoty $P_n(x)$ v závislosti na δ, stupni n a konečně na samotné hodnotě x. Chceme tedy nalézt nějaký odhad pro $|f(x) - P_n(x)|$. O tom něco říká Taylorova věta, která odhaduje chybu pomocí $\sup |f^{(n+1)}(\xi)|$ na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Vyslovme si ji nejprve pro nejjednodušší případ a to pro polynom stupně 0.

Pro polynom 0. stupně.

Věta 7.2. *Nechť $x_0 < x$, f spojitá v $\langle x_0, x\rangle$ a existuje $f'(t)$ pro $t \in (x_0, x)$. Pak existuje $\xi \in (x_0, x)$ tak, že*

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \tag{7.2}$$

a tedy pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ máme

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - P_0(x)| \le \delta \sup_{\xi\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} |f'(\xi)|.$$

Všimněne si, že vztah (7.2) je vlastně Lagrangeova věta.

Vyslovme a dokažme si nyní tuto větu pro polynom 1. stupně.

Věta 7.3. *Nechť $x_0 < x$, f, f' spojitá v $\langle x_0, x\rangle$ a existuje $f''(t)$ pro $t \in (x_0, x)$. Pak existuje $\xi \in (x_0, x)$ tak, že*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

a tedy pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ máme

$$|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| = |f(x) - P_1(x)| \le \frac{\delta^2}{2} \sup_{\xi\in(x_0-\delta,x_0+\delta)} |f''(\xi)|.$$

Důkaz. Idea je následující. Odečteme od $f(t)$ kvadratickou funkci tak, zby výsledná funkce měla nulové hodnoty v x_0, x a nulovou derivaci v x_0. Pak se jen dvakrát použije Lagrangeova věta. Definujme

$$h(t) = f(t) - f(x_0) - f'(x_0)(t - x_0) - M(t - x_0)^2,$$

kde

$$M = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}.$$

Zřejmě $h(x_0) = 0$. Dále

$$\begin{aligned}
h(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - M(x - x_0)^2\\
&= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}(x - x_0)^2\\
&= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \Big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Máme tedy $h(x_0) = h(x) = 0$ a podle Lagrangeovy věty existuje $\xi_0 \in (x_0, x)$ tak, že

$$h'(\xi_0) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Uvažujme interval $[x_0, \xi_0]$. Spočítejme $h'(t)$. Zřejmě je

$$h'(t) = \Big(f(t) - f(x_0) - f'(x_0)(t - x_0) - M(t - x_0)^2\Big)' = f'(t) - f'(x_0) - 2M(t - x_0)$$

a tedy $h'(x_0) = 0$. Protože také $h'(\xi_0) = 0$, víme dle Lagrangeovy věty pro funkci h' na intervalu $[x_0, \xi_0]$, že existuje $\xi_1 \in (x_0, \xi_0)$ tak, že

$$h''(\xi_1) = \frac{h'(\xi_0) - h'(x_0)}{\xi_0 - x_0} = 0.$$

Zřejmě

$$h''(t) = \Big(f'(t) - f'(x_0) - 2M(t - x_0)\Big)' = f''(t) - 2M.$$

Dosaďme ξ_1 za t a dostaneme

$$0 = h''(\xi_1) = f''(\xi_1) - 2M.$$

Tedy $M = \frac{f''(\xi_1)}{2}$, což dává podle definice M

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(\xi_1)}{2}(x - x_0)^2,$$

což jsme měli dokázat.

□

Poznamenejme, že v důkazu jsme dvakrát použili Lagrangeovu větu.

Vyslovme si nyní Taylorovu větu pro polynom n. stupně.

Věta 7.4. *Nechť $x_0 < x$, $f, f', \dots f^{(n)}$ spojité v $\langle x_0, x\rangle$ a existuje $f^{(n+1)}(t)$ pro $t \in (x_0, x)$. Pak existuje $\xi \in (x_0, x)$ tak, že*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$
$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

a tedy pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ máme

$$\begin{aligned}&\Big|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &- \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\Big| \\ &= |f(x) - P_n(x)| \le \frac{\delta^{n+1}}{n+1} \sup_{\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} |f^{(n+1)}(\xi)|.\end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz vyžaduje $(n + 1)$-krát použít Lagrangeovu větu.

□

Maclaurinův vzorec

Je to Taylorův polynom pro $x_0 = 0$.

Věta 7.5. *Nechť $f, f', \dots f^{(n)}$ jsou spojité v okolí $\mathcal{U}(0)$ a existuje $f^{(n+1)}(t)$ pro $t \in \mathcal{U}(0)$. Nechť $x \in \mathcal{U}(0)$. Pak existuje ξ ostře mezi x a 0 tak, že*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Příklady

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^{n+1}\frac{\sin\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+2}\frac{\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{(1+\xi)^{n+1}}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Eulerův vzorec

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \dots + \frac{i^nx^n}{n!} + \dots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\Big) \\
&= \cos x + i\sin x.
\end{aligned}$$

Tím jsme ukázali Eulerův vzorec:

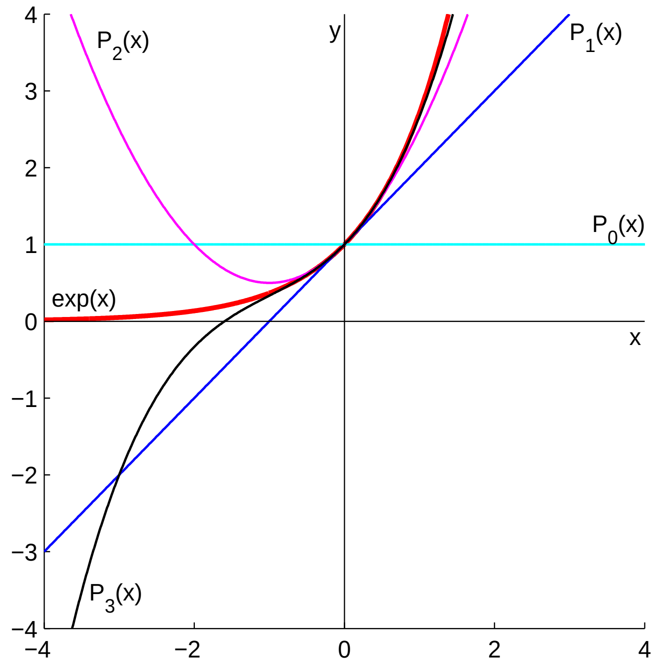
$$\boxed{\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x.}$$

Užití Taylora na výpočet limit

Příklad.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \dots\Big) = -\frac{1}{6}.$$

Na závěr si pro srovnání namalujeme Taylorovy polynomy nultého ($P_0(x)$), prvního ($P_1(x)$), druhého ($P_2(x)$) a třetího ($P_3(x)$) funkce e^x (na obrázku 16 je značená exp). Vidíme, jak se funkce $P_0(x), P_01(x), P_2(x), P_4(x)$ postupně přibližují k e^x.



OBRÁZEK 16

LINEÁRNÍ ALGEBRA

8. Přednáška

Definujme

$$\mathbb{R}^n = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_n); u_i \in \mathbb{R}\}.$$

Dány $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak definujeme

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n), \\ \alpha u &= (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n). \end{aligned}$$

Nulový vektor je $o = (0, 0, \dots, 0)$ a opačný $-u$ k u je $(-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$. Evidentně pro každé $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &u + v = v + u; \\ &(u + v) + w = u + (v + w); \\ &u + o = u; \\ &u + (-u) = o; \\ &\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v; \\ &(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u; \\ &(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u); \\ &1.u = u. \end{aligned}$$

Definice 8.1. *Buď V libovolná množina, ve které je definováno sčítání prvků a násobení prvku reálným číslem. Řekneme, že $(V, +, .)$ je vektorový prostor, pokud pro každé $u, v, w \in V$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:*

(i) $u + v = v + u$,
(ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$;
(iii) *existuje $o \in V$ tak, že pro každé $u \in V$ platí $u + o = u$;*
(iv) *pro každé $u \in V$ existuje $v \in V$ takové, že $u + v = o$;*
(v) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
(vi) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
(vii) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$;
(viii) $1.u = u$.

Definice 8.2. *Nechť $(V, +, .)$ je vektorový prostor. Skupinou vektorů nazveme každou konečnou posloupnost $[u_1, u_2, \dots, u_k]$, $u_i \in V$. Skupina $[u_1, u_2, \dots, u_k]$ se nazývá lineárně nezávislá (LN), pokud*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = o \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

V opačném případě se nazývá lineárně závislá (LZ).

Příklad. *Je skupina* $[(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)]$ *LN?*
Nechť $\alpha(1,1,2)+\beta(1,2,1)+\gamma(2,1,1)=(0,0,0)$. *Pak*

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+2\gamma&=0; &\quad &\Rightarrow \alpha=-\beta-2\gamma\\ \alpha+2\beta+\gamma&=0;\\ 2\alpha+\beta+\gamma&=0.\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}\beta-\gamma&=0 &\quad &\Rightarrow \beta=\gamma\\ -\gamma&=0.\end{aligned}$$

Z toho plyne jednoznačně $\alpha=\beta=\gamma=0$ *a skupina je LN.*

Příklad. *Je skupina* $[(1,1,1),(1,-1,2),(2,0,3)]$ *LN?*
Nechť $\alpha(1,1,2)+\beta(1,2,1)+\gamma(2,1,1)=(0,0,0)$. *Pak*

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+2\gamma&=0; &\quad &\Rightarrow \alpha=-\beta-2\gamma\\ \alpha-\beta&=0;\\ \alpha+2\beta+3\gamma&=0.\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}-2\beta-2\gamma&=0 &\quad &\Rightarrow \beta=-\gamma\\ \beta+\gamma&=0.\end{aligned}$$

Dále

$$0.\gamma=0.$$

Z toho plyne $\alpha=\beta=-\gamma$. *Stačí tedy volit* $\alpha=1,\beta=1,\gamma=-1$ *a skupina je LZ.*

Definice 8.3. *Nechť je dána skupina* $\mathcal{S}=[u_1,u_2,\dots,u_k]$ *ve* V. *Každý výraz*

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_ku_k$$

nazýváme lineární kombinací vektorů z $\mathcal{S}$.

Řekneme, že vektor v *je lineární kombinací vektorů z* $\mathcal{S}$, *pokud existují reálná čísla* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ *tak, že*

$$v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_ku_k.$$

Nechť je dána skupina $\mathcal{S}=[u_1,u_2,\dots,u_k]$ *ve* V. *Množinu všech vektorů, které jsou lineární kombinací vektorů s* $\mathcal{S}$ *nazýváme lineárním obalem skupiny* $\mathcal{S}$ *a značíme* $\mathrm{Lin}[u_1,u_2,\dots,u_k]$.

Definice 8.4. *Nechť je dána skupina* $\mathcal{B}=[u_1,u_2,\dots,u_k]$ *ve* V. *Potom* $\mathcal{B}$ *se nazývá báze* V, *pokud*

(i) $\mathcal{B}$ *je LN;*
(ii) *každý vektor* $v\in V$ *lze napsat jako nějaká lineární kombinace vektorů z* $\mathcal{B}$.

Příklad. *Kanonická báze v* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\begin{gathered}(1,0,0,\dots,0),\\(0,1,0,\dots,0),\\ \ddots\\(0,0,0,\dots,1).\end{gathered}$$

Skupina $[(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)]$ *je báze v* $\mathbb{R}^3$.

Věta 8.5. *Nechť $(V, +, .)$ je vektorový prostor a nechť $\mathcal{B} = [b_1, b_2, \dots, b_k]$, $\mathcal{C} = [c_1, c_2, \dots, c_l]$ jsou dvě báze V. Potom $k = l$*

Definice 8.6. *Nechť $(V, +, .)$ je vektorový prostor a nechť $\mathcal{B} = [b_1, b_2, \dots, b_k]$ je báze V. Pak číslo k se nazývá dimenze V a píšeme $k = \dim V$.*

Definice 8.7. *Nechť $(V, +, .)$ je vektorový prostor a nechť $W \subset V$. Říkáme, že W je podprostor V, pokud*

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ a } u, v \in W \Rightarrow \alpha u + \beta v \in W.$$

Věta 8.8. *Nechť $(V, +, .)$ je vektorový prostor a nechť $W \subset V$ je vektorový podprostor. Pak W je vektorový prostor a je-li $\dim V < \infty$, pak $\dim W \leq \dim V$.*

Příklad.

$$\{(t, t^2); t \in \mathbb{R}\} \text{ není podprostor v } \mathbb{R}^2;$$

$$\{(t, 2t, -3t); t \in \mathbb{R}\} \text{ je podprostor v } \mathbb{R}^3;$$

$$\{(t + s, t - 2s, 2t + s); t \in \mathbb{R}\} \text{ je podprostor v } \mathbb{R}^3.$$

9. Přednáška

Úkol: Jak zjistíme dim$V$ a nějakou bázi? Tomuto úkolu se budeme v této přednášce věnovat. Napíšeme vektory $u_1, u_2, \dots, u_m$ pod sebe do obdélníkového schématu, do tzv. matice.

Definice 9.1. *Matice typu $m \times n$ je obdélníkové schéma reálných čísel*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Zřejmě n je počet sloupců a m počet řádků.

Definice 9.2. *Dána matice typu $m \times n$ jako v* (9.1). *Polož*

$$\begin{aligned} u_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ u_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ &\dots \\ u_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{aligned}$$

Pak hodností matice $h(\mathbb{A})$ rozumíme $\dim \mathrm{Lin}[u_1, u_2, \dots, u_m]$.

Definice 9.3. *Dána matice $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ jako v* (9.1). *Označme $k = \min\{m, n\}$. Pak $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$ je diagonála. Matici $\mathbb{A}$ nazveme horní lichoběžníkovou, pokud pod diagonálou jsou nuly.*

Příklad. *Buď dána matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -9 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 12 & -7 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 12 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 9 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

V dalším je vyznačena diagonála v matici A.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 6 & -3 & 1 \\ -1 & \boxed{1} & 2 & -1 & -9 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & \boxed{3} & 1 & 12 & -7 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & \boxed{7} & 12 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{9} & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -9 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 12 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

je horní lichoběžníková.

Věta 9.4. *Buď $\mathbb{A}$ horní lichoběžníková matice typu $m \times n$ jako v* (9.1). *Označme $k = \min\{m, n\}$ a nechť $a_{ii} \neq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, k$. Pak $h(\mathbb{A}) = k$.*

Příklad. *V případě matice B z předchozího příkladu je hodnost $h = 5$.*

Věta 9.5. *Dána matice $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ jako v (9.1). Pak následující úpravy nezmění hodnost $\mathbb{A}$.*

(i) *výměna libovolných dvou řádků;*
(ii) *vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem;*
(iii) *přičteme-li k libovolnému řádku lineární kombinaci ostatních řádků;*
(iv) *vynechání nulového řádku.*

Definice 9.6. *Dána matice*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pak matice $\mathbb{A}^T$ symetrická s $\mathbb{A}$ kolem diagonály se nazývá transponovaná;

$$\mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Příklad. *Buď dána matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Potom transponovaná matice je

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta 9.7. *Dána matice $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ jako v (9.1). Pak $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$.*

Prakticky: Úpravy (i), (ii), (iii), (iv) lze udělat se sloupci, aniž změníme hodnost matice.

Gaussův algoritmus.

Postupnými úpravami (i), (ii), (iii), (iv) převedeme matici $\mathbb{A}$ na horní lichoběžníkový tvar s nenulovými prvky na diagonále. Pak jenom spočítáme řádky.

Příklad. *Najdi hodnost matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -9 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 12 & -7 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 12 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 9 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -9 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 12 & -7 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & 7 & 12 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 9 & -5 & 2 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\backsim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\backsim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy $h = 3$.

Příklad. *Najdi hodnost matice v závislosti na parametru λ.*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

v závislosti na parametru λ.

Řešení:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$
$$\backsim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 2 - \lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Singulární hodnoty jsou $\lambda - 1 = 0,\ 2 - \lambda - \lambda^2 = 0$, tj. $\lambda = 1$ nebo $\lambda = -2$.

1. $\lambda \notin \{1, -2\}$, pak $h = 3$.
2. $\lambda = 1$, pak máme matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $h = 1$.
3. $\lambda = -2$, pak máme matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $h = 2$.

10. Přednáška

Soustava lineárních rovnic

Příklad. *Řešte soustavu rovnic*

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 2, \\ 2x & -y & +3z & = 4, \\ -3x & +2y & +z & = 11. \end{array}$$

Řešení. Postupně jako na střední škole:

$$\begin{array}{rrrlcl} x & +y & +z & = 2 & \Rightarrow & x = 2 - y - z \\ 2x & -y & +3z & = 4 & & \\ -3x & +2y & +z & = 11 & & \end{array}$$

Bez komentáře

$$\begin{array}{rrrlcl} x & +y & +z & = 2 & & \\ 2(2-y-z) & -y & +3z & = 4 & \Rightarrow & 4 - 2y - 2z - y + 3z = 4 \\ -3(2-y-z) & +2y & +z & = 11 & \Rightarrow & -6 + 3y + 3z + 2y + z = 11 \end{array}$$

Bez komentáře

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 2 \\ & -3y & +z & = 0 \\ & 5y & +4z & = 17 \end{array}$$

Bez komentáře

$$\begin{array}{rrrlcl} x & +y & +z & = 2 & & \\ & -3y & +z & = 0 & \Rightarrow & y = \frac{1}{3}z \\ & 5y & +4z & = 17 & & \end{array}$$

Bez komentáře

$$\begin{array}{rrrlcl} x & +y & +z & = 2 & & \\ & -3y & +z & = 0 & & \\ & 5y & +4z & = 17 & \Rightarrow & \frac{5}{3}z + 4z = 17 \end{array}$$

Bez komentáře

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 2 \\ & -3y & +z & = 0 \\ & & \frac{17}{3}z & = 17 \end{array}$$

Bez komentáře

$$z = 3, \quad -3y + 3 = 0 \;\Rightarrow\; y = 1, \quad x + 1 + 3 = 2 \;\Rightarrow\; x = -2.$$

Tedy řešení jze psát jako vektor $(-2, 1, 3)$.

Přehlednější postup: Postupujeme stejně, ale píšeme to úsporněji.

$$\begin{array}{rrrl|l} x & +y & +z & = 2, & (-2)\ 3 \\ 2x & -y & +3z & = 4, & \\ -3x & +2y & +z & = 11. & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrl|l} x & +y & +z & = 2, & \\ & -3y & +z & = 0, & 5 \\ & 5y & +4z & = 17. & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 2, \\ & -3y & +z & = 0, \\ & & 17z & = 51. \end{array}$$

Tedy $z = 3, y = 1, x = -2$.

□

Není ani potřeba psát neznámé:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 51 \end{array}\right)$$

Tedy $z = 3, y = 1, x = -2$.

Definice 10.1. *Soustavou lineárních algebraických rovnic rozumíme soustavu rovnic*

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}, \tag{10.1}$$

kde a_{ij}, b_i jsou dané a x_i jsou neznámé.

Definice 10.2. *Soustavu z definice 10.1 budeme psát do matice*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je matice soustavy a $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ je vektor pravé strany. Zaveďme ještě rozšířenou matici soustavy.

$$\widetilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Viděli jsme, že při řešení soustavy rovnic jde vlastně o Gaussův algoritmus.

Příklad. *Řešte soustavu rovnic*

$$\begin{array}{rrrl} x & +2y & -3z & = 1, \\ 2x & -4y & +z & = 2, \\ 3x & -2y & -2z & = 4. \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & 0 \\ 0 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Poslední řádek lze přepsat do rovnice $0x + 0y + 0z = 1$, což evidentně nemá řešení, čili soustava nemá řešení.

Věta 10.3. *Soustava* (10.1) *má řešení právě tehdy, když* $h(\mathbb{A}) = h(\widetilde{\mathbb{A}})$.

Věta 10.4. *Nechť je dána soustava* (10.1) *taková, že* $h(\mathbb{A}) = h(\widetilde{\mathbb{A}}) := h$. *Pak musíme volit* $n - h$ *parametrů.*

Příklad. *Řešte soustavu rovnic*

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = 7, \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +6x_4 & +3x_5 & = 14, \\ 2x_1 & +5x_2 & & +10x_4 & +3x_5 & = 20. \end{array} \tag{10.2}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & 3 & 14 \\ 2 & 5 & 0 & 10 & 3 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

Odtrhneme nyní matici 3×3

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{|rrr|rr|r} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

a za zbytek volíme parametry. Volme parametry $x_3 - t, x_5 = s$. Vyjde postupně

$$x_4 = -1 + 2s,$$

$$x_2 = 7 - 3(-1 + 2s) - 2t - s = 7 + 3 - 6s - 2t - s = 10 - 2t - 7s,$$

$$x_1 = 7 - 2(10 - 2t - 7s) - 3(-1 + 2s) + t - 2s = -10 + 5t + 6s.$$

Řešení je tedy $(-10 + 5t + 6s, 10 - 2t - 7s, t, -1 + 2s, s),\ t, s \in \mathbb{R}$.

Příklad. *Řešte soustavu rovnic v závislosti na parametru* λ.

$$\begin{array}{rrrl} \lambda x_1 & +x_2 & x_3 & = 1, \\ x_1 & +\lambda x_2 & +x_3 & = \lambda, \\ x_1 & +x_2 & +\lambda x_3 & = \lambda^2. \end{array}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{array}\right)$$

Singulární hodnoty jsou pro $1-\lambda=0,\ 2+\lambda=0$, tedy $\lambda=1$ a $\lambda=-2$.

1. $\lambda \notin \{1,-2\}$, pak existuje právě jedno řešení

$$\Big(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{(1+\lambda)^2}{(2+\lambda)}\Big).$$

2. $\lambda=1$, pak máme matici $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ a tedy množina všech řešení je

$$(1-t-s, t, s),\ t, s \in \mathbb{R}.$$

3. $\lambda=-2$, pak máme matici $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ a soustava nemá řešení.

11. Přednáška

Soustava homogenních lineárních algebraických rovnic

Definice 11.1. *Soustavou homogenních lineárních rovnic rozumíme soustavu rovnic*

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =0 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =0
\end{array}, \tag{11.1}
$$

kde $A=(a_{ij}),\ i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n$ *je daná matice soustavy a* x_i *jsou neznámé.*

Příklad. *Řešte soustavu rovnic*

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & +2x_5 & =0, \\
x_1 & +3x_2 & +x_3 & +6x_4 & +3x_5 & =0, \\
2x_1 & +5x_2 & & +10x_4 & +3x_5 & =0.
\end{array}
$$

Řešení:

$$
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\
1 & 3 & 1 & 6 & 3 & 0 \\
2 & 5 & 0 & 10 & 3 & 0
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0
\end{array}\right)
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & x_5 \end{array} \\
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Volme parametry $x_3 - t, x_5 = s$. Vyjde postupně

$$x_4 = 2s,$$

$$x_2 = -3(+2s) - 2t - s = -6s - 2t - s = -2t - 7s,$$

$$x_1 = -2(-2t - 7s) + (+2s) - 3t - 2s = t + 14s.$$

Řešení je tedy $(t + 14s, -2t - 7s, t, +2s, s),\ t, s \in \mathbb{R}$.

Věta 11.2. *Buď dána homogenní soustava rovnic* (11.1)*. Označme* $h(A)$ *hodnost matice* A *a nechť* V *značí množinu všech řešení této soustavy. Pak* V *je vektorový podprostor v* $\mathbb{R}^n$*, jehož dimenze je rovna* $n - h(A)$.

Poznámka. *V předchozím příkladě můžeme psát*

$$V = \{t(1, -2, 1, 0, 0) + s(14, -7, 0, 2, 1); t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Vektory $(1, -2, 1, 0, 0), (14, -7, 0, 2, 1)$ *tvoří bázi* V.

Poznámka. *V předchozí přednášce (viz* (10.2)*) jsme řešili soustavu rovnic*

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & +2x_5 & =7, \\
x_1 & +3x_2 & +x_3 & +6x_4 & +3x_5 & =14, \\
2x_1 & +5x_2 & & +10x_4 & +3x_5 & =20.
\end{array}
$$

Vyšlo nám $(-10+5t+6s, 10-2t-7s, t, -1+2s, s),\ t, s \in \mathbb{R}$*, což můžeme psát jako* $\{(-10, 10, 0, -1, 0) + t(5, -2, 1, 0, 0) + s(6, -7, 0, 2, 1); t, s \in \mathbb{R}\} = (-10, 10, 0, -1, 0) + V$.

Věta 11.3. *Dána soustava*

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{array},$$

a k ní přidružená soustava

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =0 \end{array}.$$

Potom nehomogenní soustavu lze řešit tak, že vyřešíme homogenní soustavu, tj. najdeme V, najdeme jeden vektor $v \in \mathbb{R}^n$, který řeší nehomogenní soustavu a všechna řešení nehomogenní soustavy dostaneme jako množinu $\{v + w, w \in V\}$.

Operace s maticemi

Součet dvou matic a násobení matice skalárem.

Definice 11.4. *Dány matice*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definujme

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\alpha\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Příklad.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Potom

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad 2\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Věta 11.5. *Množina všech matic typu $m \times n$ s právě definovanými operacemi tvoří vektorový prostor dimenze nm.*

Násobení dvou matic mezi sebou.

Definice 11.6. *Dány matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ typu $n \times m$ a $m \times k$*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}.$$

Součin $\mathbb{AB}$ je typu $n \times k$ a je definován následujícím způsobem:

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nk} \end{pmatrix},$$

kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj}$$
$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Příklad. *Buď*

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\mathbb{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 13 & -4 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. *V předchozím příkladě vidíme, že neplatí $AB = BA$, protože BA není vůbec definovaná.*

Věta 11.7. *Platí:*

(i) $(A + B)C = AC + BC$;
(ii) $A(B + C) = AB + AC$;
(iii) $A(BC) = (AB)C$.

Definice 11.8. *Čtvercovou matici E typu $n \times n$ definovanou*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

nazýváme jednotkovou maticí.

Věta 11.9. *Platí:*

$$AE = EA = A \quad \textit{pro každou matici } A \textit{ typu } n \times n.$$

Zkoumejme násobení matic typu $n \times n$. V tomto případě jsou matice AB a BA definovány vždy, ale stejně to není komutativní, jak ukazuje následující příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice.

Definice 11.10. *Buď dána matice A typu $n \times n$. Matici X typu $n \times n$ nazveme invezní k A, pokud $AX = E$. Značíme ji A^{-1}.*

Definice 11.11. *Čtvercová matice A typu $n \times n$ se nazývá regulární , pokud existuje A^{-1}. V opačném případě se nazývá singulární.*

Věta 11.12. *Matice A typu $n \times n$ je regulární právě tehdy, když $h(A) = n$. Inverzní matice je určena jednoznačně. Pro regulární matici A platí $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.*

Výpočet inverzní matice.

Postup Gaussovým algoritmem:
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$
Nyní upravujeme (pouze řádkovými úpravami) matici tak, aby vlevo byla jednotková. Vpravo je pak inverzní.

Příklad. *Vypočtěte A^{-1}, kde*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
Tedy
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

12. Přednáška

Determinanty matic 2×2 a 3×3

Příklad. *Dány dva vektory $u = (a, b)$ a $v = (c, d)$. Jaký je plošný obsah rovnoběžníku doplněném z vektorů u a v?*

Snadno vypočteme, že výsledek je $|ad - bc|$. Číslo $ad - bc$ je dosti důležité a zavádí se pro něj zvláštní pojem.

Definice 12.1. *Nechť je dána matice 2×2*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom determinant A definujeme

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

Analogicky bychom mohli hledat objem rovnoběžnostěnu pro tři dané vektory.

Definice 12.2. *Nechť je dána matice 3×3*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Potom determinant A definujeme

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1.$$

Jak si to pamatovat! (Sarusovo pravidlo)

$$\det A = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \end{array} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1.$$

Příklad. *Buď*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\det A = -2 - 12 = -14,$$

$$\det B = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{matrix} \end{array} = 6 - 2 + 9 - (3 + 9 - 4) = 13 - 8 = 5.$$

Determinanty matic $n \times n$

Definici determinantu $n \times n$ zavedeme geometricky. Stejně jako v případě 2×2 a 3×3 vyjadřuje "orientovaný" n-rozměrný objem rovnoběžnostěnu vytvořeného z řádků nějaké dané matice $n \times n$. Následující definice kopíruje geometrické vlastnosti "orientovaného" objemu (orientace je vlastně dána vlastností (i)).

Definice 12.3. *Determinantem n-tého řádu rozumíme zobrazení z množiny matic řádu $n \times n$ do množiny reálných čísel splňující následující axiomy:*

(i) *Vyměníme-li v matici libovolné dva řádky, změní se znaménko determinantu;*
(ii) *Vynásobíme-li libovolný řádek matice číslem α, vynásobí se celý determinant číslem α;*
(iii) *Přičteme-li k libovolnému řádku lineární kombinaci ostatních řádků, determinant se nezmění;*
(iv) *Determinant jednotkové matice je roven* 1.

Uvědomme si, že vlastnost (ii) vlastně říká, že z libovolného řádku můžeme vytknout libovolné nenulové číslo.

Pro praktický výpočet determinantu je užitečné vědět, že poslední axiom je možno nahradit následujícím:

(iv') *Determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na digonále.*

Vlastnosti (i),(ii),(iii) a (iv') dávají nyní praktický návod na výpočet determinantu řádu $n \times n$. Na danou matici provedeme Gaussův eliminační proces a ve výsledné horní trojúhelníkové matici vynásobíme prvky na diagonále.

Příklad. *Vypočítejte determinant matice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 8 & 10 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Snadno počítáme

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 8 & 10 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-3) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

□

Věta 12.4. *Matice typu $n \times n$ je regulární, právě když je její determinant nenulový.*

Výpočet inverzní matice pomocí determinantů

Definice 12.5. *Buď A matice typu $n \times n$. Definujme doplňkovou matici A^d k matici A dle následujícího předpisu.*

Vezmeme i, j a vynechme z matice A $i-$tý řádek a $j-$tý slopupec. Tím dostaneme čtvercovou matici A_{ij} o řád nižší než je řád matice A. Prvky A^d jsou nyní

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Věta 12.6. *Buď A regulární matice typu $n \times n$. Pak*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^d)^T.$$

Příklad. *Buď*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte A^{-1} a B^{-1}.

Řešení. Snadno spočteme

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} & c_{11} &= 1 \\ A_{12} &= \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} & c_{12} &= -6 \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} & c_{21} &= -2 \\ A_{22} &= \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix} & c_{22} &= -2. \end{aligned}$$

a tedy

$$A^d = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dále,

$$B_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad c_{11} = -1$$
$$B_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad c_{12} = -13$$
$$B_{13} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad c_{21} = 5$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad c_{21} = -1$$
$$B_{22} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad c_{22} = -3$$
$$B_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad c_{23} = 0$$

$$B_{31} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad c_{31} = 2$$
$$B_{32} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad c_{32} = 11$$
$$B_{33} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad c_{33} = -5$$

a tedy

$$B^d = \begin{pmatrix} -1 & 13 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

a

$$A^{-1} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 13 & -3 & -11 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

□

Věta 12.7 (Cramerovo pravidlo)**.** *Buď A regulární matice typu $n \times n$. Nechť je dána soustava v maticovém tvaru*

$$Ax = b.$$

Označme A_i matici, která vznikne z A tak, že $i-$tý sloupec v matici A nahradíme vektorem pravé strany. Pak

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Příklad. *Dána soustava*

$$\begin{aligned} 3x \quad -5y &= 1, \\ 2x \quad +y &= 5. \end{aligned}$$

Řešení. Počítejme

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 26, \qquad \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 13, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

Tedy

$$x = \frac{26}{13} = 2, \qquad y = \frac{13}{13} = 1.$$

Řešením je tedy vektor $(2, 1)$.

□

Body a vektory

Body v $\mathbb{R}^3$ mají tři souřadnice, $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$. Vektory také, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Rozdíl bodů je vektor, $u = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Rovnice přímky a úsečky

Je dán vektor $u = (u_1, u_2, u_3)$ a bod $A = [a_1, a_2, a_3]$. Pak

$$X = A + tu, \quad t \in \mathbb{R} \text{ je parametrická rovnice přímky;}$$
$$X = A + tu, \quad t \in \langle a, b\rangle \text{ je parametrická rovnice úsečky;}$$
$$X = A + t(B - A), \quad t \in \langle 0, 1\rangle \text{ je parametrická rovnice úsečky AB.}$$

V souřadnicích:

$$\begin{aligned} p: x_1 &= a_1 + tu_1 \\ x_2 &= a_2 + tu_2; \\ x_3 &= a_3 + tu_3. \end{aligned} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{aligned} p: x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2; \\ z &= a_3 + tu_3. \end{aligned}$$

Prakticky máme pro $A = [1, -2, 3]$, $u = (7, 4, -5)$:

$$\begin{aligned} p: x &= 1 + 7t \\ y &= -2 + 4t; \\ z &= 3 - 5t. \end{aligned}$$

Vektor u se nazývá směrovým vektorem přímky p.

Upozornění: V prostoru neexistuje obecná rovnice přímky.

Rovnice roviny

Je dán $A = [a_1, a_2, a_3]$ a vektory $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Pak rovina ρ je popsána

$$X = A + tu + sv, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

nebo po složkách

$$\begin{aligned} \rho: x &= a_1 + tu_1 + sv_1; \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2; \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3. \end{aligned}$$

Vektory $u,\ v$ se nazývájí směrovými vektory roviny ρ.

Příklad. *Rovina ρ je daná rovnicemi*

$$\begin{aligned} \rho: x &= 1 + 2t + 3s; \\ y &= -2 + 3t - 6s; \\ z &= -3 + \ s. \end{aligned}$$

To jsou parametrické rovnice roviny.

Eliminujme t, s.

$$s = \frac{x-1-2t}{3}$$

a pak

$$y = -2 + 3t - 2(x-1-2t) = -2x + 7t;$$
$$z = -3 + \frac{x-1-2t}{3} = -\frac{10}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}t.$$

Tedy

$$2y = -4x + 14t;$$
$$21z = -70 + 7x - 14t.$$

Součtem je $2y + 21z = 3x - 70$. Tedy rovina ρ má rovnici

$$\rho : \ 3x - 2y - 21z - 70 = 0.$$

Obecný tvar rovnice roviny je

$$\rho : \ ax + by + cz + d = 0.$$

Upozornění: Vektor (a, b, c) je kolmý k rovině ρ.

Velikost vektoru a vzdálenost dvou bodů a

Dán $u = (u_1, u_2, u_3)$. Definujme velikost vektoru u výrazem $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Vzdálenost dvou bodů $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ definujme

$$d(A, B) = |B - A| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Skalární součin a odchylka vektorů

Dány $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Pak skalární součin je

$$u.v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Odchylka α vektorů je dána vzorcem

$$\cos\alpha = \frac{u.v}{|u|.|v|}.$$

Tedy u a v jsou kolmé, pokud $u.v = 0$.

Vektorový součin

Vysvětlíme si pojem determinantu matice 2×2. Buď A daná matice,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Její determinant spočteme

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Dány $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$. Pak vektorový součin je

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Vlasnosti vektorového součinu.

(i) $u \times v = -v \times u$;
(ii) $u \times v$ je kolmý k u i k v;
(iii) velikost vektoru $u \times v$ je plošný obsah rovnoběžníka daného u a v.

Příklad. *Je dán vektor $u = (2, -5, 4)$ a body $A = [1, 2, -3], B = [3, 1, -1]$. Vypočítejte velikost vektoru $|u|$ a $d(A, B)$.*

Řešení. Zřejmě je

$$|u| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

a

$$d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (-1-(-3))^2} = \sqrt{4+1+4} = 3.$$

□

Příklad. *Je dán bod $A = [4, -1, 1]$ a přímka $p : (1+t, -2+t, -t)$. Najděte bod B souměrně sdružený s A podle přímky p.*

Řešení. Rovina α kolmá k p jdoucí bodem A má rovnici

$$\alpha : x + y - z + d = 0.$$

Dosadíme A a máme $d = -2$, tedy

$$\alpha : x + y - z - 2 = 0.$$

Nyní spočítáme průsečík $P = p \cap \alpha$.

$$(1+t) + (-2+t) - (-t) - 2 = 0 \;\Rightarrow\; t = 1.$$

tedy $P = [2, 0, -1]$. Pak

$$B = P + (P - A) = [2, 0, -1] + ([2, 0, -1] - [4, -1, 1]) = [2, 0, -1] + (-2, 1, -2) = [0, 1, -3].$$

□

Příklad. *Vypočítejte vzdálenost bodu $A = [3, -5, 1]$ od přímky $p : (1-t, 4+2t, 3+6t)$.*

Řešení. $B = [1, 4, 3]$ a $u = (-1, 2, 6)$, $v = A - B = (2, -9, -2)$. Pak $u \times v = (50, 10, 5)$. Potom

$$d(A, p) = \frac{|u \times v|}{|u|} = \frac{\sqrt{50^2 + 10^2 + 5^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{5\sqrt{105}}{\sqrt{41}}.$$

□

Příklad. *Vypočítejte vzdálenost bodu $A = [3, -5, 1]$ od roviny $\alpha :\; 2x - 2y + z - 6 = 0$.*

Řešení. Zřejmě je

$$d(A, \alpha) = \frac{|2.3 - 2(-5) + 1 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{11}{3}.$$

□

Příklad. *Je dána rovina* $\alpha: \ x - 2y + 2z + 3 = 0$ *a přímka*

$$\begin{aligned} p: x &= 2 + t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 3 - 2t, \\ z &= -1 - t. \end{aligned}$$

Najděte na p *body mající od* α *vzdálenost* 6*.*

Příklad. *Jsou dány body* $A = [0,0,1]$*,* $B = [1,1,1]$*,* $C = [3,0,2]$*,* $P = [2,3,5]$*. Najděte bod* P' *symetricky sdružený s bodem* P *podle roviny určené body* A, B, C *a vypočítejte obsah trojúhelníka* ABC*.*

Příklad. *Vypočítejte odchylku dvou rovin*

$$\begin{aligned} \alpha &: 2x + 3y + z - 3 = 0, \\ \beta &: 3x + 6y - z - 9 = 0. \end{aligned}$$

Řešení. $u = (2,3,1), v = (3,6,-1)$. Pak

$$\cos\varphi = \frac{|uv|}{|u|.|v|} = \frac{|2.3 + 3.6 + 1.(-1)|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}.\sqrt{3^2+6^2+(-1)^2}} = \frac{23}{\sqrt{14}\sqrt{46}}.$$

Tedy

$$\varphi = \arccos\frac{23}{\sqrt{14}\sqrt{46}}.$$

□

Příklad. *Vypočítejte odchylku roviny a přímky*

$$\alpha: x - y + 2z - 3 = 0$$

a přímky

$$\begin{aligned} p: x &= 1 + t, t \in \mathbb{R}, \\ y &= 4, \\ z &= 3 + 2t. \end{aligned}$$

Řešení. Vezmeme normálový vektor $n = (1,-1,2)$ k rovině α a směrový vektor $u = (1,0,2)$ přímky p. Pak

$$\sin\varphi = \frac{|un|}{|u|.|n|} = \frac{|1 - 0 + 4|}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

Tedy

$$\varphi = \arcsin\frac{5}{\sqrt{30}}.$$

□

Příklad. *Vypočítejte odchylku dvou přímek* $p = \{(1-2t, 3+t, 7-3t); t \in \mathbb{R}\}$ *a* $p = \{(3+2t, 7-3t, 1+5t); t \in \mathbb{R}\}$*.*

Řešení. $u = (-2,1,-3), v = (2,-3,5)$. Pak

$$\cos\varphi = \frac{|uv|}{|u|.|v|} = \frac{|2.(-2) + 1.(-3) + (-3).5|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}.\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}} = \frac{22}{\sqrt{14}\sqrt{38}}.$$

Tedy

$$\varphi = \arccos \frac{22}{\sqrt{14}\sqrt{38}}.$$

$\square$

13. Přednáška

1. Vzorová písemka

1. Dán trojúhelník ABC, kde $A = [2, -4, 9]$, $B = [-1, -4, 5]$, $C = [6, -4, 6]$.
(a) Vypočtěte velikost jeho vnitřních úhlů α (při vrcholu A) a β (při vrcholu B).
(b) Napište rovnici přímky kolmé na rovinu ABC procházející bodem B.
(c) Najděte souřadnice středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Řešení. Připomeňme vzorec pro odchylku vektorů:

$$\cos\varphi = \frac{u.v}{|u|.|v|}.$$

(a) Označme

$$u_1 := B - A = (-3, 0, -4),\ v_1 := C - A = (4, 0, -3),$$
$$u_2 := A - B = (3, 0, 4),\ v_2 := C - B = (7, 0, 1).$$

Pak

$$\cos\alpha = \frac{u_1.v_1}{|u_1|.|v_1|} = \frac{(-3, 0, -4).(4, 0, -3)}{|(-3, 0, -4)|.|(4, 0, -3)|} = \frac{-12 + 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0$$

a tedy $\boxed{\alpha = \pi/2}$. Dále

$$\cos\beta = \frac{u_2.v_2}{|u_2|.|v_2|} = \frac{(3, 0, 4).(7, 0, 1)}{|(3, 0, 4)|.|(7, 0, 1|} = \frac{21 + 4}{5\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a tedy $\boxed{\beta = \pi/4}$.

(b) Označme hledanou přímku p. Vypočítejme vektorový součin $u_1 \times v_1$ a získáme směrový vektor přímky p. Zřejmě je

$$u_1 \times v_1 = (-3, 0, 4) \times (4, 0, -3) = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ \hline 0 \quad 25 \quad 0 \end{array} = (0, 25, 0).$$

Protože se jedná o směrový vektor přímky, lze vzít vektor $(0, 1, 0)$ místo $(0, 25, 0)$. Ze zadání víme, že $B \in p$ a lze tedy okamžitě psát
$\boxed{x = -1;\ y = -4 + t;\ z = 5;\ \ t \in \mathbb{R}.}$

(c) Protože trojúhelník ABC je pravoúhlý ($\alpha = \pi/2$), je střed S kružnice opsané ve středu úsečky BC. Tedy $S = (1/2)(B + C) = (1/2)([-1, -4, 5] + [6, -4, 6])$ a tedy
$\boxed{S = [\frac{5}{2}, -4, \frac{11}{2}]}$.

□

2. Dány vektory $u_1 = (-2, 0, 1)$,$u_2 = (0, 3, 2)$, $u_3 = (1, \lambda, 1)$.
(a) Určete všechna $\lambda \in \mathbb{R}$, pro která jsou dané vektory lineárně závislé.
(b) Pro každou hodnotu λ z (a) najděte nějakou bázi $\mathrm{Lin}[u_1, u_2, u_3]$ ($\mathrm{Lin}[u_1, u_2, u_3]$ znamená lineární obal skupiny vektorů $[u_1, u_2, u_3]$).
(c) Rozhodněte, zda pro $\lambda = 3$ je vektor $v = (2, 3, -3) \in \mathrm{Lin}(u_1, u_2, u_3)$ a pokud ano, vypočtěte koeficienty příslušné lineární kombinace.

Řešení.
(a) Utvořme z vektorů u_1, u_2, u_3 matici a vypočítejme její hodnost v závislosti na λ. Víme, že pokud hodnost je menší než 3, pak jsou dané vektory lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} (2) \quad \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2\lambda & 3 \end{pmatrix} (-\tfrac{2}{3}\lambda) \quad \sim$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 - \frac{4}{3}\lambda \end{pmatrix} (3) \quad \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 - 4\lambda \end{pmatrix}$$

Hodnost matice je tedy menší než 3 pouze pro $\boxed{\lambda = \frac{9}{4}}$.
(b) Z předchozího výpočtu můžeme přečíst pro $\lambda = \frac{9}{4}$ přímo bázi jakožto první dva řádky výsledné matice. Tedy nějaká báze je
$\boxed{(-2, 0, 1), (0, 3, 2)}$.
(c) Napišme pro $\lambda = 3$ soustavu leneární rovnic (vektory píšeme do sloupců) a vyřešme ji.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \text{(vydělíme 3)} \\ (2) \end{array} \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -4 \end{array}\right) (-4) \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right)$$

Z toho vypočteme $z = 8$, $y + 8 = 1 \Rightarrow y = -7$ a $-2x + 8 = 2 \Rightarrow x = 3$. Je tedy $\boxed{3(-2, 0, 1) - 7(0, 3, 2) + 8(1, 3, 1) = (2, 3, -3)}$.

□

3. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x}$.

(a) Vypočtěte $\lim_{x\to 0_+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Napište rovnice všech asymptot grafu funkce f.
(b) Najděte všechny body, ve kterých má f lokální extrém a rozhodněte, zda jde o lokální maximum či minimum.
(c) Najděte všechny intervaly, ve kterých je funkce f ryze konvexní a na kterých je ryze konkávní. Určete všechny inflexní body grafu funkce f.

Řešení. Zřejmě je $D(f) = (0, \infty)$. Spočtěme

$$f'(x) = \Big(\frac{1+\ln(x)}{x}\Big)' = \frac{1-(1+\ln(x))}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x^2},$$
$$f''(x) = -\Big(\frac{\ln(x)}{x^2}\Big)' = -\frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}.$$

(a)

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{1+\ln(x)}{x} = \frac{-\infty}{0_+} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

(b)

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{\ln(x)}{x^2} > 0 \;\Leftrightarrow\; x < 1$$

a proto je f rostoucí v $(0,1)$ a klesající v $(1,\infty)$. V bodě $x = 1$ je tedy lokální maximum.

(c)

$$f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\ln(x)-1}{x^3} > 0 \;\Leftrightarrow\; 2\ln(x) > 1 \;\Leftrightarrow\; x > \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

a proto je f konvexní v $(\sqrt{\mathrm{e}}, \infty)$ a konkávní v $(0, \sqrt{\mathrm{e}})$. V bodě $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ je tedy inflexní bod.

□

4. Do elipsy $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ je vepsán obdélník se stranami rovnoběžnými s osami elipsy.

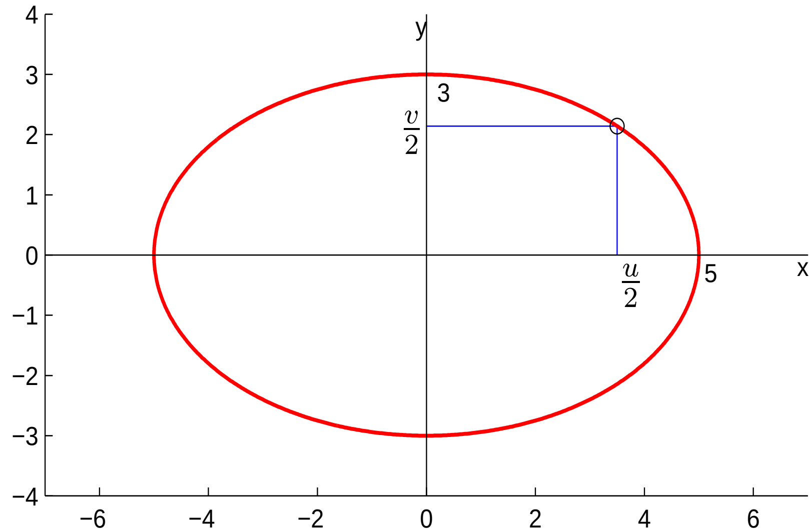
(a) Vyjádřete obsah obdélníku jako funkci délky u jeho strany rovnoběžné s osou x.

(b) Určete délky stran obdélníku, jehož obsah je extrémální.

(c) Rozhodněte a ověřte, zda extrém v (b) je maximum nebo minimum.

Řešení.

(a) Zvolme bod v prvním kvadrantu ležící na dané elipse. Uvažujme i vrcholy elipsy, ačkoliv v těchto bodech obdélník degeneruje na úsečky. Dle zadání (a) je jeho x-ová složka rovna $\frac{u}{2}$, $\frac{u}{2}\in\langle 0,2\rangle$. Označ $\frac{v}{2}$ jeho y-novou složku. Viz obrázek 17. Potom



Obrázek 17

$$\frac{(u/2)^2}{25}+\frac{(v/2)^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{100}+\frac{v^2}{36}=1.$$

Vypočtěme v a dostaneme

$$v=\frac{3}{5}\sqrt{100-u^2},\ u\in\langle 0,10\rangle.$$

Hledaná funkce plošného obsahu je potom uv, tedy

$$\boxed{P(u)=\tfrac{3}{5}u\sqrt{100-u^2},\ u\in\langle 0,10\rangle.}$$

(b) Vypočítejme $P'(u)$ na intervalu $(0,10)$. Zřejmě existuje pro každé $x \in (0,10)$ a platí

$$\begin{aligned} P'(u) &= \left(\frac{3}{5}u\sqrt{100-u^2}\right)' = \frac{3}{5}\left(\sqrt{100-u^2} + u\,\frac{-2u}{2\sqrt{100-u^2}}\right) \\ &= \frac{3}{5}\left(\sqrt{100-u^2} - \frac{u^2}{\sqrt{100-u^2}}\right) = \frac{3}{5}\,\frac{100-2u^2}{\sqrt{100-u^2}}. \end{aligned}$$

Řešme rovnici

$$\frac{3}{5}\,\frac{(100-2u^2)}{\sqrt{100-u^2}} = 0$$

v intervalu $(0,10)$. Snadno vypočteme $u = 5\sqrt{2}$. Podezřelé body, v kterých by mohl být extrém, tedy jsou $0, 5\sqrt{2}, 10$. Snadno vypočteme funkční hodnoty a máme $P(0) = P(10) = 0$, $P(5\sqrt{2}) = 30$. Délky stran, pro něž je obsah extrémální, jsou tedy $\boxed{u_1 = 0, u_2 = 5\sqrt{2}, u_3 = 4}$.

(c) Bylo již zodpovězeno v (b), neboť sled otázek (a), (b), (c) nás k tomu nutí.

□

2. Vzorová písemka

1. Je dána funkce $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

(a) Vypočtěte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Najděte maximální intervaly, ve kterých je funkce rostoucí a ve kterých klesající.

(c) Napište Taylorův polynom třetího stupně funkce f se středem v bodě $c = 0$.

Řešení. (a)

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = (-\infty)^2\mathrm{e}^{-(-\infty)} = \infty\mathrm{e}^{\infty} = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\mathrm{e}^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\mathrm{e}^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

(b)

$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x}.$$

Dále

$$(2x - x^2)\mathrm{e}^{-x} > 0 \;\Leftrightarrow\; 2x - x^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (0,2).$$

Funkce je klesající v intervalech $(-\infty, 0]$ a $[2,\infty)$. Je rostoucí v intervalu $[0,2]$.

(c)

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2-2x)\mathrm{e}^{-x} - (2x-x^2)\mathrm{e}^{-x} = (2-4x+x^2)\mathrm{e}^{-x}, \\ f'''(x) &= (-4+2x)\mathrm{e}^{-x} - (2-4x+x^2)\mathrm{e}^{-x} = (-6+6x-x^2)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0, \\ f''(0) &= 2, \\ f'''(0) &= -6. \end{aligned}$$

Pak Taylorův polynom je
$$\frac{2}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3 = x^2 - x^3.$$
□

2. Je dána křivka $\kappa : x = \sqrt{y^2 + 2y + 3} - 2$ a bod $A = [-2, 2]$.
(a) Vyjádřete vzdálenost body A od obecného bodu $[x, y]$ dané křivky jako funkci d proměnné y.
(b) Určete definiční obor $D(d)$ a vypočtěte derivaci d' funkce d.
(c) najdďete bod na dané křivce κ, jehož vzdálenost od bodu A je minimální. Ověřte, že jde o globální minimum.

Řešení. (a)
$$d(y) = (\sqrt{y^2 + 2y + 3} - 2 - (-2))^2 + (y - 2)^2 = y^2 + 2y + 3 + y^2 - 4y + 4 = 2y^2 - 2y + 7.$$
(b)
$$D(d) : y^2 + 2y + 3 \geq 0 \iff y \in \mathbb{R}.$$
Tedy $D(d) = (-\infty, \infty)$.
$$d'(y) = 4y - 2.$$
(c) $y > \frac{1}{2}$, pak d je rostoucí, jinak je klesající. Tedy má v $y = \frac{1}{2}$ minimum. $A = [\sqrt{21}/2 - 2, 1/2]$.
□

3. Je dána soustava homogenních lineárních rovnic
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ 2x - y + 4z &= 0, \\ x + 7y - 3z &= 0. \end{aligned}$$
(a) Určete dimenzi a najděte nějakou bázi vektorového prostoru V všech řešení dané soustavy.
(b) Pro která reálná λ patří $v = (\lambda, 4, 6)$ do V?
(c) Nechť W je lineární obal skupiny vektorů $u_1 = (-3, 0, 1)$, $u_2 = (-8, -1, 2)$, $u_3 = (5, 2, -2)$. Určete $\dim W$.

Řešení.
□

4. Jsou dány body $A = [1, 3, 2]$, $B = [-3, 1, 4]$, $C = [5, 2, -2]$.
(a) Napište obecnou rovnici roviny ϱ procházející body A, B, C.
(b) Vypočtěte obsah trujúhelníku ABC.
(c) Najděte bod R, který je pravoúhlým průmětem bodu C na přímku AB.

Řešení.
□

14. Přednáška

Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Definice 14.1. *Buď A čtvercová matice komplexních čísel řádu n. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice A, pokud existuje nenulový n-rozměrný komplexní vektor u takový, že*

$$Au = \lambda u. \tag{14.1}$$

Je-li λ vlastní číslo matice A, pak se každý vektor , kteý splňuje (14.1), *nazývá vlastním vektorem.*

Věta 14.2. *Nechť λ je vlastní číslo matice A, pak množina všech vlastních vektorů příslušných k λ tvoří vektorový podprostor v $\mathbb{C}^n$.*

Věta 14.3. *Buď A matice typu 2×2 či 3×3. Nechť $u \neq o$ splňuje* (14.1), *Pak*

$$(A - \lambda E)u = 0, \qquad \textit{tedy} \qquad \det(A - \lambda E) = 0.$$

Příklad. *Buď $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory.*

Řešení. Vezmeme matici

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

Tedy vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$. Spočtěme k nim příslušné vlastní vektory.

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

což dává $u_1 + 2u_2 = 0$. Např. vektor $(2, -1)$ je tedy vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 1$.

$$\lambda_1 = 4: \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

což dává $u_1 - u_2 = 0$. Např. vektor $(1, 1)$ je tedy vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 4$.

□

Velmi krátká informace o numerických metodách

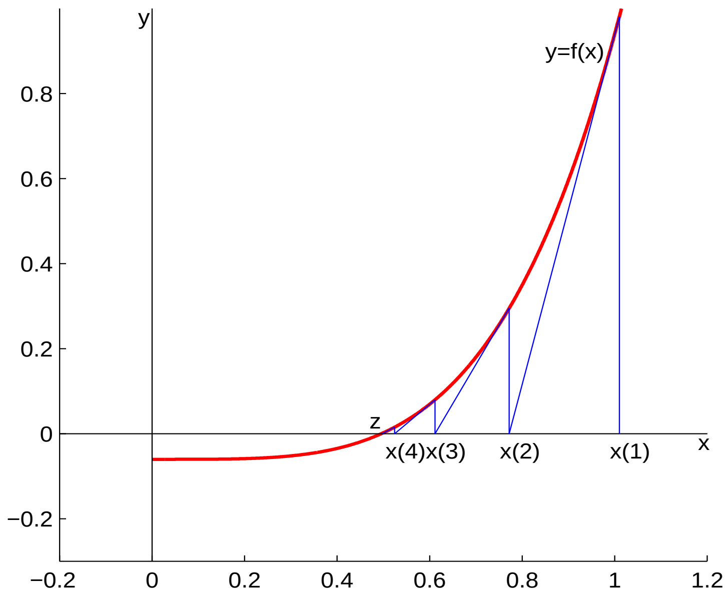
Zde je dán jen krátký popis některých numerických metod a je zcela vynechána velmi důležitá otázka rychlosti konvergence těchto metod.

Metoda 1 (Newtonova)**.** *Dána rovnice $f(x) = 0$. Vol x_0 libovolně a uvažuj iterační proces*

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Tento proces se nazývá Newtonovou iterační metodou.

Posloupnost x_i (psána jako $x(i)$) je znázorněna na obrázku 18. Vidíme geometricky, jak posloupnost $x(i)$ konverguje k z, což je řešení rovnice $f(x) = 0$.



OBRÁZEK 18

Věta 14.4. *Nechť funkce f i f' jsou spojité na uzavřeném intervalu $[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$ a f má spojitou a kladnou druhou derivaci na intervalu (a,b). Pak Newtonova iterační metoda s $x_0 = b$ konverguje k řešení rovnice $f(x) = 0$.*

Příklad. *Řešme rovnici $x^2 = 3$. Na intervalu $[0,3]$ jsou splněny předpoklady předchozí věty. Udělejme posloupnost*

$$x_0 = 3,\ x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}.$$

Spčtěme prvních několik hodnot.

$$\begin{aligned} x_0 &= 3 \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1.75 \\ x_3 &= 1.73214 \\ x_4 &= 1.73205 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Čili $\sqrt{3} \doteq 1.73205$.

Metoda 2 (Jacobiho). *Dána soustava lineárních rovnic v maticovém tvaru $Ax = b$. Napišme $A = D + L + U$, kde D je diagonální matice, L je dolní trojúhelníková a U je horní trojúhelníková* *matice. Soustavu přepíšeme ve tvaru*

$$x = D^{-1}(U + L)x + D^{-1}b.$$

Udělejme posloupnost vektorů

$$x_0 = \textit{libovolný},\ x_{n+1} = D^{-1}(U + L)x_n + D^{-1}b.$$

Pokud tato posloupnost konvergujre k vektoru x, pak $x = D^{-1}(U + L)x + D^{-1}b$ a x je řešením $Ax = b$.

Příklad. *Dána soustava* $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$. *Dostaneme iterační rovnice*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{-y_n + 6}{4}, \\ y_{n+1} &= \frac{2x_n + 8}{5}. \end{aligned}$$

Pro počáteční hodnoty $(0, 0)$ máme

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= (0, 0) \\ (x_1, y_1) &= (\frac{3}{2}, \frac{8}{5}) \\ (x_2, y_2) &= (\frac{11}{10}, \frac{11}{5}) \\ (x_3, y_3) &= (\frac{19}{20}, \frac{51}{25}) \\ (x_4, y_4) &= (\frac{99}{100}, \frac{99}{50}) \end{aligned}$$

Vidíme, že $(x_n, y_n) \to (1, 2)$.

Metoda 3 (Gauss-Seidlova)**.** *Dána soustava lineárních rovnic v maticovém tvaru $Ax = b$. V Jakobiho iteraci se využijí už známé hodnoty.*

Příklad. *Dána soustava* $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$. *Dostaneme iterační rovnice*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{-y_n + 6}{4}, \\ y_{n+1} &= \frac{2x_{n+1} + 8}{5}. \end{aligned}$$

Pro počáteční hodnoty $(0, 0)$ máme

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= (0, 0) \\ (x_1, y_1) &= (\frac{3}{2}, \frac{11}{5}) \\ (x_2, y_2) &= (\frac{19}{20}, \frac{99}{50}) \end{aligned}$$

Vidíme, že $(x_n, y_n) \to (1, 2)$ podstatně rychleji.