11. CVIČENÍ

ALEŠ NEKVINDA

Příklad zkouškové písemky

1. Řešte okrajovou úlohu
$$u'' + 9u = 7\cos 4x + 7\sin 4x,$$
$$u(0) = 1,\ u(3\pi/2) = -3.$$
2. Vypočítejte
$$\iint_M \sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$
přes množinu
$$M = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2y\}.$$
3. Vypočítejte
$$\iiint_M z\ dxdydz$$
přes množinu
$$M = \{(x, y, z) : 2 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$
4. Vypočítejte hmotnost křivky $C : \psi(t) = (t\cos t, t\sin t, t),\ \ t \in \langle 0, \sqrt{2}\rangle$, jejíž hustota v každém bodě je z.

Řešení:

1. Řešte okrajovou úlohu
$$u'' + 9u = 7\cos 4x + 7\sin 4x,$$
$$u(0) = 1,\ u(3\pi/2) = -3.$$

Řešení:
$$u'' + 9u = 0.$$
Pak
$$\lambda^2 + 9 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \pm i.$$
Tedy
$$u_h = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$
Zřejmě je
$$7\cos 4x + 7\sin 4x = \mathrm{e}^{0.x}(7.\cos 4x + 7.\sin 4x).$$

Pak $\alpha + i\beta = 4$, to není kořen charakteristické rovnice, tady $k = 0$. Hledejme tedy partikulární řešení ve tvaru

$$u_p = x^0 \mathrm{e}^{0.x}(a.\cos 4x + b.\sin 4x) = a\cos 4x + b\sin 4x.$$

Pak

$$\begin{aligned} u_p &= a\cos 4x + b\sin 4x, \\ u_p' &= -4a\sin 4x + 4b\cos 4x, \\ u_p'' &= -16a\cos 4x - 16b\sin 4x. \end{aligned}$$

Dosazením máme

$$-16a\cos 4x - 16b\sin 4x + 9a\cos 4x + 9b\sin 4x = 7\cos 4x + 7\sin 4x.$$

Tedy

$$-7a\cos 4x - 7b\sin 4x = 7\cos 4x + 7\sin 4x$$

a

$$a = -1,\ b = -1.$$

Obecné řešení je

$$u = -\cos 4x - \sin 4x + c_1\cos 3x + c_2\sin 3x.$$

Dosadíme okrajové podmínky a dostaneme

$$\begin{aligned} &u(0) = 1 = -\cos 0 - \sin 0 + c_1\cos 0 + c_2\sin 0 = -1 + c_1, \\ &u(3\pi/2) = -3 = -\cos 6\pi - \sin 6\pi + c_1\cos 9\pi/2 + c_2\sin 9\pi/2 = -1 + c_2. \end{aligned}$$

Tedy

$$c_1 = 2,\ c_2 = -2$$

a konečně

$$u = -\cos 4x - \sin 4x + 2\cos 3x - 2\sin 3x.$$

2. Vypočítejte

$$\iint_M \sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}}\, dxdy.$$

přes množinu

$$M = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2y\}.$$

Řešení:
Převedeme integrál do polárních souřadnic. Zřejmě $\varphi \in [0, \pi]$ a $r^2 \le 2r\sin\varphi$, tedy $r \in [0, 2\sin\varphi]$. Tedy

$$\begin{aligned} &\iint_M \sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\varphi} \frac{2r}{\sqrt{4 - r^2}} dr d\varphi \\ &= \int_0^\pi \Big[-\sqrt{4 - r^2} \Big]_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \int_0^\pi \Big(2 - \sqrt{4 - 4\sin^2\varphi} \Big) d\varphi \\ &= \int_0^\pi \Big(2 - 2\sqrt{\cos^2\varphi} \Big) d\varphi = \int_0^\pi (2 - 2|\cos\varphi|) d\varphi \\ &= 2\int_0^{\pi/2} (2 - 2\cos\varphi) d\varphi = 4\Big[\varphi - \sin\varphi\Big]_0^{\pi/2} = 4(\pi/2 - 1) = 2\pi - 4. \end{aligned}$$

3. Vypočítejte

$$\iiint_M z\ dxdydz$$

přes množinu

$$M = \{(x, y, z) : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Řešení:
Označme

$$P = \{(x, y) : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Zřejmě je (v podstatě jde o převod do cylindrických souřadnic)

$$\iiint_M z\ dxdydz = \iint_P \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z\ dz\ dxdy$$

$$= \iint_P \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \frac{1}{2} \iint_P (x^2 + y^2)\ dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{2} r^3\ drd\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{\sqrt{2}}^{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3\ d\varphi = 3\pi.$$

4. Vypočítejte hmotnost křivky $C : \psi(t) = (t\cos t, t \sin t, t),\ t \in \langle 0, \sqrt{2}\rangle$, jejíž hustota v každém bodě je z.
Řešení:
Máme

$$ds = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\ dt = \sqrt{t^2 + 2}\ dt.$$

Potom hmotnost

$$m = \int_0^{\sqrt{2}} t\sqrt{t^2 + 2}\ dt = \frac{1}{2} \int_2^4 \sqrt{s}\ ds = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}}\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) = \frac{8 - 2\sqrt{2}}{3}.$$