2. CVIČENÍ

ALEŠ NEKVINDA

Variace konstant

$$y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$y = \frac{1}{2}(x - \ln(e^x + 1))e^x - \frac{1}{2}(e^x - \ln(e^x + 1))e^{-x} + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$$

$$y = \frac{1}{4}\cos 2x \ln \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$y'' + 2y' + y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$$

$$y = \frac{1}{x} + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

Speciální pravá strana

$$y'' - 4y' + 3y = 3x^2 - 8x$$
$$y = x^2 - \frac{3}{2} + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{3x}$$
$$y'' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^{2x}$$
$$y = -2\mathrm{e}^{2x} - \frac{3}{2} + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{3x}$$
$$y'' - 4y' + 3y = 6\mathrm{e}^{x}$$
$$y = -3x\mathrm{e}^{x} - \frac{3}{2} + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{3x}$$
$$y'' - 4y' + 4y = 4x + 2\mathrm{e}^{x}$$
$$y = x + 1 + 2\mathrm{e}^x + c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 x\mathrm{e}^{2x}$$
$$y'' - 4y' + 4y = 2\mathrm{e}^{2x}$$
$$y = x^2\mathrm{e}^{2x} + c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 x\mathrm{e}^{2x}$$
$$y'' - 4y' + 4y = \sin x$$
$$y = \frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x + c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 x\mathrm{e}^{2x}$$
$$y'' + 9y = 3x^2 + 6$$
$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{16}{27} + c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$
$$y'' + 9y = 4(x+1)\sin x$$
$$y = \frac{1}{2}(x+1)\sin x - \frac{1}{8}\cos x + c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$
$$y'' + 9y = 6\sin 3x + 3\cos 3x$$
$$y = \frac{1}{2}x\sin 3x - x\cos 3x + c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

Počáteční úloha

$$y'' - y = 2x,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 2$$
$$y = 4\mathrm{e}^{x-1} - 2x$$
$$y'' + 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{-2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$
$$y = \frac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}$$

Domácí cvičení

(1) $$y'' + y = \frac{6+x^2}{x^4}$$
$$y = \frac{1}{x^2} + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

(2) $$y'' - 7y' + 6y = \sin x$$
$$y = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{6x}$$

(3) $$y'' - 7y' + 6y = \mathrm{e}^x$$
$$y = -\frac{1}{5} x\mathrm{e}^x + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{6x}$$

(4) $$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$$
$$y = \mathrm{e}^{2x} + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x$$

(5) $$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x$$
$$y = \frac{1}{2} x^2\mathrm{e}^x + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x$$

(6) $$y'' + 4y = x + \sin 2x$$
$$y = \frac{1}{2} x \sin^2 x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

(7) $$y'' - y = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x},\ y(0) = \frac{1}{16},\ y'(0) = \frac{13}{16}$$
$$y = \frac{1}{48}\mathrm{e}^{-x}(3\mathrm{e}^{2x}(1-2x)^2 + 16\mathrm{e}^{3x} - 16)$$

Řešení domácího cvičení

(1) $y'' + y = \frac{6+x^2}{x^4}$.
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$
$$\lambda_{12} = \frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{2} = \frac{-2i}{2} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$$

Tedy

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Variace konstant:

$$y_p = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x.$$

Pak známým způsobem (viz přednáška) najdeme

$$c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0,$$
$$-c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = \frac{6+x^2}{x^4}.$$

Tedy

$$c_1'(x) = -\frac{6+x^2}{x^4}\sin x,$$
$$c_2'(x) = \frac{6+x^2}{x^4}\cos x.$$

Dále per partes máme (je to trikové)

$$\begin{aligned}
c_1(x) &= -\int \frac{6+x^2}{x^4}\sin x dx = -\int \frac{6}{x^4}\sin x dx - \int \frac{1}{x^2}\sin x dx,\\
&= -6\int x^{-4}\sin x dx - \int x^{-2}\sin x dx\\
&= -6\Big\{\frac{x^{-3}}{-3}\sin x - \int \frac{x^{-3}}{-3}\cos x dx\Big\} - \int x^{-2}\sin x dx\\
&= 2x^{-3}\sin x - 2\int x^{-3}\cos x dx - \int x^{-2}\sin x dx\\
&= 2x^{-3}\sin x - 2\Big\{\frac{x^{-2}}{-2}\cos x - \int \frac{x^{-2}}{-2}(-\sin x)dx\Big\} - \int x^{-2}\sin x dx\\
&= 2x^{-3}\sin x + x^{-2}\cos x + \int x^{-2}\sin x dx - \int x^{-2}\sin x dx\\
&= 2x^{-3}\sin x + x^{-2}\cos x.
\end{aligned}$$

Analogicky

$$\begin{aligned}
c_2(x) &= \int \frac{6+x^2}{x^4}\cos x dx = \int \frac{6}{x^4}\cos x dx + \int \frac{1}{x^2}\cos x dx\\
&= 6\int x^{-4}\cos x dx + \int x^{-2}\cos x dx\\
&= 6\Big\{\frac{x^{-3}}{-3}\cos x - \int \frac{x^{-3}}{-3}(-\sin x)dx\Big\} - \int x^{-2}\cos x dx\\
&= -2x^{-3}\cos x - 2\int x^{-3}\sin x dx - \int x^{-2}\cos x dx\\
&= -2x^{-3}\cos x - 2\Big\{\frac{x^{-2}}{-2}\sin x - \int \frac{x^{-2}}{-2}\cos x dx\Big\} - \int x^{-2}\cos x dx\\
&= -2x^{-3}\cos x + x^{-2}\sin x + \int x^{-2}\cos x dx - \int x^{-2}\cos x dx\\
&- 2x^{-3}\cos x + x^{-2}\sin x.
\end{aligned}$$

Partikulární řešení je pak

$$\begin{aligned}
y_p &= (2x^{-3}\sin x + x^{-2}\cos x)\cos x + (-2x^{-3}\cos x + x^{-2}\sin x)\sin x\\
&= 2x^{-3}\sin x\cos x + x^{-2}\cos^2 x - 2x^{-3}\cos x\sin x + x^{-2}\sin^2 x\\
&x^{-2}(\cos^2 x + \sin^2 x) = x^{-2}.
\end{aligned}$$

Obecné řešení je potom

$$y = \frac{1}{x^2} + c_1\cos x + c_2\sin x.$$

(2) $y'' - 7y' + 6y = \sin x.$
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$
$$\lambda_{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$$

Tedy

$$y_h = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{6x}.$$

Odhadem pomocí pravé strany máme

$$\begin{aligned} y_p &= a\cos x + b\sin x, \\ y_p' &= -a\sin x + b\cos x, \\ y_p'' &= -a\cos x - b\sin x. \end{aligned}$$

Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} &-a\cos x - b\sin x - 7(-a\sin x + b\cos x) + 6(a\cos x + b\sin x) = \sin x \\ &(5a - 7b)\cos x + (7a + 5b)\sin x = \sin x. \end{aligned}$$

Máme soustavu

$$\begin{aligned} 5a - 7b &= 0, \\ 7a + 5b &= 1. \end{aligned}$$

Pak

$$a = \frac{7}{74},\ b = \frac{5}{74}.$$

Tedy

$$y_p = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x$$

a obecné řešení je

$$y = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x + c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{6x}.$$

(3) $y'' - 7y' + 6y = \mathrm{e}^x.$
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$
$$\lambda_{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$$

Tedy

$$y_h = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{6x}.$$

Odhadem pomocí pravé strany máme (uvědomme si, že $k = 1$)

$$\begin{aligned} y_p &= ax\mathrm{e}^x, \\ y_p' &= -a\sin x + b\cos x, \\ y_p'' &= -a\cos x - b\sin x. \end{aligned}$$

Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned}&-a\cos x - b\sin x - 7(-a\sin x + b\cos x) + 6(a\cos x + b\sin x) = \sin x\\&(5a-7b)\cos x + (7a+5b)\sin x = \sin x.\end{aligned}$$

Máme soustavu

$$\begin{aligned}5a - 7b &= 0,\\7a + 5b &= 1.\end{aligned}$$

Pak

$$a = \frac{7}{74},\ b = \frac{5}{74}.$$

Tedy

$$y_p = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x$$

a obecn'e řešení je

$$y = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x + c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{6x}.$$

(4) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{2x}$.
Charakteristická rovnice je

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0,\\\lambda_{12} &= \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1\end{aligned}$$

Tedy

$$y_h = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x.$$

Odhadem pomocí pravé strany máme

$$\begin{aligned}y_p &= a\mathrm{e}^{2x},\\y_p' &= 2a\mathrm{e}^{2x},\\y_p'' &= 4a\mathrm{e}^{2x}.\end{aligned}$$

Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned}&4a\mathrm{e}^{2x} - 4a\mathrm{e}^{2x} + a\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}\\&a = 1.\end{aligned}$$

Pak

$$y_p = \mathrm{e}^{2x}$$

a obecn'e řešení je

$$y = \mathrm{e}^{2x} + c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x.$$

(5) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$.
Charakteristická rovnice je

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0,\\\lambda_{12} &= \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1\end{aligned}$$

Tedy
$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$
Odhadem pomocí pravé strany máme ($k = 2$)
$$\begin{aligned} y_p &= ax^2 e^x, \\ y_p' &= a(2x + x^2)e^x, \\ y_p'' &= a(2 + 4x + x^2)e^x. \end{aligned}$$
Dosazením dostaneme
$$a(2 + 4x + x^2)e^x - 2a(2x + x^2)e^x + ax^2 e^x = e^x.$$
Pak
$$\begin{aligned} &2a + 4ax + ax^2 - 4ax - 2ax^2 + ax^2 = 1, \\ &2a = 1, \\ &a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
a obecné řešení je
$$y = \frac{1}{2}x^2 e^x + c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

(6) $y'' + 4y = x + \sin 2x$.
Charakteristická rovnice je
$$\begin{aligned} &\lambda^2 + 4 = 0, \\ &\lambda_{12} = \frac{0 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 = \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases} \end{aligned}$$
Tedy
$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$
Pravá strana je součtem dvou funkcí. Odhadem pomocí pravé strany x máme
$$\begin{aligned} y_p &= ax + b, \\ y_p' &= a, \\ y_p'' &= 0. \end{aligned}$$
Dosazením dostaneme
$$4(ax + b) = x.$$
Pak
$$a = \frac{1}{4},\ b = 0$$
a
$$y_{1p} = \frac{1}{4}x.$$

Odhadem pomocí pravé strany $\sin 2x$ máme $(k = 1)$

$$\begin{aligned}
y_p &= x(a\cos 2x + b\sin 2x),\\
y_p' &= a\cos 2x + b\sin 2x + 2x(-a\sin 2x + b\cos 2x),\\
y_p'' &= -2a\sin 2x + 2b\cos 2x + 2(-a\sin 2x + b\cos 2x) + 4x(-a\cos 2x - b\sin 2x).
\end{aligned}$$

Dosazením dostaneme

$$\begin{aligned}
&-2a\sin 2x + 2b\cos 2x + 2(-a\sin 2x + b\cos 2x) + 4x(-a\cos 2x - b\sin 2x)\\
&\qquad + 4x(a\cos 2x + b\sin 2x) = \sin 2x.
\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}
&(2b + 2b - 4ax + 4ax)\cos 2x + (-2a - 2a - 4bx + 4bx)\sin 2x = \sin 2x,\\
&4b\cos 2x - 4a\sin 2x = \sin 2x.
\end{aligned}$$

Tedy

$$a = -\frac{1}{4},\ b = 0$$

a

$$y_{2p} = -\frac{1}{4}\cos 2x.$$

Partikulární řešení je

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cos 2x = \frac{1}{4}x(1 - \cos 2x) = \frac{1}{4}x(1 - (\cos^2 x - \sin^2 x))\\
&= \frac{1}{4}x(1 - \cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{4}x(\sin^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2}x\sin^2 x.
\end{aligned}$$

Obecné řešení je

$$y = \frac{1}{2}x\sin^2 x + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x.$$

(7) $y'' - y = xe^x + e^{2x},\ y(0) = \frac{1}{16},\ y'(0) = \frac{13}{16}$.
Charakteristická rovnice je

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 - 1 = 0,\\
&\lambda_{12} = \frac{0 \pm \sqrt{4}}{2} = 1 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Tedy

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Pravá strana je součtem dvou funkcí. Odhadem pomocí pravé strany xe^x máme $(k = 1)$

$$\begin{aligned}
y_p &= x(ax + b)e^x = (ax^2 + bx)e^x,\\
y_p' &= (2a + b + ax^2 + bx)e^x,\\
y_p'' &= (2ax + 2a + b + ax^2 + (2a + b)x + b)e^x.
\end{aligned}$$

Dosazením dostaneme

$$
\begin{aligned}
&(2ax+2a+b+ax^2+(2a+b)x+b)\mathrm{e}^x-(ax^2+bx)\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x,\\
&2ax+2a+b+ax^2+2ax+bx+b-ax^2-bx=x,\\
&2ax+2a+b+2ax+b=x,\\
&4ax+2(a+b)=x.
\end{aligned}
$$

Pak

$$a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{4}$$

a

$$y_{1p}=\frac{1}{4}x(x-1)\mathrm{e}^x.$$

Odhadem pomocí pravé strany e^{2x} máme

$$
\begin{aligned}
y_p&=a\mathrm{e}^{2x},\\
y_p'&=2a\mathrm{e}^{2x},\\
y_p''&=4a\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}
$$

Dosazením dostaneme

$$
\begin{aligned}
&4a\mathrm{e}^{2x}-a\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x},\\
&3a\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}.
\end{aligned}
$$

Pak

$$a=\frac{1}{3}.$$

Tedy

$$y_{2p}=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}.$$

Obecné řešení je

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{4}x(x-1)\mathrm{e}^x+c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x},\\
y'&=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{4}(2x-1)\mathrm{e}^x+\frac{1}{4}(x^2-x)\mathrm{e}^x+c_1\mathrm{e}^x-c_2\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}
$$

Dosadíme počáteční podmínky a máme

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{16}&=\frac{1}{3}+c_1+c_2,\\
\frac{13}{16}&=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+c_1-c_2.
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\begin{aligned}
c_1+c_2&=-\frac{13}{48},\\
c_1-c_2&=\frac{19}{48}
\end{aligned}
$$

a

$$c_1 = \frac{1}{16},$$
$$c_2 = -\frac{1}{3}.$$

Z toho máme

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}x(x-1)\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{16}\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{1}{48}\mathrm{e}^{-x}(16\mathrm{e}^{3x} + 12(x^2-x)\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{2x} - 16) \\ &= \frac{1}{48}\mathrm{e}^{-x}(16\mathrm{e}^{3x} + 3(4x^2-4x+1)\mathrm{e}^{2x} - 16) \\ &= \frac{1}{48}\mathrm{e}^{-x}(3(2x-1)^2\mathrm{e}^{2x} + 16\mathrm{e}^{3x} - 16). \end{aligned}$$