1. CVIČENÍ

ALEŠ NEKVINDA

Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

$$
\begin{array}{ll}
y'' + 3y' + 2y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x} \\
y'' - 3y' + 2y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{x} + c_2 \mathrm{e}^{2x} \\
y'' + 6y' + 5y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{-5x} \\
y'' - 8y' + 6y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{(4+\sqrt{10})x} + c_2 \mathrm{e}^{(4-\sqrt{10})x} \\
y'' - 4y' + 2y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{(2+\sqrt{3})x} + c_2 \mathrm{e}^{(2-\sqrt{3})x} \\
y'' - y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{x} \\
y'' - 4y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{2x} \\
y'' - 3y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{3}x} + c_2 \mathrm{e}^{\sqrt{3}x} \\
y'' - 2y' = 0, & y = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-2x} \\
y'' - 3y' = 0, & y = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-2x} \\
y'' + 2y' + y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 x \mathrm{e}^{-x} \\
y'' - 4y' + 4y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 x \mathrm{e}^{2x} \\
y'' + 6y' + 9y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{-3x} + c_2 x \mathrm{e}^{-3x} \\
y'' + 2y' + 2y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{-x} \cos x + c_2 \mathrm{e}^{-x} \sin x \\
y'' - 2y' + 2y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{x} \cos x + c_2 \mathrm{e}^{x} \sin x \\
y'' - 6y' + 10y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{3x} \cos x + c_2 \mathrm{e}^{3x} \sin x \\
y'' + 6y' + 13y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{-3x} \cos 2x + c_2 \mathrm{e}^{-3x} \sin 2x \\
y'' + 6y' + 15y = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{-3x} \cos \sqrt{6}x + c_2 \mathrm{e}^{-3x} \sin \sqrt{6}x \\
y'' + 9y = 0, & y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x \\
y'' + 2y = 0, & y = c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x \\
y'' = 0, & y = c_1 + c_2 x \\
y''' - 2y'' - 5y' + 6 = 0, & y = c_1 \mathrm{e}^{x} + c_2 \mathrm{e}^{-2x} + c_3 \mathrm{e}^{3x}
\end{array}
$$

Redukce řádu

Ze skript Matematika 3, Doc. RNDr. Ondřej Zindulka, CSc.

Dána rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Někdo nám prozradí jedno řešení $y_1(x)$. Pak se druhé řešení $y_2(x)$ najde následujícím postupem:

$$u(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$$
$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{u(x)}{y_1^2(x)}dx.$$

<u>Eulerova rovnice</u>

$x^2y'' + 4xy' - 10y = 0$	$y = c_1x^2 + c_2x^{-5}$
$x^2y'' - 8xy' - 10y = 0,\ y_1(x) = x^{-1}$	$y_2(x) = \dfrac{x^{10}}{11}.$

<u>Počáteční úloha</u>

$y'' + 3y' + 2y = 0,$	$y(0) = 5, y'(0) = -8,$	$y = 2\mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-2x}$
$y'' - y = 0,$	$y(0) = -2, y'(0) = -8,$	$y = 3\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{x}$
$y'' + 2y' + y = 0,$	$y(0) = -3, y'(0) = 8,$	$y = -3\mathrm{e}^{-x} + 5x\mathrm{e}^{-x}$
$y'' + 2y' + 2y = 0,$	$y(0) = 3, y'(0) = 10,$	$y = 3\mathrm{e}^{-x}\cos x + 7\mathrm{e}^{-x}\sin x$
$y'' + 9y = 0,$	$y(\pi/2) = -5, y'(\pi/2) = -15,$	$y = 5\sin 3x$
$y'' = 0,$	$y(1) = 3, y'(1) = 6,$	$y = -3 + 6x$

<u>Domácí cvičení</u>

(1)	$y'' + y' - 12y = 0,$	$y = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2\mathrm{e}^{-4x}$
(2)	$y'' - 10y' + 25y = 0,$	$y = c_1\mathrm{e}^{5x} + c_2x\mathrm{e}^{5x}$
(3)	$y'' + 3y' = 0,$	$y = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-3x}$
(4)	$y'' - 16y = 0,$	$y = c_1\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{-4x}$
(5)	$y'' - 10y' + 74y = 0,$	$y = c_1\mathrm{e}^{5x}\cos 7x + c_2\mathrm{e}^{5x}\sin 7x$
(6)	$y'' + 2y' + 5y = 0,$	$y = c_1\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + c_2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x$
(7)	$x^2y'' - xy' - 8y = 0,$	$y = c_1x^{-2} + c_2x^4$
(8)	$x^2y'' - 9xy' + 21y = 0, y_1 = x^3,$	$y_2 = \dfrac{x^7}{4}.$

<u>Řešení domácího cvičení</u>

(1) $y'' + y' - 12y = 0.$
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0,$$
$$\lambda_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Tedy

$$y = y = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2\mathrm{e}^{-4x}.$$

(2) $y'' - 10y' + 25y = 0.$
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0,$$
$$\lambda_{12} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 10048}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5$$

Tedy

$$y = c_1\mathrm{e}^{5x} + c_2x\mathrm{e}^{5x}.$$

(3) $y'' + 3y' = 0.$
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0,$$
$$\lambda_{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 0}}{2} = \frac{-3 \pm 3}{2} = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$$

Tedy

$$y = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-3x}.$$

(4) $y'' - 16y = 0.$
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 16 = 0,$$
$$\lambda_{12} = \frac{0 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{\pm 8}{2} = \begin{cases} 4 \\ -4 \end{cases}$$

Tedy

$$y = c_1\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{-4x}.$$

(5) $y'' - 10y' + 74y = 0.$
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$
$$\lambda_{12} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 296}}{2} = \frac{10 \pm 14i}{2} = \begin{cases} 5 + 7i \\ 5 - 7i \end{cases}$$

Tedy

$$y = c_1\mathrm{e}^{5x}\cos 7x + c_2\mathrm{e}^{5x}\sin 5x.$$

(6) $y'' + 2y' + 5y = 0.$
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$
$$\lambda_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} -1 + 2i \\ -1 - 2i \end{cases}$$

Tedy

$$y = c_1\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + c_2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x.$$

(7) $x^2y'' - xy' - 8y = 0$.
Řešení hledáme ve tvatru $y = x^\alpha$. Pak

$$\alpha(\alpha-1) - \alpha - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0,$$
$$\alpha_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

Tedy

$$y = c_1x^{-2} + c_2x^4.$$

(8) $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0, y_1 = x^3$.
Je-li dána rovnice $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ a známe jedno řešení y_1, pak najdeme druhou funkci do fundamentálního systému y_2 pomocí vzorečků

$$u(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx},$$
$$y_2 = y_1 \int \frac{u}{y_1^2}.$$

Viz skripta O. Zindulka, Matematika 3.
Rovnici upravíme na tvar

$$y'' - \frac{9}{x}y' + \frac{21}{x^2}y = 0.$$

Pak

$$u(x) = \mathrm{e}^{-\int -\frac{9}{x}dx} = \mathrm{e}^{9\int\frac{dx}{x}} = \mathrm{e}^{9\ln x} = x^9,$$
$$y_2 = x^3 \int \frac{x^9}{x^6}dx = x^3 \int x^3dx = x^3\frac{x^4}{4} = \frac{x^7}{4}.$$