3. CVIČENÍ

ALEŠ NEKVINDA

Okrajové problémy - najděte počet řešení

$$u'' + 2u = \sin x,\ u(0) = u(2\pi) = 0$$

$$u'' + u = \sin x,\ u(0) = u(\pi) = 0$$

$$u'' + 4u = x^2, u(0) = u(\pi) = 0$$

$$u'' - 9u = 0, u(0) = u(\pi) = 0$$

$$u'' + u = \cos x, u(0) = u(\pi) = 0$$

$$u'' + 9\pi^2 u = \sin 5\pi x, u(0) = u(2) = 0$$

$$u'' + 9\pi^2 u = x^2, u(-1) = u(1) = 0$$

$$u'' + 9\pi^2 u = \sin \frac{3}{2}\pi x, u(0) = u(2) = 0$$

Domácí cvičení

Najděte všechna řešení.

(1) $u'' + 2u = 2x, \ u(0) = u(\pi) = 0$

$$u = x - \frac{\pi}{\sin\sqrt{2}\pi}\sin\sqrt{2}x$$

(2) $u'' + 4u = 4x, \ u(0) = u(\pi) = 0$

nemá řešení

(3) $u'' + 4u = x(x-\pi), \ u(0) = u(\pi) = 0$

$$u = x^2 - \pi x - 2 + c\sin 2x, c \in \mathbb{R}$$

Najděte počet řešení - nehledejte je.

(4) $u'' + 8u = x^2 - 6x + 1, \ u(0) = u(\pi) = 0$

jedno řešení

(5) $u'' + 9u = 9x, \ u(0) = u(\pi) = 0$

nemá řešení

(6) $u'' + 9u = 9(x - \pi/2), \ u(0) = u(\pi) = 0$

má nekonečně mnoho řešení

Najděte všechna řešení v závislosti na parametru λ.

(7) $u'' + \lambda u = x - \pi/2, \ u(0) = u(\pi) = 0$

$\lambda \notin \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ pak existuje jediné řešení

$\lambda = k^2$ kde k je liché, pak existuje nekonečně mnoho řešení

$\lambda = k^2$ kde k je sudé, pak neexistuje žádné řešení

Řešení domácího cvičení

(1) $u'' + 2u = 2x, \ u(0) = u(\pi) = 0.$
Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2 = 0,$$

$$\lambda_{12} = \frac{0 \pm \sqrt{0-8}}{2} = \frac{-\sqrt{8}i}{2} = \begin{cases} \sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i \end{cases}$$

Tedy

$$y_h = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x.$$

Odhad pomocí speciální pravé strany:

$$y_p = ax + b,$$
$$y' = a,$$
$$y'' = 0.$$

Dosazením je

$$2(ax + b) = 2x$$

tedy

$$a = 1,\ \ b = 0.$$

Pak

$$y = x + c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x.$$

Dosadíme okrajové podmínky a máme

$$\begin{aligned} 0 &= c_1, \\ 0 &= \pi + c_1 \cos \sqrt{2}\pi + c_2 \sin \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 \sin \sqrt{2}\pi &= -\pi \end{aligned}$$

a protože $\sin \sqrt{2}\pi \doteq 0,077465 \cdots \neq 0$, je

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 &= -\frac{\pi}{\sin \sqrt{2}\pi} \end{aligned}$$

a

$$y = x - \frac{\pi}{\sin \sqrt{2}\pi} \sin \sqrt{2}x.$$

(2) $u'' + 4u = 4x,\ u(0) = u(\pi) = 0$. Charakteristická rovnice je

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + 4 = 0, \\ &\lambda_{12} = \frac{0 \pm \sqrt{0-16}}{2} = \frac{-\sqrt{16}i}{2} = \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases} \end{aligned}$$

Tedy

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Odhad pomocí speciální pravé strany:

$$\begin{aligned} y_p &= ax + b, \\ y' &= a, \\ y'' &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením je

$$4(ax + b) = 4x$$

tedy

$$a = 1,\ \ b = 0.$$

Pak

$$y = x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Dosadíme okrajové podmínky a máme

$$\begin{aligned} 0 &= c_1, \\ 0 &= \pi + c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} &c_1 = 0, \\ &c_2 \sin 2\pi = -\pi \end{aligned}$$

a protože $\sin 2\pi = 0$, je

$$\begin{aligned} &c_1 = 0, \\ &0.c_2 = -\pi \end{aligned}$$

a tato soustava evidentně nemá řešení. Čili ani daný okrajový problém nemá řešení.

(3) $u'' + 4u = x(x-\pi),\ u(0) = u(\pi) = 0$. Charakteristická rovnice je

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + 4 = 0, \\ &\lambda_{12} = \frac{0 \pm \sqrt{0-16}}{2} = \frac{-\sqrt{16}i}{2} = \begin{cases} 2i \\ -2i \end{cases} \end{aligned}$$

Tedy

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Odhad pomocí speciální pravé strany:

$$\begin{aligned} &y_p = ax^2 + bx + c, \\ &y' = 2ax + b, \\ &y'' = 2a. \end{aligned}$$

Dosazením je

$$2a + ax^2 + bx + c = x^2 - \pi x$$

tedy

$$a = 1,\ b = -\pi,\ c = -2.$$

Pak

$$y = x^2 - \pi x - 2 + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Dosadíme okrajové podmínky a máme

$$\begin{aligned} &0 = -2 + c_1, \\ &0 = -2 + c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} &0 = -2 + c_1, \\ &0 = -2 + c_1 + 0.c_2. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} &c_1 = 2, \\ &c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Existuje tedy nekonečně mnoho řešení

$$y = x^2 - \pi x - 2 + c_2 \sin 2x,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

(4) $u'' + 8u = x^2 - 6x + 1,\ u(0) = u(\pi) = 0$. Vlastní čísla problému jsou $\lambda = 1, 4, 9, 16, \dots$, tedy $\lambda_k = k^2$, a

$$8 \notin \{1, 4, 9, 16, \dots\},$$

má daný okrajový problém jediné řešení.

(5) $u'' + 9u = 9x,\ u(0) = u(\pi) = 0$. Vlastní čísla problému jsou $\lambda = 1, 4, 9, 16, \dots$, tedy $\lambda_k = k^2$, a

$$9 \in \{1, 4, 9, 16, \dots\},$$

daný okrajový problém má buď nekonečně či žádné řešení. Zřejmě je $9 = \lambda_3$ a příslušná vlastní funkce je $u_3 = \sin 3x$. Spočítejme integrál

$$\int_0^\pi 9x\ u_3(x)dx = \int_0^\pi 9x \sin 3x dx = [-9x \cos 3x/3]_0^\pi + \int_0^\pi 9/3 \cos 3x dx$$
$$= -3\pi + [\sin 3x]_0^\pi = 3\pi \neq 0$$

a daný okrajový problém nemá řešení.

(6) $u'' + 9u = 9(x - \pi/2),\ u(0) = u(\pi) = 0$. Vlastní čísla problému jsou $\lambda = 1, 4, 9, 16, \dots$, tedy $\lambda_k = k^2$, a

$$9 \in \{1, 4, 9, 16, \dots\},$$

Zřejmě je $9 = \lambda_3$ a daný okrajový problém má buď nekonečně či žádné řešení. Příslušná vlastní funkce je $u_3 = \sin 3x$. Spočítejme integrál

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi 9(x - \pi/2)\ u_3(x)dx &= \int_0^\pi 9(x - \pi/2) \sin 3x dx \\
&= [-9(x - \pi/2) \cos 3x/3]_0^\pi + \int_0^\pi 9/3 \cos 3x dx \\
&= -3\pi/2(-1) - (-3(-\pi/2)) + [\sin 3x]_0^\pi = 0
\end{aligned}$$

a daný okrajový problém nemá žádné řešení.

(7) $u'' + \lambda u = x - \pi/2,\ u(0) = u(\pi) = 0$. Vlastní čísla problému jsou $\lambda = 1, 4, 9, 16, \dots$, tedy $\lambda_k = k^2$, a pro

$$\lambda \notin \{1, 4, 9, 16, \dots\},$$

má daný okrajový problém jediné řešení.

Nechť $\lambda = \lambda_k = k^2,\ k = 1, 2, 3, \dots$. To znamená, že λ_k je vlastní číslo. Příslušná vlastní funkce je $u_k = \sin kx$. Spočítejme integrál

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (x - \pi/2)\ u_k(x)dx &= \int_0^\pi (x - \pi/2) \sin kx dx \\
&= \Big[-(x - \pi/2) \frac{\cos kx}{k} \Big]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos kx}{k} dx \\
&= -(\pi - \pi/2) \frac{\cos k\pi}{k} - \Big(-(0 - \pi/2) \frac{\cos 0}{k} \Big) - \Big[\frac{\sin kx}{k^2} \Big]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2k} (-\cos k\pi - 1)
\end{aligned}$$

Nyní, je-li k sudé, je $\cos k\pi = 1$,

$$\int_0^\pi (x - \pi/2)\ u_k(x)dx = -\frac{\pi}{k} \neq 0$$

a daný okrajový problém nemá řešení.

Je-li k liché, je $\cos k\pi = -1$,

$$\int_0^\pi (x - \pi/2)\ u_k(x) dx = 0$$

a daný okrajový problém má nekonečně mnoho řešení.

Celkově dostaneme odpověď

$\lambda \notin \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ pak existuje jediné řešení,

$\lambda = k^2$ kde k je liché, pak existuje nekonečně mnoho řešení,

$\lambda = k^2$ kde k je sudé, pak neexistuje žádné řešení.