8. CVIČENÍ

ALEŠ NEKVINDA

Křivkový integrál 1. druhu

D'ana křivka $k : (x(t), y(t))$, resp. $k : (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$. Pak

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt, \text{ resp. } ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Nechť je dána funkce dvou, resp. tří proměnných

$$f(x, y), \text{ resp. } f(x, y, z).$$

Potom křivkový integrál 1. druhu je definován

$$\int_k f(x, y)ds := \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt, \text{ resp.}$$
$$\int_k f(x, y, z)ds := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Příklady

$$\int_k \frac{ds}{x - y}, \text{ } k \text{ je úsečka spojující body } [0, -2], [4, 0]$$
$$\int_k \frac{x^2}{y}\, ds, \text{ } k = \{[x, y]; y \in [\sqrt{2}, 2], \text{ } y^2 = 2x\}$$
$$\int_k \sqrt{x^2 + y^2}\, ds, \text{ } k = \{[x, y]; x^2 + y^2 = 2x\}$$
$$\int_k \sqrt{2y}\, ds, \text{ } k = \{[x, y]; x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]\}$$
$$\int_k \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}\, ds, \text{ } k = \{[x, y]; x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in [0, 2\pi]\}$$

Vypočítejte obsah válcové plochy $\kappa = \{[x, y, z]; y = \frac{3}{8}x^2, 0 \le z \le x, y \le 6\}$

Vypočítejte hmotnost křivky $k = \left\{[x, y]; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \ge 0, y \ge 0\right\}$

je-li hustota $\varrho(x, y) = xy$.

Najděte souřadnice homogenní křivky

$$k = \{[x, y, z]; [x, y]; x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, \pi]\}.$$

Domácí cvičení

(1)

$$\int_k \frac{x+2y+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds,\ \ k \text{ je úsečka spojující body } [1,-1],[4,0]$$

$$\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)$$

(2)

$$\int_k x^2\ ds, \quad k=\{[x,y]; x\in[1,2], y=\ln x\}$$

$$\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})$$

(3)

$$\int_k x\sqrt{x^2-y^2}\ ds, \quad k=\{[x,y]; (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), x\ge 0\}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$$

(4)

$$\int_k \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds, \quad k=\{[x,y]; x^2+y^2=a^2, 0\le y\le x\}$$

$$\frac{1}{4}\pi a\mathrm{e}^a$$

(5)

$$\int_k (2\sqrt{x^2+y^2}-z)\ ds, \quad k=\{[x,y,z]; x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, t\in[0,2\pi]\}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\left((1+2\pi^2)^{3/2}-1\right)$$

(6)

$$\int_k \sqrt{2y^2+z^2}\ ds, \quad k=\{[x,y,z]; x^2+y^2+z^2=a^2, x=y\}$$

$$2\pi a^2$$

(7)

Vypočítejte obsah válcové plochy $\kappa=\{[x,y,z]; x^2+y^2=a^2, 0\le z\le\sqrt{a^2-x^2}\}$

$$4a^2$$

(8)

Vypočítejte hmotnost křivky $k=\left\{[x,y]; x=t, y=\dfrac{t^2}{2}, z=\dfrac{t^3}{3}, t\in[0,1]\right\}$ je-li hustota $\varrho(x,y,z)=\sqrt{2y}$.

$$\frac{1}{8}(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{16}\ln\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

(9)

Najděte souřadnice homogenní křivky

$$k=\{[x,y,z]; [x,y]; x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t), t\in[0,\pi]\}$$

$$T=\left[\frac{2(\pi^2-6)}{\pi^2}\ a, \frac{6}{\pi}\ a\right]$$

Řešení domácího cvičení

(1) $\int_k \frac{x+2y+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, ds$, k je úsečka spojující body $[1,-1],[4,0]$.
Parametrizace úsečky je

$$x = 1+3t,\ \ t \in [0,1]$$
$$y = -1+t.$$

Dále

$$x' = 3,$$
$$y' = 1$$

a

$$\int_k \frac{x+2y+2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, ds = \int_0^1 \frac{1+3t+2(-1+t)+2}{\sqrt{(1+3t)^2+(-1+t)^2}}\sqrt{3^2+1}\, dt$$
$$= \int_0^1 \frac{(1+5t)\sqrt{10}}{\sqrt{2+4t+10t^2}}\, dt = \left| \begin{array}{l} s = 2+4t+10t^2 \\ ds = (20t+4)dt = 4(5t+1)dt \end{array} \right|$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{4}\int_2^{16} \frac{ds}{\sqrt{s}}\, ds = \frac{\sqrt{10}}{4}\Big[2\sqrt{s}\Big]_2^{16} = \frac{\sqrt{10}}{4}(8-2\sqrt{2}) = \sqrt{5}(2\sqrt{2}-1).$$

(2) $\int_k x^2\, ds$, $k = \{[x,y]; x \in [1,2], y = \ln x\}$.
Parametrizace křivky je

$$x = t,\ \ t \in [1,2]$$
$$y = \ln t.$$

Dále

$$x' = 1,$$
$$y' = \frac{1}{t}$$

a

$$\int_k x^2\, ds = \int_1^2 t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\, dt = \int_1^2 t^2\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}\, d = \int_1^2 t\sqrt{1+t^2}\, dt$$
$$= \left| \begin{array}{l} s = 1+t^2 \\ ds = 2t\ dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{s}\, ds = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\Big[s^{3/2}\Big]_2^5 = \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-2\sqrt{2}).$$

(3) $\int_k x\sqrt{x^2-y^2}\, ds$, $k = \{[x,y]; (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), x \geq 0\}$.
Pro parametrizaci křivky zkusme použít polární souřadnice. Hledejme funkci $r(\varphi)$ tak, aby vztahy

$$x = r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y = r(\varphi)\sin\varphi$$

splňovaly rovnici $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$. To znamená

$$r^4(\varphi) = a^2r^2(\varphi)(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = a^2r^2(\varphi)\cos 2\varphi.$$

Tedy

$$r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

a

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi$$
$$y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi.$$

Protože $x \geq 0$, je $\cos\varphi \geq 0$ a tedy $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Dále musí být $\cos 2\varphi \geq 0$, to znamená, že $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$. Parametrizace křivky je tedy

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi, \ \ \varphi \in [-\pi/4, \pi/4],$$
$$y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi.$$

Potom

$$\begin{aligned} x' &= a\Big(\frac{-2\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\cos\varphi - \sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\Big) \\ &= -\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi) \\ y' &= a\Big(\frac{-2\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin\varphi + \sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\Big) \\ &= -\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(\sin 2\varphi\sin\varphi - \cos 2\varphi\cos\varphi) \end{aligned}$$

.

Spočtěme ještě

$$\begin{aligned} &x'^2 + y'^2 \\ &= \frac{a^2}{\cos 2\varphi}\big((\sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi)^2 + (\sin 2\varphi\sin\varphi - \cos 2\varphi\cos\varphi)^2\big) \\ &= \frac{a^2}{\cos 2\varphi}(\sin^2 2\varphi\cos^2\varphi + \cos^2 2\varphi\sin^2\varphi + \sin^2 2\varphi\sin^2\varphi + \cos^2 2\varphi\cos^2\varphi) \\ &= \frac{a^2}{\cos 2\varphi}(\sin^2 2\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2 2\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)) \\ &= \frac{a^2}{\cos 2\varphi}(\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi) = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}. \end{aligned}$$

Tedy

$$ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\ d\varphi.$$

Daný integrál je pak

$$\int_k x\sqrt{x^2-y^2}\ ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\ \sqrt{a^2(\cos 2\varphi\cos^2\varphi - \cos 2\varphi \sin^2\varphi)}$$
$$\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\ d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\ \sqrt{a^2\cos 2\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\ d\varphi$$
$$= a^3\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\varphi\ \cos 2\varphi\ d\varphi = 2a^3\int_0^{\pi/4}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\cos\varphi\ d\varphi$$
$$= 2a^3\int_0^{\pi/4}(1-2\sin^2\varphi)\cos\varphi\ d\varphi = \left|\begin{array}{l} z=\sin\varphi \\ dz=\cos\varphi\ d\varphi\end{array}\right|$$
$$= 2a^3\int_0^{1/\sqrt{2}}(1-2z^2)\ dz = 2a^3\Big[z-\frac{2}{3}z^3\Big]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^3.$$

(4) $\int_k \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds,\ k=\{[x,y]; x^2+y^2=a^2, 0\le y\le x\}$.
Parametrizace křivky je

$$x = a\cos t,\ \ t\in[0,\pi/4]$$
$$y = a\sin t.$$

Dále

$$x' = -\sin t,$$
$$y' = \cos t$$

a

$$\int_k \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\ ds = \int_0^{\pi/4}\mathrm{e}^a\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}\ dt = \int_0^{\pi/4} a\mathrm{e}^a\ dt = \frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a.$$

(5) $\int_k(2\sqrt{x^2+y^2}-z)\ ds,\quad k=\{[x,y,z]; x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, t\in[0,2\pi\}$.
Zřejmě

$$ds = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\ dt = \sqrt{2+t^2}\ dt.$$

Tedy

$$\int_k(2\sqrt{x^2+y^2}-z)\ ds = \int_0^{2\pi}(2\sqrt{t^2}-t)\ \sqrt{2+t^2}\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t\ \sqrt{2+t^2}\ dt$$
$$= \left|\begin{array}{l} s=2+t^2 \\ ds = 2t\ dt\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_2^{2+4\pi^2}\sqrt{s}\ ds = \Big[\frac{1}{3}s^{3/2}\Big]_2^{2+4\pi^2} = \frac{1}{3}((2+4\pi^2)^{3/2}-2^{3/2})$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\big((1+2\pi^2)^{3/2}-1\big).$$

(6) $\int_k\sqrt{2y^2+z^2}\ ds,\ \ k=\{[x,y,z]; x^2+y^2+z^2=a^2, x=y\}$. Sféru $x^2+y^2+z^2=a^2$ můžeme parametrizovat pomocí sférických souřednic, poloměr je pochopitelně konstantní a. Tedy

$$x = a\cos\varphi\sin\nu$$
$$y = a\sin\varphi\sin\nu$$
$$z = a\qquad\quad \cos\nu.$$

Podmínka na křivku je $a\cos\varphi\sin\nu = a\sin\varphi\sin\nu$, tedy $\cos\varphi = \sin\varphi$. To dává $\varphi = \pi/4$. Parametrizace křivky je

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\nu \\ y &= \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\nu, \qquad \nu \in [0, 2\pi] \\ z &= a\ \cos\nu. \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{\frac{a^2}{2}\sin^2\nu + \frac{a^2}{2}\sin^2\nu + a^2\cos^2\nu}\ d\nu = a\ d\nu.$$

Ještě si uvědomíme $\sqrt{2y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a$ díky podmínce $x = y$ a pišme

$$\int_k \sqrt{2y^2+z^2}\ ds = \int_0^{2\pi} a\ a\ d\nu = 2\pi a^2.$$