9. CVIČENÍ

ALEŠ NEKVINDA

Křivkový integrál 2. druhu

D'ana orientovaná křivka $(k) : (x(t), y(t))$, resp. $k : (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, počáteční bod je $A = [(x(a), y(a), z(a))]$, koncový bod je $B = [(x(b), y(b), z(b))]$, $A \neq B$. Pak

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \text{ resp. } \ ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Nechť je dáno dvou(resp. tří)rozměrné pole

$$f(x, y), g(x, y), \text{ resp. } f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z).$$

Potom křivkový integrál 2. druhu (práce pole podél křivky (k)) je definován

$$\int_{(k)} f(x, y)dx + g(x, y)dy := \int_a^b \big(f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t) \big) \, dt,$$

resp.

$$\int_{(k)} f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz$$

$$:= \int_a^b \big(f(x(t), y(t), z(t))x'(t) + g(x(t), y(t), z(t))y'(t) + h(x(t), y(t), z(t))z'(t) \big) \, dt.$$

Příklady

$$\int_{(k)} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy, \ k = \{[x, y]; x \in [-1, 1], y = x^2\},$$

kde poč. bod je $[-1, 1]$ a konc. bod $[1, 1]$

$$\int_{(k)} (x^2 - y^2)dx, \ k = \{[x, y]; x \in [0, 2], y = x^2\},$$

kde poč. bod je $[2, 4]$ a konc. bod $[0, 0]$

$$\int_{(k)} (2a - y)dx + xdy, \ k = \{[x, y]; x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]\},$$

kde poč. bod je $[0, 0]$ a konc. bod $[2\pi, 0]$

$$\int_{(k)} yzdx + z\sqrt{a^2 - x^2}dy + xydz, \ k = \{[x, y]; x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in [0, 2\pi]\},$$

kde poč. bod je $[a, 0, 0]$ a konc. bod $[a, 0, 2\pi b]$

Domácí cvičení

(1)
$$\int_{(k)} \frac{y}{x}dx + xdy,\ \ k = \{[x,y]; x \in [1/2,3], xy = 1\}$$
kde poč. bod je $[3,1/3]$ a konc. bod $[1/2,2]$
$$\ln 6 - \frac{5}{3}$$

(2)
$$\int_{(k)} xydy,\ \ k = \{[x,y]; x \in [0,\pi], y = \sin x\}$$
kde poč. bod je $[0,0]$ a konc. bod $[\pi,0]$
$$-\frac{1}{4}\pi$$

(3)
$$\int_{(k)} \frac{x+y}{x^2+y^2}dx - \frac{x-y}{x^2+y^2}dy,\ \ k = \{[x,y]; x = a\cos t, y = a\sin t, \in [0,2\pi]\}$$
$$-2\pi$$

(4)
$$\int_{(k)} (z^2-y^2)dx + (x^2-z^2)dy + (y^2-x^2)dz,$$
$$k = \{[x,y,z]; x^2+y^2+z^2 = a^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, xyz = 0\}$$
kde oreintace je dána pořadím $[a,0,0], [0,a,0], [0,0,a]$
$$4a^3$$

(5)
$$\int_{(k)} y^2dx + z^2dy + x^2dz,\ \ k = \{[x,y,z]; x^2+y^2+z^2 = a^2, x^2+y^2 = ax, z \ge 0\}$$
kde oreintace je dána tečným vektorem $(0,-1,0)$ v bodě $[0,0,a]$
$$-\frac{1}{4}\pi a^3$$

Řešení domácího cvičení

(1) Vypočítejte $\int_{(k)} \frac{y}{x}dx + xdy,\ \ k = \{[x,y]; x \in [1/2,3], xy = 1\}$, kde poč. bod je $[3,1/3]$ a konc. bod $[1/2,2]$.
Parametrizace křivky je
$$x = 3-t,\ \ t \in [0,5/2]$$
$$y = 1/(3-t).$$
Dále
$$x' = -1,$$
$$y' = 1/(3-t)^2$$

a

$$\int_{(k)} \frac{y}{x}dx + xdy = \int_0^{\frac{5}{2}} \Big(-\frac{1}{(3-t)^2} + \frac{1}{3-t}\Big)dt =$$
$$= \Big[-\frac{1}{3-t} - \ln(3-t)\Big]_0^{\frac{5}{2}} = \Big(-2 - \ln\frac{1}{2}\Big) - \Big(-\frac{1}{3} - \ln 3\Big)$$
$$= \frac{1}{3} + \ln 3 - 2 - \ln\frac{1}{2} = -\frac{5}{3} - \ln 3 + \ln 2 = \ln 6 - \frac{5}{3}.$$

(2) Vypočítejte $\int_{(k)} xydy$, $\quad k = \{[x,y]; x \in [0,\pi], y = \sin x\}$, kde poč. bod je $[0,0]$ a konc. bod $[\pi, 0]$.

Parametrizace křivky je

$$x = t,\ t \in [0,\pi]$$
$$y = \sin t.$$

Dále

$$x' = 1,$$
$$y' = \cos t.$$

a

$$\int_{(k)} xydy = \int_0^\pi t\sin t\cos t\ dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi t\sin 2t\ dt = \begin{vmatrix} u = t & v' = \sin 2t \\ u' + 1 & v = -\frac{1}{2}\cos 2t \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\Big[-\frac{1}{2}t\cos 2t\Big]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{2}\cos 2t\ dt\Big) = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\pi + \Big[\frac{1}{2}\sin 2t\Big]_0^\pi\Big) = -\frac{1}{4}\pi.$$

(3) Vypočítejte $\int_{(k)} \frac{x+y}{x^2+y^2}dx - \frac{x-y}{x^2+y^2}dy$, $\ k = \{[x,y]; x = a\cos t, y = a\sin t, \in [0,2\pi]\}$.
Pro parametrizaci křivky zkusme použít polární souřadnice. Hledejme funkci $r(\varphi)$ tak, aby vztahy Parametrizace křivky je

$$x = a\cos t,\ t \in [0,2\pi]$$
$$y = a\sin t.$$

Dále

$$x' = -a\sin t,$$
$$y' = a\cos t.$$

Potom

$$\int_{(k)} \frac{x+y}{x^2+y^2}dx - \frac{x-y}{x^2+y^2}dy$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{a(\cos t + \sin t)}{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}(-a\sin t) - \frac{a(\cos t - \sin t)}{a^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}a\cos t\Big)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} ((\cos t + \sin t)(-\sin t) - (\cos t - \sin t)\cos t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t\sin t - \sin^2 t - \cos^2 t + \sin t\cos t)dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

(4) $\int_{(k)} (z^2-y^2)dx+(x^2-z^2)dy+(y^2-x^2)dz,\ k=\{[x,y,z]; x^2+y^2+z^2=a^2, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, xyz=0\}$, kde oreintace je dána pořadím $[a,0,0], [0,a,0], [0,0,a]$.

Daná křivka lež na povrchu koule se tředem $[0,0,0]$ a poloměrem a. Z podmínek $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ jde o první oktant. Navíc z podmínky $xyz=0$ se daná křivka rozpadne na tři křivky k_1,k_2,k_3 ležící postopně v rovině $z=0$, pak v rovině $x=0$ a v rovině $y=0$. Parametrické rovnice jsou

$$\begin{aligned} k_1 : x &= a\cos t,\ \ t\in[0,2\pi] & x' &= -a\sin t\\ y &= a\sin t & y' &= a\cos t\\ z &= 0 & z' &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 : x &= 0,\ \ t\in[0,2\pi] & x' &= 0\\ y &= a\cos t & y' &= -a\sin t\\ z &= a\sin t & z' &= a\cos t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 : x &= a\sin t,\ \ t\in[0,2\pi] & x' &= -a\cos t\\ y &= 0 & y' &= 0\\ z &= a\cos t & z' &= a\sin t. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} &\int_{(k)} (z^2-y^2)dx+(x^2-z^2)dy+(y^2-x^2)dz\\ &= \int_0^{\pi/2} (-a^2\sin^2 t(-a\sin t)+a^2\cos^2 t\ a\cos t)dt\\ &\quad+\int_0^{\pi/2} (-a^2\sin^2 t(-a\sin t)+a^2\cos^2 t\ a\cos t)dt\\ &\quad+\int_0^{\pi/2} (a^2\cos^2 t\ a\cos t)+(-a^2\sin^2 t)(-a\sin t))dt\\ &= 3a^3\int_0^{\pi/2} (\cos^3 t+\sin^3 t)dt\\ &= 3a^3\int_0^{\pi/2} ((1-\sin^2 t)\cos t+(1-\cos^2 t)\sin t)dt\\ &= 3a^3\Big[\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t-\Big(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\Big)\Big]_0^{\pi/2}\\ &= 3a^3\Big(1-\frac{1}{3}-0-\Big(0-\Big(1-\frac{1}{3}\Big)\Big)\Big)=4a^3. \end{aligned}$$

(5) $\int_{(k)} y^2dx+z^2dy+x^2dz,\ k=\{[x,y,z]; x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2=ax, z\geq 0\}$, kde oreintace je dána tečným vektorem $(0,-1,0)$ v bodě $[0,0,a]$.

Nejprve zparametrizujme kružnici $x^2+y^2=ax$, vzhledem k tečnému vektoru ji probíháme v kladném směru (tj. proti pohybu hodinových ručiček). Volme střed v bodě $[a,0]$ a pišme

$$\begin{aligned} x &= a+r(t)\cos t\\ y &= r(t)\sin t. \end{aligned}$$

Z podmínky $x^2 + y^2 = ax$ máme $a^2 + 2ar(t)\cos t + r^2(t) = a(a + r(t)\cos t)$ a tedy $r(t) = -a\cos t$. Pak

$$\begin{aligned} x &= a - a\cos^2 t = a\sin^2 t, \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ y &= -a\cos t \sin t. \end{aligned}$$

Z podmínek $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax, z \geq 0$ a $x^2 + y^2 = ax$ plyne

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - ax} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a|\cos t| = a\cos t.$$

Parametrizace křivky je tedy

$$\begin{aligned} x &= a\sin^2 t, \qquad t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ y &= -a\cos t \sin t \\ z &= a\cos t. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} x' &= 2a\cos t \sin t, \\ y' &= a(-\cos^2 t + \sin^2 t), \\ z' &= -a\sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{(k)} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (a^2 \sin^2 t \cos^2 t . 2a \sin t \cos t \\ &\quad + a^2 \cos^2 t . a(\sin^2 t - \cos^2 t) + a^2 \sin^4 t(-a\sin t))dt \\ &= a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\sin^3 t \cos^3 t + \cos^2 t(\sin^2 t - \cos^2 t) - \sin^5 t)dt := I. \end{aligned}$$

Protože $\sin^3 t \cos^3 t$ a $\sin^5 t$ jsou liché funkce, je

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 t \cos^3 t \; dt = 0 \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^5 t \; dt = 0. \end{aligned}$$

Pak

$$
\begin{aligned}
I &= a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t(\sin^2 t - \cos^2 t)\ dt = a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t(1 - 2\cos^2 t)\ dt \\
&= a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^2 t - 2\cos^4 t)\ dt = 2a^3 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - 2\cos^4 t)\ dt \\
&= 2a^3 \int_0^{\pi/2} \Big(\frac{1+\cos 2t}{2} - \frac{(1+\cos 2t)^2}{2} \Big)\ dt \\
&= a^3 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t - (1+\cos 2t)^2)\ dt \\
&= a^3 \int_0^{\pi/2} (\cos 2t - 2\cos 2t - \cos^2 2t)\ dt \\
&= a^3 \int_0^{\pi/2} \Big(-\cos 2t - \frac{1+\cos 4t}{2} \Big)\ dt = a^3 \Big[-\frac{\sin 2t}{2} - \frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} \Big]_0^{\pi/2} \\
&= -\frac{1}{4}\pi a^3.
\end{aligned}
$$