

Matematika 3

Přednášející – Aleš Někveda

Obsah

Přednáška 1. Diferenciální rovnice - počáteční úlohy	7
1. Diferenciální rovnice druhého řádu.	7
2. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu.	7
3. Homogenní lineární rovnice druhého řádu.	7
4. Redukce řádu rovnice, pokud známe jedno řešení.	8
5. Homogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty - úvod.	11
6. Homogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty - Dva různé reálné kořeny.	12
7. Homogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty - Dva různé komplexní kořeny.	13
8. Homogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty - Dvojnásobný reálný kořen.	14
Přednáška 2. Rovnice druhého řádu - pokračování	17
1. Eulerova lineární rovnice druhého řádu.	17
2. Eulerova lineární rovnice - První metoda.	17
3. Eulerova lineární rovnice - Druhá metoda.	17
4. Zkrácený návod na řešení rovnice $x^2y'' + pxy' + q = 0$.	19
5. Lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a s pravou stranou.	20
6. Variace konstant.	20
7. Obecný postup při variaci konstant.	22
8. Odhad partikulárního řešení pomocí speciální pravé strany.	26
9. Rovnice typu $F(y, y', y'') = 0$.	34
Přednáška 3. Okrajové úlohy	41
1. Prostory $C(a, b)$, $C^2(a, b)$ a skalární součin	41
2. Příklad $\lambda < 0$	41
3. Příklad $\lambda = 0$	43
4. Příklad $\lambda > 0$	44
Přednáška 4. Okrajové problémy s jinými okrajovými podmínkami	51
1. Příklad $\lambda < 0$	51
2. Příklad $\lambda = 0$	52
3. Příklad $\lambda > 0$	53
4. Úvod do operátorů.	58
Přednáška 5. Dvojný integrál.	59
1. Definice Riemannova integrálu	59

2. Fubiniova věta	62
3. Dva důležité speciální typy oblastí	64
4. Příklady	66
Přednáška 6. Věta o substituci	71
1. Příklad	74
2. Polární souřadnice	75
3. Posunuté polární souřadnice	76
4. Zobecněné polární souřadnice	79
Přednáška 7. Aplikace dvojného integrálu.	85
1. Obsah rovinného obrazce	85
2. Objem tělesa pod grafem funkce	86
3. Hmotnost tenké desky	87
4. Těžiště tenké desky	89
5. Momenty setrvačnosti tenké desky	93
Přednáška 8. Trojný integrál.	95
1. Definice Riemannova trojného integrálu	95
2. Fubiniova věta	97
3. Rafinovaný příklad pro zvědavce	101
Přednáška 9. Věta o substituci	103
1. Cylindrické souřadnice	105
2. Sférické souřadnice	110
3. Zobecněné sférické souřadnice	117
Přednáška 10. Aplikace trojného integrálu.	121
1. Hmotnost tělesa	121
2. Objem tělesa	122
3. Těžiště tělesa	124
4. Momenty setrvačnosti tělesa	130
Přednáška 11. Křivkový integrál prvního druhu a jeho aplikace.	133
1. Motivace a definice	133
2. Příklady	138
3. Hmotnost jednorozměrného drátu	140
4. Délka jednorozměrného drátu	142
5. Statické momenty a těžiště jednorozměrného drátu	144
6. Momenty setrvačnosti jednorozměrného drátu	145
Přednáška 12. Křivkový integrál druhého druhu	147
1. Práce konstantního pole podél orientované úsečky	147
2. Pojem vektorového pole	148
3. Orientovaná křivka	149
4. Práce pole podél prosté orientované křivky	152
5. Příklady	156
Přednáška 13. Křivkový integrál druhého druhu přes uzavřenou orientovanou křivku	161
1. Práce pole podél uzavřené orientované křivky	161

2. Greenova věta	163
3. Fyzika a Greenova věta	173
4. Nezávislost integrálu na cestě, potenciál	176
Přednáška 14. Plošné integrály 1. druhu - bonus pro zvědavce	185
1. Plošný integrál 1. druhu	185
Přednáška 15. Aplikace plošného integrálu 1. druhu	187
1. Hmotnost plochy	187
2. Velikost plochy	188
3. Těžiště plochy	189
4. Momenty setrvačnosti plochy	190

Diferenciální rovnice - počáteční úlohy

1. Diferenciální rovnice druhého řádu.

Mnoho matematických, fyzikálních, chemických, biologických, ekonomických a dalších jevů je popsáno řečí diferenciálních rovnic. My se budeme věnovat diferenciálním rovnicím druhého řádu, ačkoliv je potřeba (např. v teorii pružnosti) něco vědět i rovnicích vyššího řádu. Obecný tvar diferenciální rovnice druhého řádu je

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

My se budeme zabývat jen některými speciálními případy.

2. Lineární diferenciální rovnice druhého řádu.

Obecný tvar lineární diferenciální rovnice druhého řádu je

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

kde $p, q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce definované v nějakém intervalu I . My se naučíme řešit především speciální případ, když jsou funkce p, q konstantní. Říkáme jí potom lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Má tedy tvar

$$(2.1) \quad y'' + py' + qy = f(x),$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$ a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná v nějakém intervalu I .

Vzpomeneme-li si na postup řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, nepřekvapí nás, že postup rozdělíme do dvou kroků.

1) Vyřešíme homogenní rovnici, tj s nulovou pravou stranou,

$$y'' + py' + qy = 0.$$

2) Najdeme nějaké konkrétní, tzv. partikulární, řešení rovnice (2.1) a sečteme ho s řešením 1).

3. Homogenní lineární rovnice druhého řádu.

Obecný tvar lineární diferenciální rovnice druhého řádu je

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

kde $p, q, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité funkce definované v nějakém intervalu I .

VĚTA 1.1. *Nechť $p(x), q(x)$ jsou spojité v I a nechť je dána rovnice*

$$(3.1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Označme V množinu jejich řešení. Pak V je vektorový prostor.

Důkaz. Stačí dokázat implikaci

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \wedge y_1, y_2 \in V \Rightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in V.$$

Vynechme v celém důkazu argument x . Nechť tedy $y_1, y_2 \in V$, tj.

$$(3.2) \quad y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \quad \text{a} \quad y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0.$$

Počítejme

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'' + p(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)' + q(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= \alpha_1 y_1'' + \alpha_2 y_2'' + p\alpha_1 y_1' + p\alpha_2 y_2' + q\alpha_1 y_1 + q\alpha_2 y_2 = \\ & \alpha_1 \underbrace{(y_1'' + p y_1' + q y_1)}_{=0 \text{ díky (3.2)}} + \alpha_2 \underbrace{(y_2'' + p y_2' + q y_2)}_{=0 \text{ díky (3.2)}} = 0 \end{aligned}$$

a platí tedy

$$(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'' + p(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)' + q(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = 0,$$

což znamená $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in V$ a implikace je dokázána. $\square$

Další věta říká, že $\dim V = 2$, což souvisí s tím, že rovnice (5.1) je druhého řádu. Její důkaz vynecháme.

VĚTA 1.2. *Nechť $p(x), q(x)$ jsou spojité v I a nechť je dána rovnice (5.1). Označme V množinu jejích řešení. Pak $\dim V = 2$.*

Předchozí dvě věty nám dávají návod, jak rovnici (5.1) řešit. Stačí najít dvě lineárně nezávislé funkce y_1, y_2 , které řeší (5.1). Tím najdeme bázi V . Potom tedy prostor V je dán jako libovolná lineární kombinace $c_1 y_1 + c_2 y_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Naším úkolem je tedy nalézt nějakou bázi V .

DEFINICE 1.3. *Nechť $p(x), q(x)$ jsou spojité v I a nechť je dána rovnice (5.1). Pak každou bázi prostoru V nazýváme fundamentálním systémem rovnice (5.1).*

Fundamentální systém umíme najít obecně pouze pro rovnice s konstantními koeficienty, viz níže. Někdy ho lze explicitně najít i v případě nekonstantních koeficientů, ale to jde pouze pro $p(x), q(x)$, které jsou k sobě v nějakém speciálním vztahu nebo nějak uhodneme aspoň jedno řešení.

4. Redukce řádu rovnice, pokud známe jedno řešení.

Představme si, že řešíme rovnici $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ a že funkce $\varphi_1(x)$ je nenulové řešení. Funkce $\varphi_1(x)$ tedy patří do fundamentálního systému. Hledejme druhou funkci z fundamentálního systému ve tvaru $\varphi_2(x) := y(x) = \varphi_1(x)z(x)$, kde funkce $z(x)$ je neznámá a dosadíme do dané rovnice. Potom postupně dostáváme (píšme už bez argumentu x)

$$y = \varphi_1 z, \quad y' = \varphi_1' z + \varphi_1 z', \quad y'' = \varphi_1'' z + 2\varphi_1' z' + \varphi_1 z''$$

a dále

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_1'' z + 2\varphi_1' z' + \varphi_1 z'' + p(x)(\varphi_1' z + \varphi_1 z') + q(x)\varphi_1 z \\ &= \varphi_1'' z + p(x)\varphi_1' z + q(x)\varphi_1 z + 2\varphi_1' z' + \varphi_1 z'' + p(x)\varphi_1 z' \\ &= z \underbrace{(\varphi_1'' + p(x)\varphi_1' + q(x)\varphi_1)}_{=0 \text{ protože } \varphi_1 \text{ je řešení}} + \varphi_1 z'' + (2\varphi_1' + p(x)\varphi_1) z'. \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy rovnici

$$\varphi_1 z'' + (2\varphi_1' + p(x)\varphi_1) z' = 0$$

která po substituci $u = z'$ přejde na rovnici prvního řádu a tu lze řešit separací. Nalezneme z a $\varphi_2 = \varphi_1 z$ je druhá funkce do fundamentálního systému.

Máme-li φ_1, φ_2 , napíšeme snadno obecné řešení ve tvaru

$$y = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad C_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

PŘÍKLAD 1.4. Řešte rovnici $(1-x)y'' + xy' - y = 0$.

Řešení. Prozradíme předem, že fundamentální systém je $\varphi_1 = x, \varphi_2 = e^x$.

Předpokládejme, že jsme uhodli $\varphi_1(x) = x$. Pomocí redukce řádu vypočítejme $\varphi_2(x)$. Nechť $y := \varphi_2(x) = xz(x)$. Pak

$$y = xz, \quad y' = z + xz', \quad y'' = 2z' + xz''$$

a dále

$$\begin{aligned} (1-x)(2z' + xz'') + x(z + xz') - xz &= 0, \\ x(1-x)z'' + 2(1-x)z' + xz + x^2z' - xz &= 0, \\ x(1-x)z'' + (x^2 - 2x + 2)z' &= 0. \end{aligned}$$

Substitucí $u = z'$ a separací máme

$$\begin{aligned} x(1-x)u' + (x^2 - 2x + 2)u &= 0, \\ \frac{u'}{u} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} &= 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}, \\ \ln u = x - 2 \ln x + \ln(x-1), \\ u = \frac{x-1}{x^2} e^x \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} z &= \int \frac{x-1}{x^2} e^x dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) e^x dx = \int \frac{1}{x} e^x dx - \int \frac{1}{x^2} e^x dx \\ &= \left| \begin{array}{l} u = e^x \\ u' = e^x \end{array} \right| \begin{array}{l} v' = \frac{1}{x^2} \\ v = -\frac{1}{x} \end{array} = \int \frac{1}{x} e^x dx - \left(-\frac{1}{x} e^x - \int -\frac{1}{x} e^x dx \right) \\ &= \int \frac{1}{x} e^x dx + \frac{1}{x} e^x - \int \frac{1}{x} e^x dx = \frac{1}{x} e^x. \end{aligned}$$

Konečně máme

$$\varphi_2 = y = xz = x \frac{1}{x} e^x = e^x.$$

Fundamentální systém tedy tvoří dvojice x, e^x .

Předpokládejme, že jsme naopak uhodli druhou funkci $\varphi_1(x) = e^x$. Pomocí redukce řádu vypočítejme $\varphi_2(x)$. Nechť $y := \varphi_2(x) = e^x z(x)$. Pak

$$y = e^x z, \quad y' = e^x(z + z'), \quad y'' = e^x(z'' + 2z' + z)$$

a dále

$$\begin{aligned}(1-x)e^x(z'' + 2z' + z) + xe^x(z + z') - e^xz &= 0, \\ (1-x)(z'' + 2z' + z) + x(z + z') - z &= 0, \\ (1-x)z'' + (2-x)z' &= 0.\end{aligned}$$

Substitucí $u = z'$ a separací máme

$$\begin{aligned}(1-x)u' + (2-x)u &= 0, \\ \frac{u'}{u} &= -\frac{x-2}{x-1} = -1 + \frac{1}{x-1}, \\ \ln u &= -x + \ln(x-1), \\ u &= e^{-x}(x-1)\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}z &= \int e^{-x}(x-1)dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^{-x} & v = x-1 \\ u = -e^{-x} & v' = 1 \end{array} \right| = -(x-1)e^{-x} - \int -e^{-x}dx \\ &= -(x-1)e^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x}.\end{aligned}$$

Konečně máme

$$\varphi_2 = y = e^xz = e^x(-xe^{-x}) = -x.$$

Fundamentální systém tedy tvoří dvojice $e^x, -x$. Můžeme ovšem vzít e^x, x .

Tuto rovnici lze řešit i přímo, pokud jsme dostatečně šikovni. Pišme

$$\begin{aligned}(1-x)y'' + xy' - y &= 0 \iff (1-x)y'' + (x-1)y' + y' - y = 0 \\ \iff (1-x)(y'' - y') + y' - y &= 0 \iff (1-x)(y' - y)' + y' - y = 0.\end{aligned}$$

Substitucí $z = y' - y$ dostaneme

$$(1-x)z' + z = 0.$$

To již dokážeme řešit separací.

$$\begin{aligned}(1-x)z' + z &= 0 \\ \frac{dz}{z} &= \frac{1}{x-1} \\ \ln z &= \ln(x-1) + c \\ z &= k(x-1).\end{aligned}$$

Dále po zpětném dosazení máme

$$y' - y = k(x-1),$$

což je lineární rovnice prvního řádu. Tu umíme řešit. Nejprve vynulujeme pravou stranu a máme

$$\begin{aligned}y' - y &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= 1 \\ \ln y &= x + d \\ y_h &= ce^x.\end{aligned}$$

Variací konstanty dostaneme $y = c(x)e^x$, kde

$$c'(x)e^x = k(x-1)$$

$$c'(x) = k(x-1)e^{-x}$$

$$c(x) = \int k(x-1)e^{-x} dx = -kxe^{-x}$$

$$y_p = -kx.$$

Celkem je tedy $y = -kx + ce^x$. Píšeme-li c_1 místo $-k$ a c_2 místo c , dostaneme

$$y = c_1x + c_2e^x.$$

Fundamentální systém je tedy tvořen funkcemi x, e^x . □

5. Homogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty - úvod.

Následující dvě věty jsou speciálními případy vět 1.1 a 1.2.

VĚTA 1.5. *Nechť $p, q \in \mathbb{R}$ a nechť je dána rovnice*

$$(5.1) \quad y'' + py' + qy = 0.$$

Označme V množinu jejich řešení. Pak V je vektorový prostor.

VĚTA 1.6. *Nechť $p, q \in \mathbb{R}$ a nechť je dána rovnice (5.1). Označme V množinu jejich řešení. Pak $\dim V = 2$.*

Naším hlavním úkolem je tedy nalézt nějakou bázi V pro rovnici s konstantními koeficienty. My se nyní naučíme tuto bázi (čili tento fundamentální systém) hledat. Začneme na příkladě.

PŘÍKLAD 1.7. *Řešte rovnici $y'' - 3y' + 2y = 0$.*

Řešení. "Uhodneme" řeší ve tvaru $y = e^{\lambda x}$ a hledejme λ tak, aby $e^{\lambda x}$ bylo řešením. Dosazením máme

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

a tedy

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0.$$

Protože $e^{\lambda x} > 0$, máme tzv. charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Její řešení je

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 1, \\ 2. \end{cases}$$

Fundamentální systém je tedy e^x, e^{2x} a obecné řešení zadané rovnice je

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

DEFINICE 1.8. *Nechť $p, q \in \mathbb{R}$ a nechť je dána rovnice (5.1). Pak kvadratickou rovnici*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

nazýváme charakteristickou rovnici rovnice (5.1).

Tuto charakteristickou rovnici vyřešíme a sestavíme fundamentální systém. Fundamentální systém ovšem záleží na tom, zda charakteristická rovnice má dva různé reálné kořeny, dvojnásobný reálný kořen či dva různé komplexní kořeny.

6. Homogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty - Dva různé reálné kořeny.

VĚTA 1.9. *Nechť $p, q \in \mathbb{R}$ a nechť je dána rovnice (5.1). Nechť $\lambda_1 \neq \lambda_2$ jsou dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, pak fundamentální systém je*

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

a množina řešení je

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

PŘÍKLAD 1.10. *Řešte rovnici $y'' - 5y' + 6y = 0$.*

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Jejím řešením je

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \begin{cases} 2, \\ 3. \end{cases}$$

Fundamentální systém je tedy e^{2x} , e^{3x} a obecné řešení zadané rovnice je

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

PŘÍKLAD 1.11. *Řešte rovnici $y'' - 4y = 0$.*

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

Jejím řešením je

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -2, \\ 2. \end{cases}$$

Fundamentální systém je tedy e^{-2x} , e^{2x} a obecné řešení zadané rovnice je

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

PŘÍKLAD 1.12. *Řešte rovnici $y'' - 7y' + 3y = 0$.*

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0.$$

Jejím řešením je

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 12}}{2} = \begin{cases} \frac{7 - \sqrt{37}}{2}, \\ \frac{7 + \sqrt{37}}{2}. \end{cases}$$

Fundamentální systém je tedy $e^{\frac{7 - \sqrt{37}}{2}x}$, $e^{\frac{7 + \sqrt{37}}{2}x}$ a obecné řešení zadané rovnice je

$$y = c_1 e^{\frac{7 - \sqrt{37}}{2}x} + c_2 e^{\frac{7 + \sqrt{37}}{2}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

PŘÍKLAD 1.13. Řešte rovnici $y'' - 4y' = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0.$$

Její řešení je

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 0, \\ 4. \end{cases}$$

Fundamentální systém je tedy $e^{0 \cdot x} = 1$, e^{4x} a obecné řešení zadané rovnice je

$$y = c_1 + c_2 e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

7. Homogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty - Dva různé komplexní kořeny.

VĚTA 1.14. Nechť $p, q \in \mathbb{R}$ a nechť je dána rovnice (5.1). Nechť $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ jsou dva různé komplexní kořeny charakteristické rovnice. Pak fundamentální systém je

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx$$

a množina řešení je

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Připomeňme si z prvního semestru tzv. Eulerův vzorec

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha.$$

Pokud bychom hledali množinu řešení, jejíž oborem hodnot jsou komplexní čísla, tak se to udělá stejně jako v případě dvou různých reálných kořenů. Pišme tedy

$$(7.1) \quad y = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Všimněme si, že nyní probíhají konstanty c_1, c_2 množinu komplexních čísel. Pokud tedy uvažujeme řešení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$, pak jeden z fundamentálních systémů je

$$y_1 = e^{(a+ib)x}, \quad y_2 = e^{(a-ib)x}.$$

Tento fundamentální systém lze pomocí Eulerova vzorce přepsat

$$y_1 = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx), \quad y_2 = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx).$$

Protože y_1, y_2 je báze prostoru řešení, je i $z_1 := \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $z_2 := \frac{1}{2i}(y_1 - y_2)$ báze prostoru řešení. Zřejmě

$$(7.2) \quad z_1 = e^{ax} \cos bx, \quad z_2 = e^{ax} \sin bx$$

a tedy řešení dané v (7.1) se dá přepsat ve tvaru

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Konstanty c_1, c_2 probíhají opět množinu komplexních čísel. Teď už je ale fundamentální systém tvořen funkcemi z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Pokud tedy napíšeme

$$y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

dostaneme množinu řešení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a fundamentální systém je tedy dán vzorečkem (7.2).

□

PŘÍKLAD 1.15. Řešte rovnici $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Její řešení je

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = 2 \pm \sqrt{-9} = \begin{cases} 2 + 3i, \\ 2 - 3i. \end{cases}$$

Fundamentální systém je tedy $e^{2x} \cos 3x$, $e^{2x} \sin 3x$ a obecné řešení zadané rovnice je

$$y = c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

PŘÍKLAD 1.16. Řešte rovnici $y'' + 4y = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Její řešení je

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 2i, \\ -2i. \end{cases}$$

Fundamentální systém je tedy $\cos 2x$, $\sin 2x$ a obecné řešení zadané rovnice je

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

8. Homogenní lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty - Dvojnásobný reálný kořen.

VĚTA 1.17. *Nechť $p, q \in \mathbb{R}$ a nechť je dána rovnice (5.1). Nechť $\lambda_{1,2} = a$ je dvojnásobný reálný kořen charakteristické rovnice. Pak fundamentální systém je*

$$y_1 = e^{ax}, \quad y_2 = xe^{ax}$$

a množina řešení je

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. Zde není ani tak zajímavý důkaz. Ten je snadný a stačí ověřit, že obě funkce jsou nezávislé a splňují danou rovnici.

Mnohem zajímavější je, jak se ten fundamentální systém "uhodne". Nechť tedy daná rovnice má tvar

$$(8.1) \quad y'' - 2ay' + a^2 = 0.$$

Její charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = (\lambda - a)^2 = 0$$

a kořen je dvojnásobný $\lambda_{1,2} = a$. Jistě je tedy jedna z funkcí fundamentálního systému $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{ax}$. Kde ale sehnat druhou? Nemůže to být $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{ax}$, to by y_1 a y_2 byly lineárně závislé (dokonce stejné).

Vezmeme rovnici

$$(8.2) \quad y'' - (2a + \varepsilon)y' + a(a + \varepsilon)y = 0.$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 - (2a + \varepsilon)\lambda + a(a + \varepsilon) = (\lambda - a)(\lambda - (a + \varepsilon)) = 0.$$

Její kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} a, \\ a + \varepsilon \end{cases}$$

a fundamentální systém je

$$(8.3) \quad y_1^{(\varepsilon)} = e^{ax}, \quad y_2^{(\varepsilon)} = e^{(a+\varepsilon)x}.$$

Portože rovnice (8.2) přchází pro $\varepsilon \rightarrow 0$ na rovnici (8.1), dá se očekávat, že fundamentální systém (8.3) přejde na fundamentální systém rovnice (8.1). Jenže fundamentální systém (8.3) přejde na systém e^{ax} , e^{ax} , což ovšem není fundamentální systém (8.1).

Nabízí se ale možnost porřít si z fundamentálního systému (8.3) nějaký jiný fundamentální systém, jehož limita by přešla na fundamentální systém rovnice (8.1). Utvořme tedy z (8.3) nový fundamentální systém

$$z_1^{(\varepsilon)} = e^{ax}, \quad z_2^{(\varepsilon)} = \frac{e^{(a+\varepsilon)x} - e^{ax}}{\varepsilon}.$$

Snadno se ověří, že toto je skutečně fundamentální systém rovnice (8.2). Limitním přechodem pro $\varepsilon \rightarrow 0$ dostaneme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{(a+\varepsilon)x} - e^{ax}}{\varepsilon} = xe^{ax} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon x} - 1}{x\varepsilon} = xe^{ax}$$

a nový fundamentální systém rovnice (8.2) je

$$z_1 = e^{ax}, \quad z_2 = xe^{ax}.$$

□

PŘÍKLAD 1.18. Řešte rovnici $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Její řešení je

$$\lambda_{1,2} = 2.$$

Fundamentální systém je tedy e^{2x} , xe^{2x} a obecné řešení zadané rovnice je

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

PŘÍKLAD 1.19. Řešte rovnici $y'' + 2y' + y = 0$.

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0.$$

Její řešení je

$$\lambda_{1,2} = -1.$$

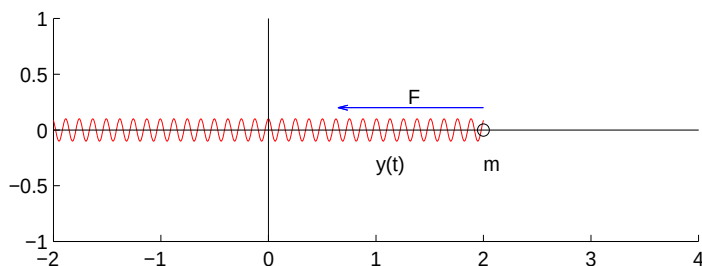
Fundamentální systém je tedy e^{-x} , xe^{-x} a obecné řešení zadané rovnice je

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

ZAJÍMAVÝ PŘÍKLAD 1.20. Kulička o hmotnosti m je na pružině, která je upravena na zeď. Povytkneme kuličku o vzdálenost A ze své rovnovážné polohy a pustíme. Předpokládejme, že tuhost pružiny je k a odpor prostředí zanedbáme.

Řešení. Je zřejmé, že kulička se bude pohybovat v přímce. Zaveďme na ní souřadný systém tak, že rovnovážná poloha je v 0 a kladný směr je doprava. Představme si, že kulička má v čase t polohu $y(t)$. Viz obrázek 1.



OBRÁZEK 1. Nákres.

Síla F působící na pružinu je úměrná výchylce a tuhosti, tj. $|F| = ky(t)$, ale má opačný směr než $y(t)$, tj. $F = -ky(t)$. Z Newtonova pohybového zákona máme (8.4)

$$my''(t) = -ky(t).$$

Navíc z počátečních podmínek máme $y(0) = A$, $y'(0) = 0$. Řešme tedy problém

$$my''(t) = -ky(t), \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0.$$

Nejprve najdeme obecné řešení diferenciální rovnice (8.4). Zřejmě je po označení $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Její charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

a obecné řešení rovnice (8.4) je tedy

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Derivováním máme

$$y'(t) = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t.$$

Dosadíme $t = 0$ a máme $y'(0) = c_2 \omega = 0$, tedy $c_2 = 0$ a

$$y(t) = c_1 \cos \omega t.$$

Dosadíme opět $t = 0$ a máme $y(0) = c_1 = A$, tedy $c_1 = A$ a

$$y(t) = A \cos \omega t.$$

□

Rovnice druhého řádu - pokračování

1. Eulerova lineární rovnice druhého řádu.

Jedná se o lineární rovnici druhého řádu s nekonstantními koeficienty (velmi speciálními), kterou umíme vyřešit.

$$(1.1) \quad x^2 y'' + pxy' + qy = 0,$$

kde p, q jsou reálná čísla.

Uvedeme dvě metody řešení této rovnice.

2. Eulerova lineární rovnice - První metoda.

Zavedeme substituci $t = e^x$ a novou funkci $z(t) := y(x) = y(e^t)$. Pak máme

$$z'(t) = y'(e^t)e^t = xy'(x),$$

$$z''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = x^2 y''(x) + xy'(x).$$

Dosazením do rovnice (1.1) dostaneme

$$z''(t) - z'(t) + pz'(t) + qz(t) = 0 \iff$$

$$z''(t) + (p-1)z'(t) + qz(t) = 0,$$

což je diferenciální rovnice s konstantními koeficienty pro $z(t)$ a tu již umíme řešit.

3. Eulerova lineární rovnice - Druhá metoda.

Uhodneme řešení ve tvaru $y = x^\alpha$. Pak $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ a $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Dosazením do rovnice (1.1) dostaneme

$$x^2 \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + p\alpha x^{\alpha-1} + q x^\alpha = 0 \iff$$

$$\alpha(\alpha-1)x^\alpha + p\alpha x^\alpha + q x^\alpha = 0 \iff$$

$$\alpha(\alpha-1) + p\alpha + q = 0,$$

což je kvadratická rovnice pro α .

Ukážeme si obě metody na třech příkladech.

PŘÍKLAD 2.1. Řešte diferenciální rovnici

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0.$$

Řešení. První metoda: Zavedeme substituci $t = e^x$ a novou funkci $z(t) := y(x) = y(e^t)$. Pak rovnice přejde na tvar

$$z'' + z' - 6z = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

a její řešení jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$. Tedy

$$z(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}.$$

Protože $x = e^t$, dostaneme

$$y(x) = z(t) = c_1 x^2 + c_2 x^{-3}.$$

Druhá metoda: Hledejme řešení ve tvaru $y = x^\alpha$. Pak rovnice přejde na tvar

$$\alpha(\alpha - 1)x^\alpha + 2\alpha x^\alpha - 6x^\alpha = 0.$$

Po úpravě je

$$\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - 6 = 0 \iff \alpha^2 + \alpha - 6 = 0$$

a její řešení jsou $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$. Tedy

$$y(x) = z(t) = c_1 x^2 + c_2 x^{-3}.$$

□

PŘÍKLAD 2.2. Řešte diferenciální rovnici

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0.$$

Řešení. První metoda: Zavedeme substituci $t = e^x$ a novou funkci $z(t) := y(x) = y(e^t)$. Pak rovnice přejde na tvar

$$z'' - 6z' + 9z = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

a její řešení jsou $\lambda_{1,2} = 3$. Tedy

$$z(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}.$$

Protože $x = e^t$, tj. $t = \ln x$, dostaneme

$$y(x) = z(t) = c_1 x^3 + c_2 x^3 \ln x.$$

Druhá metoda: Hledejme řešení ve tvaru $y = x^\alpha$. Pak rovnice přejde na tvar

$$\alpha(\alpha - 1)x^\alpha - 5\alpha x^\alpha + 9x^\alpha = 0.$$

Po úpravě je

$$\alpha(\alpha - 1) - 5\alpha + 9 = 0 \iff \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$$

a její řešení jsou $\alpha_{1,2} = 3$. Tedy $y_1 = x^3$ je řešení a druhou funkci do fundamentálního systému najdeme redukcí řádu rovnice. Položme $y_2 = x^3 v$. Pak

$$y_2' = 3x^2 v + x^3 v', \quad y_2'' = 6xv + 3x^2 v' + 3x^2 v' + x^3 v'' = 6xv + 6x^2 v' + x^3 v''.$$

Dosazením do původní rovnice máme

$$x^2(6xv + 6x^2 v' + x^3 v'') - 5x(3x^2 v + x^3 v') + x^3 v = 0 \iff x^5 v'' + x^4 v' = 0.$$

Substitucí $u = v'$ a krácením dostaneme $xu' + u = 0$. Separací snadno najdeme $u = \frac{1}{x}$, tedy $v = \ln x$. Druhá funkce do fundamentálního systému je tedy $y_2 = x^3 \ln x$. Řešení je tedy

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^3 \ln x.$$

□

PŘÍKLAD 2.3. *Řešte diferenciální rovnici*

$$x^2y'' - 3xy' + 13y = 0.$$

Řešení. První metoda: Zavedeme substituci $t = e^x$ a novou funkci $z(t) := y(x) = y(e^t)$. Pak rovnice přejde na tvar

$$z'' - 4z' + 13z = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

a její řešení jsou $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$. Tedy

$$z(t) = c_1 e^{2t} \cos 3t + c_2 e^{2t} \sin 3t.$$

Protože $x = e^t$, dostaneme

$$y(x) = z(t) = c_1 x^2 \cos(3 \ln x) + c_2 x^2 \sin(3 \ln x).$$

Druhá metoda: Hledejme řešení ve tvaru $y = x^\alpha$. Pak rovnice přejde na tvar

$$\alpha(\alpha - 1)x^\alpha - 3\alpha x^\alpha + 13x^\alpha = 0.$$

Po úpravě je

$$\alpha(\alpha - 1) - 3\alpha + 13 = 0 \iff \alpha^2 - 4\alpha + 13 = 0$$

a její řešení jsou $\alpha_1 = 2 + 3i$, $\alpha_2 = 2 - 3i$. Tedy

$$y(x) = z(t) = c_1 x^{2+3i} + c_2 x^{2-3i}.$$

To ještě upravíme pomocí

$$\begin{aligned} y(x) = z(t) &= c_1 x^{2+3i} + c_2 x^{2-3i} = c_1 e^{(2+3i) \ln x} + c_2 e^{(2-3i) \ln x} \\ &= c_1 e^{2 \ln x + 3i \ln x} + c_2 e^{2 \ln x - 3i \ln x} = c_1 e^{2 \ln x} e^{3i \ln x} + c_2 e^{2 \ln x} e^{-3i \ln x} \\ &= c_1 x^2 (\cos(3 \ln x) + i \sin(3 \ln x)) + c_2 x^2 (\cos(3 \ln x) - i \sin(3 \ln x)) \\ &= (c_1 + c_2) x^2 \cos(3 \ln x) + i(c_1 - c_2) x^2 \sin(3 \ln x). \end{aligned}$$

Píšeme-li $d_1 = c_1 + c_2$ a $d_2 = i(c_1 - c_2)$, dostaneme

$$y(x) = d_1 x^2 \cos(3 \ln x) + d_2 x^2 \sin(3 \ln x).$$

To je stejná množina řešení jako v první metodě.

□

Pro rychlé řešení eulerovy rovnice si stačí zapamatovat následující postup.

4. Zkrácený návod na řešení rovnice $x^2y'' + pxy' + q = 0$.

Sestavíme kvadratickou rovnici $\alpha^2 + (p - 1)\alpha + q = 0$.

Případ dvou různých reálných kořenů: Jsou-li α_1, α_2 různé reálné kořeny, je fundamentální systém $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}$.

Případ dvojnásobného reálného kořenů: Je-li $\alpha_1 = \alpha_2 := \alpha$ reálný kořen, je fundamentální systém $x^\alpha, x^\alpha \ln x$.

Případ dvou různých komplexně sdružených kořenů: Jsou-li $\alpha_{1,2} = a \pm ib$ komplexní kořeny, je fundamentální systém $x^a \cos(b \ln x), x^a \sin(b \ln x)$.

5. Lineární rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a s pravou stranou.

VĚTA 2.4. *Nechť I je interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $p, q \in \mathbb{R}$ a nechť je dána rovnice*

$$(5.1) \quad y'' + py' + qy = f(x).$$

Označme V množinu všech řešení rovnice $y'' + py' + qy = 0$ a nechť y_0 je nějaké řešení rovnice (5.1). Pak množina M všech řešení rovnice (5.1) je

$$M = \{y_0 + y; y \in V\}.$$

Důkaz. Vynecháme, ale je naprosto analogický důkazu věty 76 z osmé přednášky. $\square$

Rovnici $y'' + py' + qy = 0$ už řešit umíme z minulé přednášky. Jde tedy o to, zda umíme nějak najít (třeba i uhodnout) y_0 , tzv. partikulární řešení. Vzpomeneme-li si, jak se hledá partikulární řešení lineární rovnice prvního řádu, můžeme se pokusit o analogii a zkusit variaci (zde ne jedné, ale dvou) konstant.

6. Variace konstant.

Začneme s příkladem.

PŘÍKLAD 2.5. *Řešte rovnici*

$$(6.1) \quad y'' - 3y' + 2y = 2x - 3.$$

Řešení. Charakteristická rovnice příslušné homogenní diferenciální rovnice je

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

a tedy

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 1, \\ 2. \end{cases}$$

Obečné řešení rovnice $y'' - 3y' + 2y = 0$ je tedy

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Zkusme hledat partikulární řešení rovnice (6.1) ve tvaru

$$(6.2) \quad y_p = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x},$$

kde $c_1(x)$, $c_2(x)$ jsou dvě neznámé funkce. Chceme je pochopitelně navolit tak, aby funkce y_p řešila rovnici (6.1). Tak ji zkusme do rovnice (6.1) dosadit. Postupně dostaneme první derivaci

$$\begin{aligned} y_p' &= c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} + c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x} \\ &= e^x(c_1'(x) + c_1(x)) + e^{2x}(c_2'(x) + 2c_2(x)) \end{aligned}$$

a druhou derivaci

$$\begin{aligned} y_p'' &= c_1''(x)e^x + c_2''(x)e^{2x} + c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} \\ &\quad + c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} + c_1(x)e^x + 4c_2(x)e^{2x} \\ &= c_1''(x)e^x + c_2''(x)e^{2x} + 2c_1'(x)e^x + 4c_2'(x)e^{2x} + c_1(x)e^x + 4c_2(x)e^{2x} \\ &= e^x(c_1''(x) + 2c_1'(x) + c_1(x)) + e^{2x}(c_2''(x) + 4c_2'(x) + 4c_2(x)). \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (6.1) dostaneme

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' + 2y_p &= e^x \left(c_1''(x) + 2c_1'(x) + c_1(x) \right) + e^{2x} \left(c_2''(x) + 4c_2'(x) + 4c_2(x) \right) \\ &\quad - 3e^x \left(c_1'(x) + c_1(x) \right) - 3e^{2x} \left(c_2'(x) + 2c_2(x) \right) \\ &\quad + 2c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x} = 2x - 3, \end{aligned}$$

což po úpravě dává

$$e^x \left(c_1''(x) - c_1'(x) \right) + e^{2x} \left(c_2''(x) + c_2'(x) \right) = 2x - 3.$$

Máme tedy jednu rovnici

$$(6.3) \quad e^x \left(c_1''(x) - c_1'(x) \right) + e^{2x} \left(c_2''(x) + c_2'(x) \right) = 2x - 3$$

pro dvě neznámé funkce $c_1(x)$, $c_2(x)$. My ale nechceme najít všechny dvojice $c_1(x)$, $c_2(x)$, které splňují (6.3). Nám stačí jedna konkrétní dvojice. To ale znamená, že si můžeme libovolně zvolit pro $c_1(x)$, $c_2(x)$ ještě jednu rovnici. A tato druhá rovnice se volí šikovně.

Nechť je tedy partikulární řešení rovnice (6.2) dáno vzorcem (6.1). Tedy

$$\begin{aligned} y_p &= c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x}, \\ y_p' &= c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} + c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x}. \end{aligned}$$

Nyní volíme druhou rovnici

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = 0.$$

Spočteme y_p'' . Zřejmě je dle předchozí rovnice

$$y_p' = c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x}$$

a tedy

$$y_p'' = c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} + c_1(x)e^x + 4c_2(x)e^{2x}.$$

Dosadíme y_p , y_p' , y_p'' do (6.1) a dostaneme

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' + 2y_p &= c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} + c_1(x)e^x + 4c_2(x)e^{2x} \\ &\quad - 3 \left(c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x} \right) + 2 \left(c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x} \right) \\ &= c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x}. \end{aligned}$$

Všimněme si podstatné věci, že nám v posledním výrazu vypadly členy $c_1(x)$, $c_2(x)$ a zůstaly jen členy $c_1'(x)$, $c_2'(x)$. Máme tedy soustavu dvou lineárních algebraických rovnic pro $c_1'(x)$, $c_2'(x)$

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} &= 0, \\ c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} &= 2x - 3. \end{aligned}$$

Snadno najdeme

$$c_1'(x) = -(2x - 3)e^{-x}, \quad c_2'(x) = (2x - 3)e^{-2x}$$

□

a integraci per-partes máme

$$\begin{aligned} c_1(x) &= - \int (2x-3)e^{-x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x-3 & v' = e^{-x} \\ u' = 2 & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= - \left\{ -(2x-3)e^{-x} - 2 \int -e^{-x} dx \right\} = (2x-3)e^{-x} + 2e^{-x} \end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int (2x-3)e^{-2x} dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x-3 & v' = e^{-2x} \\ u' = 2 & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right| \\ &= -\frac{(2x-3)}{2} e^{-2x} + \int e^{-2x} dx = -\frac{(2x-3)e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2}. \end{aligned}$$

Dosazením do (6.2) máme

$$\begin{aligned} y_p &= \left((2x-3)e^{-x} + 2e^{-x} \right) e^x + \left(-\frac{(2x-3)e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} \right) e^{2x} \\ &= (2x-3) + 2 - \frac{(2x-3)}{2} - \frac{1}{2} = x. \end{aligned}$$

Celkové řešení rovnice (6.1) je tedy dáno součtem y_p a y_h , což dává

$$y = x + c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

7. Obecný postup při variaci konstant.

Nechť $p, q \in \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ buď spojitá funkce a necht' je dána rovnice

$$(7.1) \quad y'' + py' + qy = f(x).$$

Předpokládejme, že $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ je fundamentální systém rovnice (7.1) a tedy obecné řešení rovnice s nulovou pravou stranou je

$$y_h = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že protože $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ je fundamentální systém rovnice (7.1), tak platí

$$(7.2) \quad \varphi_1''(x) + p\varphi_1'(x) + q\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2''(x) + p\varphi_2'(x) + q\varphi_2(x) = 0.$$

Hledejme partikulární řešení rovnice (7.1) ve tvaru

$$(7.3) \quad y_p = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x).$$

Potom derivováním máme

$$y_p' = c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) + c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2(x)\varphi_2'(x).$$

Nyní volíme první rovnici

$$(7.4) \quad c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0.$$

Potom

$$(7.5) \quad y_p' = c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2(x)\varphi_2'(x)$$

a další derivováním je

$$(7.6) \quad y_p'' = c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x).$$

Dosadíme nyní (7.6), (7.5) a (7.3) do (7.1) a dostaneme druhou rovnici pro $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

$$\begin{aligned} y_p'' + py_p' + qy_p &= c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + c_1(x)\varphi_1''(x) + c_2(x)\varphi_2''(x) \\ &+ p\left(c_1(x)\varphi_1'(x) + c_2(x)\varphi_2'(x)\right) + q\left(c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x)\right) = f(x). \end{aligned}$$

Po úpravě máme

$$\begin{aligned} c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + c_1(x)\underbrace{\left(\varphi_1''(x) + p\varphi_1'(x) + q\varphi_1(x)\right)}_{= 0 \text{ díky (7.2)}} \\ + c_2(x)\underbrace{\left(\varphi_2''(x) + p\varphi_2'(x) + q\varphi_2(x)\right)}_{= 0 \text{ díky (7.2)}} = f(x) \end{aligned}$$

a poslední rovnice má tedy tvar

$$c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x),$$

což spolu s (7.4) dává soustavu

$$\begin{aligned} (7.7) \quad c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) &= 0, \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Teď vypočítáme $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, dosadíme do (7.3) a máme partikulární řešení.

PŘÍKLAD 2.6. *Řešte rovnici*

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^x.$$

Řešení. Řešme nejprve rovnici

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

a kořeny jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Máme tedy fundamentální systém e^{2x} , e^{3x} a potom

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Proveďme variaci constant. Hledejme partikulární řešení ve tvaru

$$y_h = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x}.$$

Podle (7.7) dostaneme pro $c_1(x)$, $c_2(x)$ soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x)e^{2x} + c_2'(x)e^{3x} &= 0, \\ 2c_1'(x)e^{2x} + 3c_2'(x)e^{3x} &= e^x, \end{aligned}$$

což dává

$$c_1'(x) = -e^{-x}, \quad c_2'(x) = e^{-2x}.$$

Vypočítejme $c_1(x)$.

$$c_1(x) = - \int e^{-x} dx = e^{-x}.$$

Vypočítejme $c_2(x)$.

$$c_2(x) = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

Partikulární řešení je tedy

$$y_p = e^{-x}e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)e^{3x} = \frac{1}{2}e^x.$$

Obecné řešení původní rovnice je tedy součtem y_h a y_p , tj.

$$y = \frac{1}{2} e^x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

PŘÍKLAD 2.7. *Řešte rovnici*

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{x^2 e^{2x}}.$$

Řešení. Řešme nejprve rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$$

a kořen je dvojnásobný $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Máme tedy fundamentální systém e^{-2x} , xe^{-2x} a potom

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Proveďme variaci constant. Hledejme partikulární řešení ve tvaru

$$y_h = c_1(x) e^{-2x} + c_2(x) x e^{-2x}.$$

Podle (7.7) dostaneme pro $c_1(x)$, $c_2(x)$ soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x) e^{-2x} + c_2'(x) x e^{-2x} &= 0, \\ -2c_1'(x) e^{-2x} + c_2'(x) (e^{2x} - 2x e^{-2x}) &= \frac{1}{x^2 e^{2x}}, \end{aligned}$$

a po úpravě

$$\begin{aligned} c_1'(x) + c_2'(x) x &= 0, \\ -2c_1'(x) + c_2'(x) (1 - 2x) &= \frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

což dává

$$c_1'(x) = -\frac{1}{x}, \quad c_2'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Vypočítejme $c_1(x)$.

$$c_1(x) = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln x.$$

Vypočítejme $c_2(x)$.

$$c_2(x) = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}.$$

Partikulární řešení je tedy

$$y_p = -\ln x e^{-2x} - \frac{1}{x} x e^{-2x} = e^{-2x} (-1 - \ln x).$$

Obecné řešení původní rovnice je tedy součtem y_h a y_p , tj.

$$y = e^{-2x} (-1 - \ln x) + c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

PŘÍKLAD 2.8. *Řešte rovnici*

$$y'' - 2y' + 2y = 2x.$$

Řešení. Řešme nejprve rovnici

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

a kořeny jsou $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$. Máme tedy fundamentální systém $e^x \cos x$, $e^x \sin x$ a potom

$$y_h = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Proveďme variaci constant. Hledejme partikulární řešení ve tvaru

$$y_h = c_1(x) e^x \cos x + c_2(x) e^x \sin x.$$

Podle (7.7) dostaneme pro $c_1(x)$, $c_2(x)$ soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x) e^x \cos x + c_2'(x) e^x \sin x &= 0, \\ c_1'(x) (e^x \cos x - e^x \sin x) + c_2'(x) (e^x \sin x + e^x \cos x) &= 2x, \end{aligned}$$

po úpravě

$$\begin{aligned} c_1'(x) e^x \cos x + c_2'(x) e^x \sin x &= 0, \\ \underbrace{c_1'(x) e^x \cos x + c_2'(x) e^x \sin x - c_1'(x) e^x \sin x + c_2'(x) e^x \cos x}_{= 0 \text{ dle první rovnice}} &= 2x, \end{aligned}$$

což dává soustavu

$$\begin{aligned} c_1'(x) e^x \cos x + c_2'(x) e^x \sin x &= 0, \\ -c_1'(x) e^x \sin x + c_2'(x) e^x \cos x &= 2x. \end{aligned}$$

Cečením a odečtením dostaneme

$$c_1'(x) = -2x e^{-x} \sin x, \quad c_2'(x) = 2x e^{-x} \cos x.$$

Vypočítejme $c_1(x)$. Nejprve spočteme per-partes integrály

$$\int e^{-x} \sin x dx \quad \text{a} \quad \int e^{-x} \cos x dx.$$

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x dx &= \left| \begin{array}{cc} u = \sin x & v' = e^{-x} \\ u' = \cos x & v = -e^{-x} \end{array} \right| = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx \\ &= \left| \begin{array}{cc} u = \cos x & v' = e^{-x} \\ u' = -\sin x & v = -e^{-x} \end{array} \right| = -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx. \end{aligned}$$

Tím jsme dostali rovnici pro integrál $\int e^{-x} \sin x dx$ a máme tedy

$$\int e^{-x} \sin x dx = \frac{-e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x}{2} = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x).$$

Analogicky bychom vypočítali

$$\int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x).$$

Nyní $c_1(x)$.

$$\begin{aligned} \int -2xe^{-x} \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & v' = e^{-x} \sin x \\ u' = \cos x & v = -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sin x) \end{array} \right| \\ &= xe^{-x} (\cos x + \sin x) - \int e^{-x} \sin x dx - \int e^{-x} \cos x dx \\ &= xe^{-x} (\cos x + \sin x) + \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \\ &= xe^{-x} (\cos x + \sin x) + e^{-x} \cos x. \end{aligned}$$

Vypočítejme analogicky $c_2(x)$.

$$\begin{aligned} \int 2xe^{-x} \cos x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & v' = e^{-x} \cos x \\ u' = \cos x & v = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \end{array} \right| \\ &= xe^{-x} (\sin x - \cos x) - \int e^{-x} \sin x dx + \int e^{-x} \cos x dx \\ &= xe^{-x} (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \\ &= xe^{-x} (\sin x - \cos x) + e^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

Partikulární řešení je tedy

$$\begin{aligned} y_p &= (xe^{-x} (\cos x + \sin x) + e^{-x} \cos x) e^x \cos x \\ &\quad + (xe^{-x} (\sin x - \cos x) + e^{-x} \sin x) e^x \sin x \\ &= x(\cos^2 x + \cos x \sin x) + \cos^2 x + x(\sin^2 x - \cos x \sin x) + \sin^2 x \\ &= x \cos^2 x + x \sin^2 x + x \cos x \sin x - x \cos x \sin x + \cos^2 x + \sin^2 x = x + 1. \end{aligned}$$

Obecné řešení původní rovnice je tedy součtem y_h a y_p , tj.

$$y = x + 1 + c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

8. Odhad partikulárního řešení pomocí speciální pravé strany.

Začneme s příkladem, který jsme již vyřešili variací konstant.

PŘÍKLAD 2.9. *Řešte rovnici*

$$y'' - 2y' + 2y = 2x.$$

Řešení. Víme již

$$y_h = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní potřebujeme najít partikulární řešení. V tomto případě ho ale "skoro uhodneme". Pokud se budeme chvíli dívat na danou rovnici, možná nás napadne (možná také ne), že pokud budeme hledat y_p jako polynom, tak jeho derivacemi získáme opět polynom a dostaneme tedy po dosazení do levé strany polynom, který by se měl rovnat polynomu na pravé straně, tj. $2x$. Navíc je jasné, že pokud bychom vzaly polynom stupně k , je vlevo polynom stupně k a díky pravé straně musí být $k = 1$. Stačí vzít partikulární řešení jako polynom prvního stupně, tj.

$$y_p = ax + b.$$

Čísla a, b vypočítáme dosazením y_p do původní rovnice. Tedy $y'_p = a$, $y''_p = 0$ a

$$0 - 2a + 2(ax + b) = 2x.$$

Dva polynomy se rovnají, pokud se rovnají jejich koeficienty, což dává

$$2a = 2, \quad 2b - 2a = 0.$$

Z toho okamžitě plyne $a = 1$ a $b = 1$ a máme partikulární řešení

$$y_p = x + 1.$$

Obecné řešení je tedy

$$y = x + 1 + c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Zkusme ještě jeden příklad.

PŘÍKLAD 2.10. *Řešte rovnici*

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2x}.$$

Řešení. Víme již

$$y_h = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyní potřebujeme najít partikulární řešení. V tomto případě ho ale opět "skoro uhadneme". Pokud se budeme chvíli dívat na danou rovnici, možná nás napadne (možná také ne), že pokud budeme hledat y_p ve tvaru $y_p = e^{2x}$, tak jeho derivacemi získáme $y'_p = 2e^{2x}$ a $y''_p = 4e^{2x}$ a dostaneme tedy po dosazení do levé strany

$$4e^{2x} - 4e^{2x} + 2e^{2x} = 2e^{2x},$$

což už je rovno pravé straně až na konstantu. Uhadneme tedy partikulární řešení ve tvaru tj.

$$y_p = ae^{2x}.$$

Číslo a vypočítáme dosazením y_p do původní rovnice. Tedy $y'_p = 2ae^{2x}$, $y''_p = 4ae^{2x}$ a

$$4ae^{2x} - 4ae^{2x} + 2ae^{2x} = e^{2x}$$

a dostaneme rovnici

$$2ae^{2x} = e^{2x}.$$

Z toho okamžitě plyne $a = \frac{1}{2}$ a máme partikulární řešení

$$y_p = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Obecné řešení je tedy

$$y = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

V obou případech jsme partikulární řešení až na pár koeficientů uhadli z tvaru pravé strany a přímým dosazením jsme tyto koeficienty vypočetli. Ušetřili jsme si námahu s počítáním integrálů při variaci konstant. Uveďme si nyní obecný tvar speciální pravé strany, pro kterou se umí partikulární řešení až na několik neurčitých koeficientů uhadnout.

VĚTA 2.11. *Nechť je dána rovnice*

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Předpokládejme, že pravá strana $f(x)$ má speciální tvar

$$(8.1) \quad f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x),$$

kde $P_1(x)$, $P_2(x)$ jsou polynomy. Nechť k je násobnost čísla $\alpha + i\beta$ jakožto kořene charakteristické rovnice (pokud $\alpha + i\beta$ není kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$).

Potom existují polynomy $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $\max(\text{st}Q_1, \text{st}Q_2) \leq \max(\text{st}P_1, \text{st}P_2)$, tak, že funkce

$$y_p = x^k e^{\alpha x}(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x)$$

je partikulární řešení.

Uvedme si několik speciálních případů.

1) Je-li $\beta = 0$, máme $f(x) = P_1(x)e^{\alpha x}$ a partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = x^k Q_1(x)e^{\alpha x}.$$

2) Je-li $\alpha = 0$, máme $f(x) = P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x$ a partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = x^k(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x).$$

3) Je-li $\alpha = 0$ a $\beta = 0$, máme $f(x) = P_1(x)$ a partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = x^k Q_1(x).$$

4) Je-li $P_2(x)$, máme $f(x) = P_1(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ a partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p = x^k Q_1(x)e^{\alpha x} \cos \beta x.$$

A takto bychom mohly pokračovat dál. Vyřešme si pár příkladů.

PŘÍKLAD 2.12. *Řešte rovnici*

$$y'' - 2y' + 2y = xe^{3x}.$$

Řešení. Snadno zjistíme kořeny charakteristické rovnice $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ a

$$y_h = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pravá strana má speciální tvar

$$f(x) = xe^{3x},$$

který dostaneme volbou $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = 0$ v (8.1). Protože číslo $\alpha + i\beta = 3$ není kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$. Lze tedy hledat

$$y_p = (ax + b)e^{3x},$$

kde $ax + b$ je neznámý polynom prvního stupně. Výpočtem máme

$$y_p' = ae^{3x} + 3(ax + b)e^{3x}$$

a

$$y_p'' = 3ae^{3x} + 3ae^{3x} + 9(ax + b)e^{3x} = 6ae^{3x} + 9(ax + b)e^{3x}.$$

Dosazením do původní rovnice máme

$$6ae^{3x} + 9(ax + b)e^{3x} - 2(ae^{3x} + 3(ax + b)e^{3x}) + 2(ax + b)e^{3x} = xe^{3x},$$

tedy

$$6a + 9ax + 9b - 2a - 6ax - 6b + 2ax + 2b = 5ax + 4a + 5b = x.$$

Z toho plyne

$$5a = 1, \quad 4a + 5b = 0$$

a $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{4}{25}$. Partikulární řešení je tedy

$$y_p = \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^{3x}$$

a obecné řešení původní rovnice je

$$y = \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^{3x} + c_1e^x \cos x + c_2e^x \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

PŘÍKLAD 2.13. *Řešte rovnici*

$$y'' - y = \cos x.$$

Řešení. Snadno zjistíme kořeny charakteristické rovnice $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ a

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pravá strana má speciální tvar

$$f(x) = \cos x,$$

který dostaneme volbou $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 0$ v (8.1). Protože číslo $\alpha + i\beta = i$ není kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$. Lze tedy hledat

$$y_p = a \cos x + b \sin x,$$

kde a , b jsou neznámé. Výpočtem máme

$$y'_p = -a \sin x + b \cos x$$

a

$$y''_p = -a \cos x - b \sin x.$$

Dosazením do původní rovnice máme

$$-a \cos x - b \sin x - a \cos x - b \sin x = -2a \cos x - 2b \sin x = \cos x.$$

Z toho plyne

$$2a = 1, \quad 2b = 0$$

a $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$. Partikulární řešení je tedy

$$y_p = \frac{1}{2} \cos x$$

a obecné řešení původní rovnice je

$$y = \frac{1}{2} \cos x + c_1e^{-x} + c_2e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

PŘÍKLAD 2.14. *Řešte rovnici*

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Řešení. Snadno zjistíme kořen charakteristické rovnice je dvojnásobný $\lambda_{1,2} = 1$.

$$y_h = c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pravá strana má speciální tvar

$$f(x) = e^x,$$

který dostaneme volbou $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 0$ v (8.1). Protože číslo $\alpha + i\beta = 1$ je kořenem charakteristické rovnice násobnosti 2, je $k = 2$. Lze tedy hledat

$$y_p = ax^2 e^x,$$

kde a je neznámá. Výpočtem máme

$$y_p' = a(2x + x^2)e^x$$

a

$$y_p'' = a(2 + 4x + x^2)e^x.$$

Dosazením do původní rovnice máme

$$\begin{aligned} & a(2 + 4x + x^2)e^x - 2a(2x + x^2)e^x + ax^2 e^x \\ &= \{x^2(a - 2a + a) + x(4a - 4a) + 2a\}e^x = 2ae^x = e^x. \end{aligned}$$

Z toho plyne

$$2a = 1$$

a $a = \frac{1}{2}$. Partikulární řešení je tedy

$$y_p = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

a obecné řešení původní rovnice je

$$y = \frac{1}{2} x^2 e^x + c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Uveďme si zde ještě jeden důležitý princip, tzv. princip superpozice. Představme si, že máme řešit rovnici $y'' - 3y' + 2y = 2x + e^x$. Pravá strana této rovnice ale není ve tvaru (8.1). Nicméně je součtem dvou funkcí f_1 , f_2 , z nichž každá je ve tvaru (8.1). V takovém případě lze nalézt partikulární řešení ke každé funkci zvlášť a pak je sečíst.

VĚTA 2.15. *Bud' dána rovnice*

$$(8.2) \quad y'' + py' + qy = f(x).$$

Nechť $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Označme $y_{1,p}$ partikulární řešení rovnice

$$y'' + py' + qy = f_1(x)$$

a $y_{2,p}$ partikulární řešení rovnice

$$y'' + py' + qy = f_2(x).$$

Potom $y_p := y_{1,p} + y_{2,p}$ je partikulární řešení rovnice (8.2).

PŘÍKLAD 2.16. *Řešte rovnici*

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + e^x.$$

Řešení. Snadno zjistíme kořeny charakteristické rovnice jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ a

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pravá strana má tvar

$$f(x) = 2x + e^x := f_1(x) + f_2(x).$$

Funkce $f_1(x) = 2x$ má speciální tvar, který dostaneme volbou $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_1(x) = 2x$, $P_2(x) = 0$ v (8.1). Protože číslo $\alpha + i\beta = 0$ není kořenem charakteristické rovnice, je $k = 0$. Lze tedy hledat

$$y_{1,p} = ax + b,$$

kde a , b jsou neznámé. Výpočtem máme

$$y'_p = a$$

a

$$y''_p = 0.$$

Dosazením do rovnice $y'' - 3y' + 2y = 2x$ máme

$$0 - 3a + 2(ax + b) = 2x.$$

Z toho plyne

$$2a = 2, \quad -3a + 2b = 0$$

a $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$. Partikulární řešení $y_{1,p}$ je tedy

$$y_{1,p} = x + \frac{3}{2}.$$

Funkce $f_2(x) = e^x$ má speciální tvar, který dostaneme volbou $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 0$ v (8.1). Protože číslo $\alpha + i\beta = 1$ je kořenem charakteristické rovnice násobnosti 1, je $k = 1$. Lze tedy hledat

$$y_{2,p} = axe^x,$$

kde a je neznámá. Výpočtem máme blabla

$$y'_p = a(x+1)e^x$$

a

$$y''_p = a(x+2)e^x.$$

Dosazením do rovnice $y'' - 3y' + 2y = e^x$ máme

$$a(x+2)e^x - 2a(x+1)e^x + axe^x = -2ae^x = e^x.$$

Z toho plyne

$$-2a = 1$$

a $a = -\frac{1}{2}$. Partikulární řešení $y_{2,p}$ je tedy

$$y_{2,p} = -\frac{1}{2} x e^x.$$

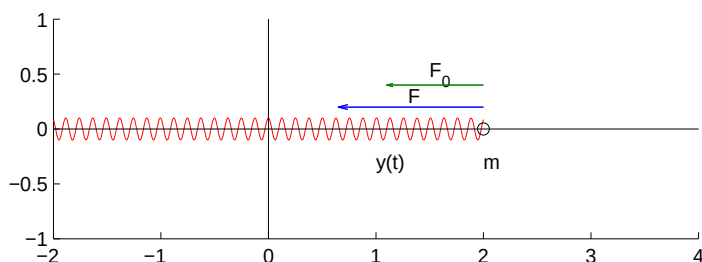
Obecné řešení původní rovnice je

$$y = x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x e^x + c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

ZAJÍMAVÝ PŘÍKLAD 2.17 (Harmonické kmity pod vlivem vnější síly). *Kulička o hmotnosti m je na pružině, která je upevněna na zed. Povytláhneme kuličku o nějakou vzdálenost ze své rovnovážné polohy a cvrnkneme do ní, čímž ji udělíme nějakou počáteční rychlost. Předpokládejme, že tuhost pružiny je k , odpor prostředí zanedbáme a navíc na kuličku působíme periodickou silou $F_0(t) = F_0 \cos \omega_0 t$. Popište pohyb kuličky.*

Řešení. Je zřejmé, že kulička se bude pohybovat v přímce. Zaveďme na ní souřadný systém tak, že rovnovážná poloha je v 0 a kladný směr je doprava. Představme si, že kulička má v čase t polohu $y(t)$ a působí na ni dvě síly, F a F_0 . Viz obrázek 1.



OBRÁZEK 1. Nákres.

Síla F působící na pružinu je úměrná výchylce a tuhosti, tj. $|F| = ky(t)$, ale má opačný směr než $y(t)$, tj. $F = -ky(t)$. Vezmeme-li do úvahy ještě sílu F_0 , dostaneme z Newtonova pohybového zákona máme

$$(8.3) \quad my''(t) = -ky(t) + F_0 \cos \omega_0 t.$$

Označme $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Potom rovnice (8.3) přejde na tvar

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t.$$

Označíme-li ještě $G = \frac{F_0}{m}$ máme

$$(8.4) \quad y''(t) + \omega^2 y(t) = G \cos \omega_0 t.$$

Řešme nejprve rovnici s nulovou pravou stranou.

$$(8.5) \quad y'' + \omega^2 y = 0.$$

Její charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

a obecné řešení rovnice (8.5) je tedy

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Pro zajímavost si najdeme alternativní tvar. Označ $L = c_1^2 + c_2^2$ a $\alpha = \frac{c_1}{L}$, $\beta = \frac{c_2}{L}$. Protože

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

existuje úhel φ tak, že

$$\cos \varphi = \alpha, \quad \sin \varphi = \beta$$

a dosazením máme obecné řešení rovnice (8.5) ve tvaru

$$y_h = L(\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t) = L \cos(\omega t - \varphi), \quad L, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Najdeme partikulární pomocí odhadu.

Případ $\omega \neq \omega_0$.

Protože $i\omega_0$ není kořenem charakteristického polynomu, uhadneme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t.$$

Derivováním máme

$$y_p' = -a\omega_0 \sin \omega_0 t + b\omega_0 \cos \omega_0 t.$$

a

$$y_p'' = -a\omega_0^2 \sin \omega_0 t - b\omega_0^2 \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 y_p.$$

Dosazením do (8.4) dostaneme

$$y_p(-\omega_0^2 + \omega^2) = G \cos \omega_0 t.$$

Tedy

$$y_p = \frac{G \cos \omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

a obecné řešení rovnice (8.4) je

$$y = \frac{G \cos \omega_0 t}{\omega^2 - \omega_0^2} + L \cos(\omega t - \varphi), \quad L, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Všimněme si, že amplituda tohoto pohybu je $\frac{G}{\omega^2 - \omega_0^2}$ je velká pro ω blízká ω_0 , což můžeme interpretovat tak, že i při malé amplitudě vnější síly může být amplituda odezvy velká.

Případ $\omega = \omega_0$.

Protože $i\omega$ je jednonásobným kořenem charakteristického polynomu, uhadneme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = t(a \cos \omega t + b \sin \omega t).$$

Derivováním máme

$$y_p' = a \cos \omega t + b \sin \omega t + t(-a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t).$$

a

$$y_p'' = 2(-a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t) + t(-a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t).$$

Dosazením do (8.4) dostaneme

$$\begin{aligned} G \cos \omega t &= 2(-a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t) + t(-a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t) \\ &+ \omega^2 t(a \cos \omega t + b \sin \omega t) = -2a\omega \sin \omega t + 2b\omega \cos \omega t. \end{aligned}$$

Tedy

$$a = 0, \quad b = \frac{G}{2\omega}$$

a obecné řešení rovnice (8.4) je

$$y = \frac{G}{2\omega} t \sin \omega t + L \cos(\omega t - \varphi), \quad L, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Všimněme si, že amplituda tohoto pohybu je $\frac{G}{2\omega}$ a roste lineárně s časem. Tomuto jevu se říká rezonance. K rezonanci tedy dochází, má-li vnější síla stejnou frekvenci jako oscilátor.

□

Na závěr bychom měli porovnat obě metody, tj. variaci konstant a odhad pomocí pravé strany. Variace konstant nám funguje na každou pravou stranu, to je její výhoda. Nevýhodou ale je její početní náročnost (musíme integrovat). Na druhou stranu odhad není zdaleka tak náročný na výpočet, ale zase funguje jen na dost speciální pravou stranu.

9. Rovnice typu $F(y, y', y'') = 0$.

V mnohých fyzikálních problémech se vyskytuje rovnice typu

$$(9.1) \quad F(y, y', y'') = 0$$

kde se explicitně nevyskytuje nezávisle proměnná x (ve fyzice je to čas t). Tato rovnice se řeší trikem ve dvou krocích.

1) Zavedeme funkci jedné proměnné $p(t)$ vztahem

$$(9.2) \quad y'(x) = p(y(x)).$$

Jelikož y řeší (9.1), můžeme psát

$$F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \text{ pro všechna } x \in I$$

kde I je nějaký interval, na kterém je definováno řešení. Vypočítejme $y''(x)$. Z (9.2) máme

$$y''(x) = p'(y(x))y'(x) = p'(y(x))p(y(x)).$$

Dosazením do (9.1) dostaneme

$$F(y(x), p(y(x)), p'(y(x))p(y(x))) = 0 \text{ pro všechna } x \in I.$$

Předpokládejme, že řešení $y(x)$ není konstantní. To znamená, že obraz intervalu I je interval J , tj. $y(I) = J$. Vezmeme tedy $y = y(x) \in J$ jako nezávisle proměnnou a předchozí rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$F(y, p(y), p'(y)p(y)) = 0 \text{ pro všechna } y \in J.$$

Toto je už rovnice 1. řádu pro funkci $p(y)$, kterou musíme vyřešit. Nechť je její obecné řešení

$$p(y) = G(y, c_1), \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Nyní přistoupíme k druhému kroku.

2) Dosadíme právě vypočítané $p(y)$ do rovnice (9.2) a dostaneme

$$y' = G(y, c_1),$$

což je pro každé pevné c_1 rovnice 1. řádu. Najdeme její obecné řešení

$$y = H(x, c_1, c_2), \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Tedy celkem

$$y = H(x, c_1, c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Prakticky postupujeme takto:

Dána $F(y, y', y'') = 0$. Buď $y' = p(y)$. Pak $y'' = p'(y)y' = p'(y)p(y)$ a máme

$$F(y, p(y), p'(y)p(y)) = 0.$$

Řešením je

$$p(y) = G(y, c_1).$$

Dosadíme a máme

$$y' = G(y, c_1).$$

Řešením je

$$y = H(y, c_1, c_2).$$

PŘÍKLAD 2.18. Řešte rovnici $yy'' = y'^2$.

Řešení. Polož $y' = p(y)$. Pak $y'' = p'(y)p(y)$ a

$$yp'(y)p(y) = p^2(y).$$

1. Necht $p(y) = 0$. Pak $y' = 0$ a

$$(9.3) \quad y = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

jsou řešení.

2. Necht $p(y) \neq 0$. Pak

$$yp'(y) = p(y)$$

a

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow p(y) = c_1 y.$$

Dosadíme a máme

$$y' = c_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = c_1 \Rightarrow \ln |y| = c_1 x + k$$

a tedy

$$|y| = e^k e^{c_1 x} \Rightarrow y = c_2 e^{c_1 x}.$$

Obecné řešení je tedy dáno vzorcem

$$y = c_2 e^{c_1 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Všimněme si, že volba $c_1 = 0$ nám dává (9.3).

□

PŘÍKLAD 2.19. Řešte rovnici $yy'' - y'^2 = 2y^2$.

Řešení. Polož $y' = p(y)$. Pak $y'' = p'(y)p(y)$ a

$$yp'(y)p(y) - p^2(y) = 2y^2.$$

Vynásobme rovnici dvěma, použijme vztah $2p'(y)p(y) = (p^2(y))'$ a dostaneme

$$y(p^2(y))' - 2p^2(y) = 4y^2.$$

Substituuje $q(y) = p^2(y)$ a máme lineární rovnici pro $q(y)$

$$q'(y) - \frac{2}{y}q(y) = 4y.$$

Řešme nejprve

$$q'(y) - \frac{2}{y}q(y) = 0$$

a dostaneme separací

$$\frac{dq}{q} = \frac{2}{y} \Rightarrow \ln |q| = 2 \ln |y| + c = \ln ky^2 \Rightarrow q(y) = ky^2.$$

Proveďme variaci konstanty. Pak

$$k'(y)y^2 = 4y \Rightarrow k'(y) = \frac{4}{y} \Rightarrow k(y) = 4 \ln y$$

a obecné řešení je

$$q(y) = y^2(4 \ln y + k).$$

Tedy

$$p(y) = y\sqrt{4 \ln y + k}.$$

Dosadíme do vztahu $y' = p(y)$ a máme

$$y'(y) = y\sqrt{4 \ln y + k}.$$

Řešme opět separací a máme

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{4 \ln y + k}} = \int dx = x + c.$$

Provedeme substituci $z = \ln y$ v levém integrálu a dostaneme

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{4 \ln y + k}} = \int \frac{dz}{\sqrt{4z + k}} = \frac{1}{2}\sqrt{4z + k} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \ln y + k}$$

a máme

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 \ln y + k} = x + c \Rightarrow \ln y = (x + c)^2 - \frac{k}{4} \Rightarrow y = e^{-\frac{k}{4}} e^{(x+c)^2}.$$

Označíme-li $c_1 = e^{-\frac{k}{4}}$ a $c_2 = c$, dostáváme konečn ve řešení

$$y = c_1 e^{(x+c_2)^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Jiné řešení. Pro zvědavce uvedme jednodušší trikový postup, který funguje pro tuto rovnici, ovšem obecně ne. Rovnici $yy'' - y'^2 = 2y^2$ vydělíme y^2 a dostaneme

$$\frac{y''y - y'^2}{y^2} = 2.$$

Použijeme vzorec $\frac{y''y - y'^2}{y^2} = \left(\frac{y'}{y}\right)'$ a máme

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = 2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x + c \Rightarrow \ln y = x^2 + cx + k = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + k - \frac{c^2}{4}.$$

Z toho dostaneme po označení $c_1 = e^{k - \frac{c^2}{4}}$, $c_2 = \frac{c}{2}$

$$y = c_1 e^{(x+c_2)^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

□

ŽERTOVNÝ PŘÍKLAD 2.20. Řešte rovnici $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Řešení. Samozřejmě je tato rovnice lineární. Její charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

a obecné řešení je

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nicméně je tato rovnice taky typu $F(y, y', y'') = 0$ a lze ji takto řešit. Buď $y' = p(y)$ a následně $y'' = p'(y)p(y)$. Dostaneme

$$p'(y)p(y) - 3p(y) + 2y = 0.$$

(Všimněme si, že jsme z lineární rovnice udělali nelineární, tomu říkám "úspěch".) Upravme ji na tvar

$$p' = \frac{3p - 2y}{p},$$

což je rovnice s homogenní pravou stranou. Položme $p(y) = yq(y)$ a dostaneme $p' = yq' + q$ a po dosazení

$$yq' + q = \frac{3yq - 2y}{yq} = \frac{3q - 2}{q} \Rightarrow yq' = \frac{3q - 2}{q} - q = -\frac{q^2 - 3q + 2}{q}.$$

Separací máme

$$\frac{q dq}{q^2 - 3q + 2} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{q dq}{q^2 - 3q + 2} = \ln y + c.$$

Rozkladem na parciální zlomky vyjde

$$\frac{q}{q^2 - 3q + 2} = \frac{2}{q - 2} - \frac{1}{q - 1}$$

a dále

$$2 \ln |q - 2| - \ln |q - 1| = -\ln |y| + \ln k \Rightarrow \frac{(q - 2)^2}{q - 1} = \frac{k}{y}.$$

Dosadíme $q(y) = \frac{p(y)}{y}$ a dostaneme

$$\frac{(\frac{p}{y} - 2)^2}{\frac{p}{y} - 1} = \frac{k}{y} \Rightarrow \frac{(p - 2y)^2}{p - y} = k.$$

Násobíme $p - y$ a umocníme. Dostaneme

$$p^2 - 4py + 4y^2 = kp - ky \Rightarrow p^2 - p(4y + k) + y(4y + k) = 0.$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici a vyjde

$$p_{1,2}(y) = \frac{1}{2}(4y + k \pm \sqrt{(4y + k)^2 - 4(4y + k)y}) = \frac{1}{2}(4y + k \pm \sqrt{k(4y + k)}).$$

Vyšetřeme jen případ se znaménkem "+", druhý případ je analogický. Dosadíme $p(y)$ do rovnice $y' = p(y)$ a dostaneme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{2}(4y + k \pm \sqrt{k(4y + k)}).$$

Separací máme

$$\frac{dy}{4y + k \pm \sqrt{k(4y + k)}} = \frac{1}{2} dx \Rightarrow \int \frac{dy}{4y + k \pm \sqrt{k(4y + k)}} = \frac{1}{2} x + c.$$

Počítejme

$$\int \frac{dy}{4y+k \pm \sqrt{k(4y+k)}} = \left| \begin{array}{ll} 4y+k = kt^2 & t = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{4y+k} \\ 4dy = 2ktdt & dy = \frac{1}{2}ktdt \end{array} \right|$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}ktdt}{kt^2 + kt} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2} \ln|t+1| = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{4y+k}\right)$$

a je tedy

$$\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{4y+k}\right) = \frac{1}{2}x + c,$$

což dává

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{4y+k}\right) &= x + 2c \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{4y+k} = e^{2c}e^x \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{4y+k}\right)^2 &= (e^{2c}e^x - 1)^2 \Rightarrow \frac{4y+k}{k} = e^{4c}e^{2x} - 2e^{2c}e^x + 1 \\ \Rightarrow 4y &= ke^{4c}e^{2x} - 2ke^{2c}e^x \Rightarrow y = \frac{ke^{4c}}{4}e^{2x} - \frac{ke^{2c}}{2}e^x. \end{aligned}$$

Označíme-li $c_1 = -\frac{ke^{2c}}{2}$ a $c_2 = \frac{ke^{4c}}{4}$, dostaneme nám už známý tvar

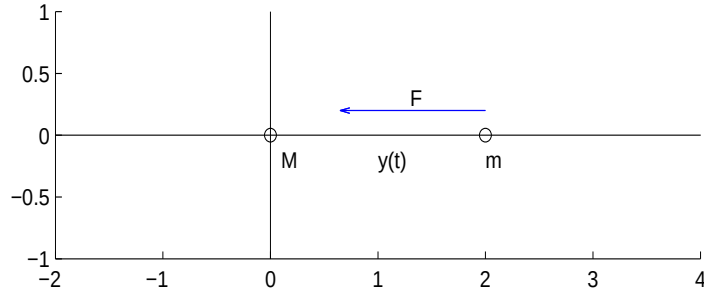
$$y = c_1e^x + c_2e^{2x}.$$

□

Typickým fyzikálním příkladem vedoucím na tento typ rovnice je pohyb tělesa po přímce v nehomogenním gravitačním poli.

ZAJÍMAVÝ PŘÍKLAD 2.21. Máme v počátku umístěné těleso o hmotnosti M a po ose x se pohybuje hmotný bod o hmotnosti m . Najděte diferenciální rovnici jeho pohybu.

Řešení. Označme vzdálenost hmotného bodu od počátku $y(t)$, t je čas a označme F gravitační sílu působící na hmotný bod. Viz obrázek 2. Potom z



OBRÁZEK 2. Nákres.

Newtonova gravitačního zákona plyne, že

$$F = -\kappa \frac{mM}{y^2(t)}$$

a z pohybového zákona máme

$$my''(y) = -\kappa \frac{mM}{y^2(t)}.$$

Vydělíme rovnici m a dostaneme diferenciální rovnici daného pohybu

$$y''(y) = -\kappa \frac{M}{y^2(t)}.$$

Toto je již rovnice typu $F(y, y', y'') = 0$ a lze ji tedy řešit nám již známou metodou.

□

PŘEDNÁŠKA 3

Okrajové úlohy

Z teorie rovnice nosníku máme rovnici

$$(0.1) \quad u'' + \lambda u = g(x)$$

s okrajovými podmínkami

$$(0.2) \quad u(0) = u(l) = 0.$$

Zkoumejme řešitelnost v závislosti na λ a $g(x)$.

1. Prostory $C(a, b)$, $C^2(a, b)$ a skalární součin

DEFINICE 3.1. *Prostor $C(0, 1)$ je definován jako množina všech spojitých funkcí na $[a, b]$.*

DEFINICE 3.2. *Skalární součin na prostoru $C(a, b)$ je definován*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

DEFINICE 3.3. *Prostor $C^2(a, b)$ je definován jako množina všech spojitých funkcí $u(x)$ na $[a, b]$ takových, že existuje $u''(x)$ a tato funkce je opět spojitá na $[a, b]$.*

2. Příklad $\lambda < 0$

PŘÍKLAD 3.4. *Řešme rovnici s okrajovými podmínkami*

$$y'' - 4y = -8x^2, \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice je $\alpha^2 - 4 = 0$. Tedy $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$.

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Najdeme partikulární řešení ve tvaru $y_p = ax^2 + bx + c$. Dosazením máme

$$2a - 4(ax^2 + bx + c) = x^2, \Rightarrow -4ax^2 - 4bx + 2a - 4c = -8x^2,$$

z čehož $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$ a $y_p = 2x^2 + 1$. Obecné řešení dané rovnice (bez okrajových podmínek) je tedy

$$y(x) = 2x^2 + 1 + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Nyní navolíme c_1 a c_2 tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Zřejmě

$$y(0) = 0 = 1 + c_1 + c_2, \quad y(3) = 0 = 2 \cdot 3^2 + 1 + c_1 e^{2 \cdot 3} + c_2 e^{-2 \cdot 3}$$

a máme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -1, \\ e^6 c_1 + e^{-6} c_2 &= -19. \end{aligned}$$

pro neznámé c_1, c_2 . Jejím řešením je

$$c_1 = \frac{e^{-6} + 19}{e^{-6} - e^6}, \quad c_2 = \frac{-e^6 - 19}{e^{-6} - e^6}$$

a celkem je

$$y = 2x^2 + 1 + \frac{e^{-6} + 19}{e^{-6} - e^6} e^{2x} + \frac{-e^6 - 19}{e^{-6} - e^6} e^{-2x}.$$

□

Poznamenejme, že řešení v předchozím příkladu existuje a je určeno jednoznačně. Zkoumejme nyní obecný tvar pro $\lambda < 0$.

VĚTA 3.5. *Buď $g \in C(0, l)$ a $\lambda < 0$. Potom existuje jediné řešení problému (0.1) a (0.2).*

Důkaz. Protože $\lambda < 0$ existuje $\omega > 0$ tak, že $\lambda = -\omega^2$. Přepíšme si rovnici (0.1) do tvaru

$$y'' - \omega^2 y = g(x).$$

Řešme ji. Máme $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ a tedy

$$y_h = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}.$$

Provedme variaci konstant. Dostaneme

$$y_p = c_1(x) e^{\omega x} + c_2(x) e^{-\omega x}$$

a příslušné rovnice jsou

$$\begin{aligned} c_1'(x) e^{\omega x} + c_2'(x) e^{-\omega x} &= 0; \\ \omega c_1'(x) e^{\omega x} - \omega c_2'(x) e^{-\omega x} &= g(x). \end{aligned}$$

Dále

$$c_1'(x) = \frac{1}{2\omega} g(x) e^{-\omega x}, \quad c_2'(x) = -\frac{1}{2\omega} g(x) e^{\omega x}.$$

Tedy

$$c_1(x) = \int_0^x \frac{1}{2\omega} g(t) e^{-\omega t} dt, \quad c_2(x) = -\int_0^x \frac{1}{2\omega} g(t) e^{\omega t} dt.$$

V tomto momentě je důležité, že $g \in C^1(0, l)$, protože lze $c_1(x)$ a $c_2(x)$ dvakrát derivovat. Celkově máme

$$(2.1) \quad y(x) = e^{\omega x} \left(c_1 + \int_0^x \frac{1}{2\omega} g(t) e^{-\omega t} dt \right) + e^{-\omega x} \left(c_2 - \int_0^l \frac{1}{2\omega} g(t) e^{\omega t} dt \right).$$

Jak to nyní dopadne s okrajovými podmínkami? Dosadíme a máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y(0) &= e^{\omega \cdot 0} \left(c_1 + \int_0^0 \frac{1}{2\omega} g(t) e^{-\omega t} dt \right) + e^{-\omega \cdot 0} \left(c_2 - \int_0^0 \frac{1}{2\omega} g(t) e^{\omega t} dt \right) = 0, \\ y(l) &= e^{\omega l} \left(c_1 + \int_0^l \frac{1}{2\omega} g(t) e^{-\omega t} dt \right) + e^{-\omega l} \left(c_2 - \int_0^l \frac{1}{2\omega} g(t) e^{\omega t} dt \right) = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě je

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$e^{\omega l} c_1 + e^{-\omega l} c_2 = -e^{\omega l} \int_0^l \frac{1}{2\omega} g(t) e^{-\omega t} dt + e^{-\omega l} \int_0^l \frac{1}{2\omega} g(t) e^{\omega t} dt.$$

Determinant soustavy je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega l} & e^{-\omega l} \end{vmatrix} = e^{-\omega l} - e^{\omega l}.$$

Protože $e^{-\omega l} - e^{\omega l} \neq 0$, má soustava vždy právě jedno řešení.

□

3. Příklad $\lambda = 0$

PŘÍKLAD 3.6. *Řešme rovnici s okrajovými podmínkami*

$$y'' = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice je $\alpha^2 = 0$. Tedy $\alpha_{1,2} = 0$.

$$y_h = c_1 + c_2 x.$$

Najdeme partikulární řešení ve tvaru $y_p = ax^2$. Dosazením máme

$$2a = 2,$$

z čehož $a = 1$. Obecné řešení dané rovnice (bez okrajových podmínek) je tedy

$$y(x) = x^2 + c_1 + c_2 x.$$

Nyní navolíme c_1 a c_2 tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Zřejmě

$$y(0) = 0 = c_1, \quad y(3) = 0 = 9 + c_1 + 3c_2$$

a máme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 + 3c_2 &= -9 \end{aligned}$$

pro neznámé c_1, c_2 . Jejím řešením je

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -3$$

a celkem je

$$y = x^2 - 3x.$$

□

Poznamenejme, že řešení v předchozím příkladu existuje a je určeno jednoznačně. Zkoumejme nyní obecný tvar pro $\lambda = 0$.

VĚTA 3.7. *Buď $g \in C^1(0, l)$ a $\lambda = 0$. Potom existuje jediné řešení problému (0.1) a (0.2).*

Důkaz. Přepíšme si rovnici (0.1) do tvaru

$$y'' = g(x).$$

Řešme ji. Máme $\alpha^2 = 0$ a tedy

$$y_h = c_1 + c_2 x.$$

Proveďme variaci konstant. Dostaneme

$$y_p = c_1(x) + c_2(x) x$$

a příslušné rovnice jsou

$$\begin{aligned} c_1'(x) + c_2'(x) x &= 0; \\ c_2'(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Dále

$$c_1'(x) = -xg(x), \quad c_2'(x) = g(x).$$

Tedy

$$c_1(x) = -\int_0^x tg(t)dt, \quad c_2(x) = \int_0^x g(t)dt$$

a celkově máme

$$(3.1) \quad y(x) = c_1 - \int_0^x tg(t)dt + x\left(c_2 + \int_0^x g(t)dt\right).$$

Jak to nyní dopadne s okrajovými podmínkami? Dosadíme a máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0, \\ y(l) &= c_1 - \int_0^l tg(t)dt + l\left(c_2 + \int_0^l g(t)dt\right) = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě je

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 + lc_2 &= \int_0^l tg(t)dt - l \int_0^l g(t)dt. \end{aligned}$$

Determinant soustavy je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{vmatrix} = l.$$

Protože $l \neq 0$, má soustava vždy právě jedno řešení.

□

4. Příklad $\lambda > 0$

Zkoumejme problém (0.1) a (0.2) pro $\lambda > 0$. Nechť $\lambda = \omega^2 > 0$ a řešme nejprve

$$(4.1) \quad y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0.$$

Charakteristická rovnice je $\alpha^2 + \omega^2 = 0$ a tedy $\alpha_{1,2} = \pm i\omega$. Fundamentální systém je $\cos \omega x$, $\sin \omega x$ a obecné řešení je

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x.$$

počítejme nyní c_1 a c_2 z okrajových podmínek. Dosadíme $x = 0$ a máme $0 = c_1$. Tedy

$$y(x) = c_2 \sin \omega x.$$

Dosadíme $x = l$ a dostaneme

$$0 = y(l) = c_2 \sin \omega l.$$

Nechť $\sin \omega l = 0$

Je-li $\sin \omega l = 0$, je $\omega l = k\pi$ pro nějaké přirozené k . Tedy

$$\lambda = \omega^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2.$$

V takovém případě je ovšem řešením libovolná funkce

$$y(x) = c \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Daný problém (4.1) má tedy nekonečně mnoho řešení.

Nechť $\sin \omega l \neq 0$

Je-li $\sin \omega l \neq 0$, je $\omega l \notin \{k\pi, k \in \mathbb{N}\}$. Tedy

$$\lambda \neq \omega^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2.$$

V takovém případě je ovšem řešením jediná funkce

$$y(x) = 0.$$

Daný problém (4.1) má tedy jediné řešení.

DEFINICE 3.8. Čísla $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ se nazývají vlastní čísla problému (4.1) a funkce $y_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$ se nazývají vlastní funkce problému (4.1).

Platí následující věta.

VĚTA 3.9. Nechť $\lambda \notin \left\{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k \in \mathbb{N}\right\}$. Pak existuje právě jedno řešení problému (4.1) a to je nulová funkce.

Nechť $\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak existuje nekonečně mnoho řešení problému (4.1), množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří vektorový prostor a

$$\mathcal{P} = \left\{c \sin \frac{k\pi x}{l}, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

Zkoumejme nyní nehomogenní problém, tj. pro danou funkci g nalézt řešení okrajového problému (0.1) a (0.2). Platí následující klíčová věta.

VĚTA 3.10. Buď $g \in C(0, l)$.

(i) Nechť $\lambda \notin \left\{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, k \in \mathbb{N}\right\}$. Pak existuje právě jedno řešení problému (0.1) a (0.2).

(ii) Nechť $\lambda = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Pak

1. Pokud

$$\int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \neq 0,$$

neexistuje žádné řešení.

2. Pokud

$$\int_0^l g(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0,$$

existuje nekonečně mnoho řešení problému (0.1) a (0.2), množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří afinní (posunutý vektorový) prostor a

$$\mathcal{P} = \left\{y_0(x) + c \sin \frac{k\pi x}{l}, c \in \mathbb{R}\right\},$$

kde $y_0(x)$ je libovolné řešení problému (0.1) a (0.2).

Důkaz. Najdeme nejprve obecné řešení problému (0.1). Už víme, že

$$y_h = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x.$$

Provedme variaci konstant a dostaneme

$$y_p = c_1(x) \cos \omega x + c_2(x) \sin \omega x.$$

a příslušné rovnice jsou

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cos \omega x + c_2'(x) \sin \omega x &= 0; \\ -c_1'(x) \sin \omega x + c_2'(x) \cos \omega x &= g(x). \end{aligned}$$

Dále

$$c_1'(x) = -g(x) \sin \omega x, \quad c_2'(x) = g(x) \cos \omega x.$$

Tedy

$$c_1(x) = -\int_0^x g(t) \sin \omega t dt, \quad c_2(x) = \int_0^x g(t) \cos \omega t dt$$

a celkově máme

$$(4.2) \quad y(x) = \left(c_1 - \int_0^x g(t) \sin \omega t dt \right) \cos \omega x + \left(c_2 + \int_0^x g(t) \cos \omega t dt \right) \sin \omega x.$$

Jak to nyní dopadne s okrajovými podmínkami? Dosadíme a máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0, \\ y(l) &= \left(c_1 - \int_0^l g(t) \sin \omega t dt \right) \cos \omega l + \left(c_2 + \int_0^l g(t) \cos \omega t dt \right) \sin \omega l = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě je

$$(4.3) \quad c_1 = 0, \\ c_1 \cos \omega l + c_2 \sin \omega l = \cos \omega l \int_0^l g(t) \sin \omega t dt - \sin \omega l \int_0^l g(t) \cos \omega t dt.$$

Determinant soustavy je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \omega l & \sin \omega l \end{vmatrix} = \sin \omega l.$$

Uvažujme případ (i), tj. $\lambda \notin \left\{ \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, k \in \mathbb{N} \right\}$. Pak $\sin \omega l \neq 0$ a soustava má vždy právě jedno řešení.

Uvažujme nyní případ (ii), tj. $\lambda \in \left\{ \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, k \in \mathbb{N} \right\}$. Nechť existuje řešení $y(x)$ problému (0.1) a (0.2) s vlastním číslem $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2$. Pak platí

$$y''(x) + \lambda_k y(x) = g(x), \quad u(0) = u(l) = 0$$

v každém bodě $x \in (0, l)$. Násobíme tuto rovnost vlastní funkcí $y_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$, integrujeme od 0 do l a dostaneme

$$\int_0^l (y''(x) + \lambda_k y(x)) y_k(x) dx = \int_0^l g(x) y_k(x) dx.$$

Užitím per partes (a vlastností $y(0) = y(l) = 0$, $y_k(0) = y_k(l) = 0$) máme

$$\begin{aligned} \int_0^l y''(x) y_k(x) dx &= [y'(x) y_k(x)]_0^l - \int_0^l y'(x) y_k'(x) dx \\ &= - \int_0^l y'(x) y_k'(x) dx = -[y(x) y_k'(x)]_0^l + \int_0^l y(x) y_k''(x) dx \\ &= \int_0^l y(x) y_k''(x) dx \end{aligned}$$

a dosazením máme

$$\begin{aligned} \int_0^l (y''(x) + \lambda_k y(x)) y_k(x) dx &= \int_0^l y''(x) y_k(x) dx + \lambda_k \int_0^l y(x) y_k(x) dx \\ &= \int_0^l y(x) y_k''(x) dx + \lambda_k \int_0^l y(x) y_k(x) dx = \int_0^l y(x) (y_k''(x) + \lambda_k y_k(x)) dx, \end{aligned}$$

tedy

$$\int_0^l y(x) (y_k''(x) + \lambda_k y_k(x)) dx = \int_0^l g(x) y_k(x) dx.$$

Nyní využijeme té vlastnosti, že vlastní funkce $y_k(x)$ řeší problém (4.1) pro $\lambda = \lambda_k$ a tedy je

$$y_k''(x) + \lambda_k y_k(x) = 0$$

což dává

$$\int_0^l g(x) y_k(x) dx = 0.$$

Pokud má tedy úloha (0.1) a (0.2) řešení, je $\int_0^l g(x) y_k(x) dx = 0$, čili skalární součin funkcí $g(x)$ a $y_k(x)$ je nula. Tím jsme ukázali, že pokud tento skalární součin není nula, pak úloha nemá řešení, což je první část tvrzení (ii).

Abychom ukázali druhou část tvrzení (ii), předpokládejme, že $\int_0^l g(x) y_k(x) dx = \int_0^l g(x) \sin \omega x dx = 0$, kde $\omega = \frac{k\pi}{l}$. Vraťme se k soustavě (4.3). Napišme ji do maticového tvaru

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \cos \omega l & \sin \omega l & \cos \omega l \int_0^l g(t) \sin \omega t dt - \sin \omega l \int_0^l g(t) \cos \omega t dt \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ \cos k\pi & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Řešení této soustavy je tedy $c_1 = 0$ a c_2 zcela libovolné. Úloha (0.1) a (0.2) má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$y(x) = -\cos \frac{k\pi x}{l} \int_0^x g(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt + \sin \frac{k\pi x}{l} \left(c_2 + \int_0^x g(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \right).$$

Označíme-li

$$y_0(x) = -\cos \frac{k\pi x}{l} \int_0^x g(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt + \sin \frac{k\pi x}{l} \int_0^x g(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt$$

dostane naše řešení tvar

$$y(x) = y_0(x) + c_2 \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

□

PŘÍKLAD 3.11. *Řešme rovnici s okrajovými podmínkami*

$$y'' + \frac{3}{4}y = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice je $\alpha^2 + \frac{3}{4} = 0$. Tedy $\alpha_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ a

$$y_h = c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Najdeme partikulární řešení ve tvaru $y_p = ax + b$. Dosazením máme

$$\frac{3}{4}(ax + b) = 2x,$$

z čehož $a = \frac{8}{3}$, $b = 0$ a $y_p = \frac{8}{3}x$. Obecné řešení dané rovnice (bez okrajových podmínek) je tedy

$$y(x) = \frac{8}{3}x + c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Nyní navolíme c_1 a c_2 tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Zřejmě

$$y(0) = 0 = c_1, \quad y(\pi) = 0 = \frac{8}{3}\pi + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

a máme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\pi &= -\frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

pro neznámé c_1 , c_2 . Jejím řešením je

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{\frac{8}{3}\pi}{\sin \frac{\sqrt{3}}{2}\pi}$$

a celkem je tedy jediné řešení

$$y(x) = \frac{8}{3}x - \frac{\frac{8}{3}\pi}{\sin \frac{\sqrt{3}}{2}\pi} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

To souhlasí s faktem, že $\frac{3}{4} \notin \{(\frac{k\pi}{l})^2; k \in \mathbb{N}\} = \{k; k \in \mathbb{N}\}$

□

PŘÍKLAD 3.12. *Řešme rovnici s okrajovými podmínkami*

$$y'' + 4y = (x - a)^2, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

vzhledem k parametru a .

Řešení. Charakteristická rovnice je $\alpha^2 + 4 = 0$. Tedy $\alpha_{1,2} = \pm 2i$ a

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Najdeme partikulární řešení ve tvaru $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Dosazením máme

$$2A + Ax^2 + Bx + C = (x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2,$$

z čehož $A = 1$, $B = -2a$, $2A + C = a^2$ a $y_p = x^2 - 2ax + a^2 - 2 = (x - a)^2 - 2$. Obecné řešení dané rovnice (bez okrajových podmínek) je tedy

$$y(x) = (x - a)^2 - 2 + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Nyní navolíme c_1 a c_2 tak, aby byly splněny počáteční podmínky. Zřejmě

$$y(0) = 0 = a^2 - 2 + c_1, \quad y(\pi) = 0 = (\pi - a)^2 - 2 + c_1$$

a máme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 - a^2, \\ c_1 &= 2 - (\pi - a)^2 \end{aligned}$$

pro neznámé c_1, c_2 . Tato soustava je singulární a má řešení pouze v případě $2 - a^2 = 2 - (\pi - a)^2$. To nastává jedině pro $a = \frac{\pi}{2}$.

Je-li $a \neq \frac{\pi}{2}$ pak úloha nemá v řešení. To je v souladu s prvním případem v (ii), neboť

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x - a)^2 \sin 2x dx &= \left[-(x - a)^2 \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^\pi + 2 \int_0^\pi (x - a) \frac{\cos 2x}{2} dx \\ &= -(\pi - a)^2 + a^2 + \frac{1}{2} [(x - a) \sin 2x]_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx \\ &= -(\pi - a)^2 + a^2 \end{aligned}$$

a pro $a \neq \frac{\pi}{2}$ je tedy $\int_0^\pi (x - a)^2 \sin 2x dx \neq 0$. To znamená, že pravá strana není ortogonální na vlastní funkci $\sin 2x$ a úloha tedy skutečně nemá řešení.

Je-li $a = \frac{\pi}{2}$ pak úloha má nekonečně mnoho v řešení. To je v souladu s druhým případem v (ii), neboť

$$\int_0^\pi (x - \pi/2)^2 \sin 2x dx = (\text{viz předchozí výpočet}) = 0.$$

To znamená, že pravá strana je ortogonální na vlastní funkci $\sin 2x$ a úloha tedy skutečně má nekonečně mnoho řešení a všechna řešení jsou

$$y(x) = (x - \pi/2)^2 - 2 + 2 - (\pi/2)^2 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

□

Okrajové problémy s jinými okrajovými podmínkami

Zabývejme se nyní problémem nosníku na jedné straně vetknutého, což popisují následující vztahy:

$$(0.1) \quad y'' + \lambda y = g(x),$$

$$(0.2) \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

1. Příklad $\lambda < 0$

PŘÍKLAD 4.1. Řešme rovnici s okrajovými podmínkami

$$y'' - y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice je $\alpha^2 - 1 = 0$. Tedy $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$.

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Najdeme partikulární řešení ve tvaru $y_p = ax + b$. Dosazením máme

$$-(ax + b) = x, \Rightarrow -ax - b = x,$$

z čehož $a = -1$, $b = 0$ a $y_p = -x$. Obecné řešení dané rovnice (bez okrajových podmínek) je tedy

$$y(x) = -x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Ještě spočteme

$$y'(x) = -1 + c_1 e^x - c_2 e^{-x}.$$

Nyní navolíme c_1 a c_2 tak, aby byly splněny okrajové podmínky. Zřejmě

$$y(0) = 0 = c_1 + c_2, \quad y'(1) = 0 = -1 + e c_1 - e^{-1} c_2.$$

a máme soustavu dvou rovnic

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$e c_1 - e^{-1} c_2 = 1.$$

pro neznámé c_1 , c_2 . Jejím řešením je

$$c_1 = \frac{e}{e - e^{-1}}, \quad c_2 = -\frac{e}{e - e^{-1}}$$

a celkem je

$$y = -x + 1 + \frac{e}{e - e^{-1}} e^{2x} - \frac{e}{e - e^{-1}} e^{-2x}.$$

□

Poznamenejme, že řešení v předchozím příkladu existuje a je určeno jednoznačně. Zkoumejme nyní obecný tvar pro $\lambda < 0$.

VĚTA 4.2. *Bud' $g \in C(0, l)$ a $\lambda < 0$. Potom existuje jediné řešení problému (0.1) a (0.2).*

Důkaz. Protože $\lambda < 0$ existuje $\omega > 0$ tak, že $\lambda = -\omega^2$. Přepíšme si rovnici (0.1) do tvaru

$$y'' - \omega^2 y = g(x).$$

Jejím řešením je podle (2.1)

$$y(x) = e^{\omega x} \left(c_1 + \int_0^x \frac{1}{2\omega} g(t) e^{-\omega t} dt \right) + e^{-\omega x} \left(c_2 - \int_0^x \frac{1}{2\omega} g(t) e^{\omega t} dt \right).$$

Snadno můžeme spočítat, že

$$y'(x) = e^{\omega x} \left(c_1 + \frac{1}{2} \int_0^x g(t) e^{-\omega t} dt \right) - e^{-\omega x} \left(c_2 - \frac{1}{2} \int_0^x g(t) e^{\omega t} dt \right).$$

Jak to nyní dopadne s okrajovými podmínkami? Dosadíme a máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y(0) &= e^{\omega \cdot 0} \left(c_1 + \int_0^0 \frac{1}{2\omega} g(t) e^{-\omega t} dt \right) + e^{-\omega \cdot 0} \left(c_2 - \int_0^0 \frac{1}{2\omega} g(t) e^{\omega t} dt \right) = 0, \\ y'(l) &= e^{\omega l} \left(c_1 + \frac{1}{2} \int_0^l g(t) e^{-\omega t} dt \right) - e^{-\omega l} \left(c_2 - \frac{1}{2} \int_0^l g(t) e^{\omega t} dt \right) = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě je

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$e^{\omega l} c_1 - e^{-\omega l} c_2 = -\frac{1}{2} e^{\omega l} \int_0^l g(t) e^{-\omega t} dt + \frac{1}{2} e^{-\omega l} \int_0^l g(t) e^{\omega t} dt.$$

Determinant soustavy je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega l} & -e^{-\omega l} \end{vmatrix} = -e^{-\omega l} - e^{\omega l}.$$

Protože $-e^{-\omega l} - e^{\omega l} \neq 0$, má soustava vždy právě jedno řešení.

□

2. Příklad $\lambda = 0$

PŘÍKLAD 4.3. *Řešme rovnici s okrajovými podmínkami*

$$y'' = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Řešení. Obecné řešení dané rovnice (bez okrajových podmínek) je

$$y(x) = x^2 + c_1 x + c_2.$$

Ještě

$$y'(x) = 2x + c_1.$$

Nyní navolíme c_1 a c_2 tak, aby byly splněny okrajové podmínky. Zřejmě

$$y(0) = 0 = c_2, \quad y'(1) = 0 = 2 + c_1$$

a máme

$$\begin{aligned} c_1 &= -2, \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

a celkem je

$$y = x^2 - 2x.$$

□

Poznamenejme, že řešení v předchozím příkladu existuje a je určeno jednoznačně. Zkoumejme nyní obecný tvar pro $\lambda = 0$.

VĚTA 4.4. *Buď $g \in C(0, l)$ a $\lambda = 0$. Potom existuje jediné řešení problému (0.1) a (0.2).*

Důkaz. Přepišme si rovnici (0.1) do tvaru

$$y'' = g(x).$$

Podle (3.1)

$$y(x) = c_1 - \int_0^x tg(t)dt + x\left(c_2 + \int_0^x g(t)dt\right).$$

Vypočtěme

$$y'(x) = c_2 + \int_0^x g(t)dt.$$

Jak to nyní dopadne s okrajovými podmínkami? Dosadíme a máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0, \\ y'(l) &= c_2 + \int_0^l g(t)dt = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě je

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 &= - \int_0^l g(t)dt. \end{aligned}$$

Determinant soustavy je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Protože $l \neq 0$, má soustava vždy právě jedno řešení

$$y(x) = - \int_0^x tg(t)dt + x\left(- \int_0^l g(t)dt\right).$$

□

3. Případ $\lambda > 0$

Zkoumejme problém (0.1) a (0.2) pro $\lambda > 0$. Nechť $\lambda = \omega^2 > 0$ a řešme nejprve

$$(3.1) \quad y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0.$$

Snadno najdeme, že obecné řešení je

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x.$$

a

$$y'(x) = -\omega c_1 \sin \omega x + \omega c_2 \cos \omega x$$

počítejme nyní c_1 a c_2 z okrajových podmínek. Dosadíme $x = 0$ a máme $0 = c_1$. Tedy

$$y(x) = c_2 \sin \omega x, \quad y'(x) = \omega c_2 \cos \omega x.$$

Dosadíme $x = l$ a dostaneme

$$0 = y'(l) = \omega c_2 \cos \omega l.$$

Nechť $\cos \omega l = 0$

Je-li $\cos \omega l = 0$, je $\omega l = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$. Tedy

$$\lambda = \omega^2 = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} \right)^2.$$

V takovém případě je ovšem řešením libovolná funkce

$$y(x) = c \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Daný problém (3.1) má tedy nekonečně mnoho řešení.

Nechť $\cos \omega l \neq 0$

Je-li $\cos \omega l \neq 0$, je $\omega l \notin \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Tedy

$$\lambda = \omega^2 \neq \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} \right)^2.$$

V takovém případě je ovšem řešením jediná funkce

$$y(x) = 0.$$

Daný problém (4.1) má tedy jediné řešení.

DEFINICE 4.5. Čísla $\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} \right)^2$ se nazývají vlastní čísla problému (3.1) a funkce $y_k(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x$ se nazývají vlastní funkce problému (3.1).

Platí následující věta.

VĚTA 4.6. Nechť $\lambda \notin \left\{ \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} \right)^2, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Pak existuje právě jedno řešení problému (3.1) a to je nulová funkce.

Nechť $\lambda = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} \right)^2$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$. Pak existuje nekonečně mnoho řešení problému (3.1), množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří vektorový prostor a

$$\mathcal{P} = \left\{ c \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x; c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zkoumejme nyní nehomogenní problém, tj. pro danou funkci g nalézt řešení okrajového problému (3.1). Platí následující klíčová věta.

VĚTA 4.7. Buď $g \in C(0, l)$.

(i) Nechť $\lambda \notin \left\{ \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} \right)^2; k \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Pak existuje právě jedno řešení problému (3.1).

(ii) Nechť $\lambda = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} \right)^2$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$. Pak

1. Pokud

$$\int_0^l g(x) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx \neq 0,$$

neexistuje žádné řešení.

2. Pokud

$$\int_0^l g(x) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x dx = 0,$$

existuje nekonečně mnoho řešení problému (3.1), množina $\mathcal{P}$ všech řešení tvoří afinní (posunutý vektorový) prostor a

$$\mathcal{P} = \{y_0(x) + c \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x; c \in \mathbb{R}\},$$

kde $y_0(x)$ je libovolné řešení problému (3.1).

Důkaz. Najděme nejprve obecné řešení problému (3.1) bez okrajových podmínek. Už víme díky (4.2), že

$$y(x) = \left(c_1 - \int_0^x g(t) \sin \omega t dt\right) \cos \omega x + \left(c_2 + \int_0^x g(t) \cos \omega t dt\right) \sin \omega x.$$

Není těžké vypočítat

$$y'(x) = -\omega \left(c_1 - \int_0^x g(t) \sin \omega t dt\right) \sin \omega x + \omega \left(c_2 + \int_0^x g(t) \cos \omega t dt\right) \cos \omega x.$$

Jak to nyní dopadne s okrajovými podmínkami? Dosadíme a máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 0, \\ y'(l) &= -\omega \left(c_1 - \int_0^l g(t) \sin \omega t dt\right) \sin \omega l + \omega \left(c_2 + \int_0^l g(t) \cos \omega t dt\right) \cos \omega l = 0. \end{aligned}$$

Po úpravě je

$$(3.2) \quad \begin{aligned} c_1 &= 0, \\ -c_1 \sin \omega l + c_2 \cos \omega l &= -\sin \omega l \int_0^l g(t) \cos \omega t dt - \cos \omega l \int_0^l g(t) \sin \omega t dt. \end{aligned}$$

Determinant soustavy je

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\sin \omega l & \cos \omega l \end{vmatrix} = \cos \omega l.$$

Uvažujme případ (i), tj. $\lambda \notin \left\{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2; k \in \mathbb{N}_0\right\}$. Pak $\cos \omega l \neq 0$ a soustava má vždy právě jedno řešení.

Uvažujme nyní případ (ii), tj. $\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l}\right)^2$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$.

Soustava (3.2) má tvar (uvědomme si, že $\sin \omega l \neq 0$)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -\sin \omega l & \cos \omega l & -\sin \omega l \int_0^l g(t) \cos \omega t dt - \cos \omega l \int_0^l g(t) \sin \omega t dt \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\int_0^l g(t) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} t dt \end{array} \right).$$

Případ (ii)₁ V tomto případě je $\int_0^l g(t) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} t dt \neq 0$ a problém (0.1) a (0.2) nemá žádné řešení.

Případ (ii)₂ V tomto případě je $\int_0^l g(t) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} t dt = 0$ a soustava má tvar

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Problém (0.1) a (0.2) má nekonečně mnoho řešení tvaru

$$y(x) = \left(- \int_0^x g(t) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} t dt \right) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x \\ + \left(c_2 + \int_0^x g(t) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} t dt \right) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x.$$

Označíme-li

$$y_0(x) = - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x \int_0^x g(t) \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} t dt \\ + \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x \int_0^x g(t) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} t dt$$

dostane naše řešení tvar

$$y(x) = y_0(x) + c_2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x.$$

□

PŘÍKLAD 4.8. *Řešme rovnici s okrajovými podmínkami*

$$y'' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice je $\alpha^2 + 1 = 0$. Tedy $\alpha_{1,2} = \pm i$ a

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Najdeme partikulární řešení ve tvaru $y_p = ax + b$. Snadno máme

$$y_p = x,$$

z čehož

$$y(x) = x + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Dále

$$y'(x) = 1 - c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Nyní navolíme c_1 a c_2 tak, aby byly splněny okrajové podmínky. Zřejmě

$$y(0) = 0 = c_1, \quad y(\pi) = 0 = 1 - c_2$$

a máme

$$c_1 = 0, \\ c_2 = 1$$

a celkem je tedy jediné řešení

$$y(x) = x - \cos x.$$

To souhlasí s faktem, že $1 \notin \left\{ \left(\frac{(2k+1)\pi}{2l} \right)^2; k \in \mathbb{N}_0 \right\} = \left\{ \left(\frac{(2k+1)}{2} \right)^2; k \in \mathbb{N}_0 \right\}$

□

PŘÍKLAD 4.9. *Řešme rovnici s okrajovými podmínkami*

$$y'' + \frac{9}{4}y = x + a, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$$

vzhledem k parametru a .

Řešení. Charakteristická rovnice je $\alpha^2 + \frac{9}{4} = 0$. Tedy $\alpha_{1,2} = \pm \frac{3}{2}i$ a

$$y_h = c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x.$$

Najdeme partikulární řešení ve tvaru $y_p = Ax + B$. Dosazením máme

$$\frac{9}{4}(Ax + B) = x + a,$$

z čehož $y_p = \frac{4}{9}(x + a)$. Obecné řešení dané rovnice (bez okrajových podmínek) je tedy

$$y(x) = \frac{4}{9}(x + a) + c_1 \cos \frac{3}{2}x + c_2 \sin \frac{3}{2}x.$$

Dále

$$y'(x) = \frac{4}{9} - \frac{3}{2}c_1 \sin \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}c_2 \cos \frac{3}{2}x.$$

Nyní navolíme c_1 a c_2 tak, aby byly splněny okrajové podmínky. Zřejmě

$$y(0) = 0 = \frac{4}{9}a + c_1, \quad y'(\pi) = 0 = \frac{4}{9} + \frac{3}{2}c_1$$

a máme soustavu dvou rovnic

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{9}a \\ -1 & 0 & -\frac{8}{27} \end{array} \right)$$

pro neznámé c_1, c_2 .

Tato soustava je singulární a má řešení pouze v případě $-\frac{4}{9}a = -\frac{8}{27}$. To nastává jediné pro $a = \frac{2}{3}$.

Je-li $a \neq \frac{2}{3}$ pak úloha nemá v řešení. To je v souladu s prvním případem v (ii) z věty 4.7, neboť

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x + a) \sin \frac{3}{2}x dx &= \left[-\frac{2}{3}(x + a) \cos \frac{3}{2}x \right]_0^\pi + \frac{2}{3} \int_0^\pi \cos \frac{3}{2}x dx \\ &= \frac{2}{3}a + \frac{4}{9} \left[\sin \frac{3}{2}x \right]_0^\pi = \frac{2}{3}a - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

a pro $a \neq \frac{2}{3}$ je tedy $\int_0^\pi (x + a) \sin \frac{3}{2}x dx \neq 0$. To znamená, že pravá strana není ortogonální na vlastní funkci $\sin \frac{3}{2}x$ a úloha tedy skutečně nemá řešení.

Je-li $a = \frac{2}{3}$ pak úloha má nekonečně mnoho v řešení. To je v souladu s druhým případem v (ii) z věty 4.7, neboť

$$\int_0^\pi \left(x + \frac{2}{3}\right) \sin \frac{3}{2}x dx = (\text{viz předchozí výpočet}) = 0.$$

To znamená, že pravá strana je ortogonální na vlastní funkci $\sin \frac{3}{2}x$ a úloha tedy skutečně má nekonečně mnoho řešení a všechna řešení jsou

$$y(x) = \frac{4}{9}\left(x + \frac{2}{3}\right) + c_2 \sin \frac{3}{2}x.$$

□

4. Úvod do operátorů.

Seznámili jsme se se dvěma úlohami

$$(4.1) \quad u'' + \lambda u = f, \quad u(0) = u(l) = 0,$$

$$(4.2) \quad u'' + \lambda u = f, \quad u(0) = u'(l) = 0.$$

Píšeme-li $Au = -u''$ a položíme-li $f \equiv 0$ v (4.1), lze úlohu přepsat $Au = \lambda u$, kde u hledáme tak, že $u(0) = u(l) = 0$ a $u \in \mathcal{C}^2[0, l]$. Definujme

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in \mathcal{C}^2[0, l]; u(0) = u(l) = 0\}.$$

Úloha (4.1) tedy pomocí A a $\mathcal{D}(A)$ vypadá takto:

Hledáme funkci $u \in \mathcal{D}(A)$ takovou, že

$$Au = \lambda u.$$

Připomeňme skalární součin a normu na prostoru $\mathcal{C}[a, b]$:

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx, \quad \|u\| = \left(\int_a^b u^2(x)dx \right)^{1/2}.$$

Povšimněme si, že A je vlastně zobrazení $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{C}[0, l]$. Základní vlastnosti A jsou

$$(4.3) \quad (Au, v) = (u, Av) \quad \text{pro každé } u, v \in \mathcal{D}(A) \quad (\text{tzv. symetrie}),$$

$$(4.4) \quad (Au, u) > 0 \quad \text{pro každé } u \in \mathcal{D}(A), u \neq 0 \quad (\text{tzv. pozitivita}).$$

Důkaz. 1. symetrie:

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \int_0^l -u''(x)v(x)dx = |\text{per partes}| = [-u'(x)v(x)]_0^l + \int_0^l u'(x)v'(x)dx \\ & \quad |\text{užijeme faktu } u, v \in \mathcal{D}(A), \text{ zejména } v(0) = v(l) = 0| \\ &= \int_0^l u'(x)v'(x)dx. \end{aligned}$$

□

Dvojný integrál.

1. Definice Riemannova integrálu

Buď $M \subset \mathbb{R}^2$ omezená a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce. Naším cílem bude definovat nějakým přijatelným způsobem "objem tělesa" $T := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; [x, y] \in M, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Pro jednoduchost si můžeme představit f kladnou. Ale ve skutečnosti se objem té části tělesa, který je pod rovinou xy , odečte.

Nejprve se naučíme integrovat přes čtverec. Předpokládejme tedy, že M je nějaký čtverec $[-l, l] \times [-l, l]$. Zvolme $N \in \mathbb{N}$ a vytvořme ve čverci M čtvercovou síť takovou, že každý čtverec má stranu $h := 2l/n$. Množinu čtverců této sítě označme $\mathfrak{C}_h$.

DEFINICE 5.1. *Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená funkce. Viz obrázek 1. Uvažujme jeden konkrétní čtvereček na obrázku $Q = [x, x+h] \times [y, y+h]$ a vezmeme v něm dva body, ve kterých funkce f nabývá svého infima $m = \inf_{[x,y] \in Q} f(x, y)$ (červená čára) a suprema $M = \sup_{[x,y] \in Q} f(x, y)$ (modrá čára). Utvořme dva hranoly s podstavou Q a výškami m a M . Vezmeme-li těleso $T = \{[x, y, z]; [x, y] \in Q, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$, je jasné, že objem tohoto tělesa $V(T)$ leží mezi objemy těch dvou hranolů, t.j. $mh^2 \leq V(T) \leq Mh^2$. Definujeme*

$$\mathcal{D}(f, n) = \sum_{Q \in \mathfrak{C}_h} \inf_{[x,y] \in Q} f(x, y) h^2,$$

$$\mathcal{H}(f, n) = \sum_{Q \in \mathfrak{C}_h} \sup_{[x,y] \in Q} f(x, y) h^2.$$

Je jasné, že "objem" podgrafu funkce f (značit to budeme $V(M)$) je mezi $\mathcal{D}(f, h)$ a $\mathcal{H}(f, h)$. Zřejmě je

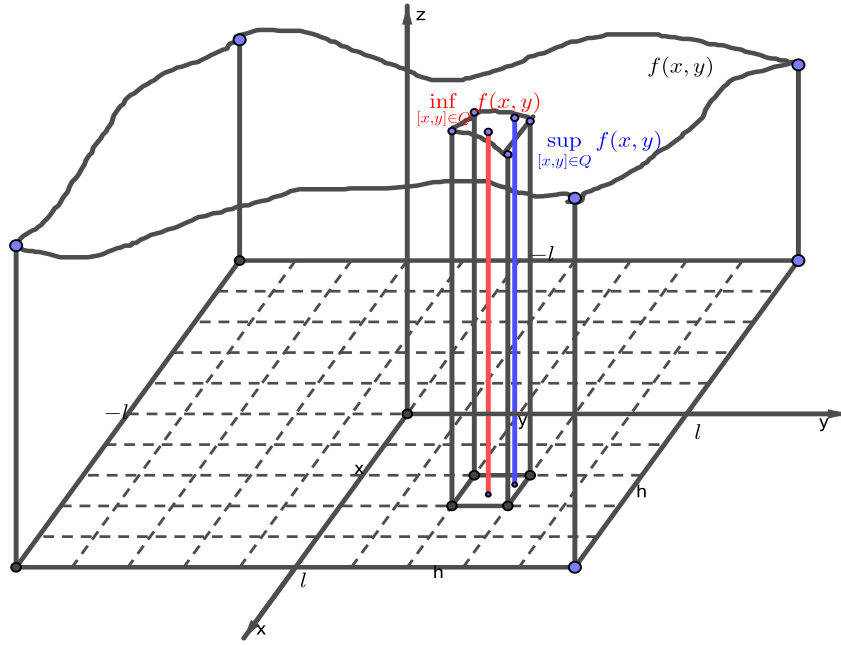
$$0 < m < n \Rightarrow \mathcal{D}(f, 2^{-m}) \leq \mathcal{D}(f, 2^{-n}) \quad \wedge \quad \mathcal{D}(f, 2^{-m}) \geq \mathcal{D}(f, 2^{-n}).$$

Tedy existují limity

$$(\mathcal{D}) \iint_M f(x, y) dx dy := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}(f, 2^{-n}), \quad (\mathcal{H}) \iint_M f(x, y) dx dy := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}(f, 2^{-n}).$$

DEFINICE 5.2. *Výrazy $(\mathcal{D}) \iint_M f(x, y) dx dy$ a $(\mathcal{H}) \iint_M f(x, y) dx dy$ se nazývají dolní a horní Riemannovy integrály z funkce f přes čtverec M .*

Umíme tedy definovat pro čtverec M a omezenou f na M horní a dolní Riemannův integrál. Nyní máme vše potřebné pro definici Riemannova integrálu.



OBRÁZEK 1. Definice dvojného integrálu.

DEFINICE 5.3. Buď dána $M \subset \mathbb{R}^2$ omezená a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce. Říkáme, že f je Riemannovsky integrovatelná, pokud

$$(\mathcal{D}) \iint_M f(x, y) dx dy = (\mathcal{H}) \iint_M f(x, y) dx dy$$

a definujeme Riemannův integrál

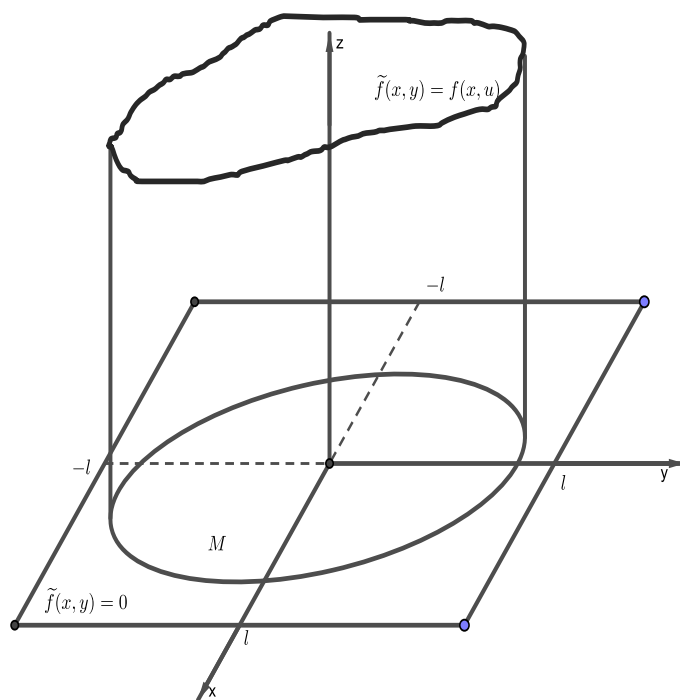
$$\iint_M f(x, y) dx dy := (\mathcal{D}) \iint_M f(x, y) dx dy.$$

Nyní definujeme Riemannův integrál přes obecnou omezenou množinu. Buď $M \subset \mathbb{R}^2$ omezená a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce jako na začátku. Udělejme domluvu, že funkci f rozšíříme 0 na celé $\mathbb{R}^2$ a toto rozšíření označíme $\tilde{f}$. Protože M je omezená, existuje čtverec $[-l, l] \times [-l, l]$ takový, že $M \subset [-l, l] \times [-l, l]$. Uvědomme si, že $\tilde{f}$ je díky rozšíření definována všude ve čtverci $Q_l := [-l, l] \times [-l, l]$, viz obrázek 2.

DEFINICE 5.4. Buď dána $M \subset \mathbb{R}^2$ omezená. Definujeme Riemannův integrál

$$\iint_M f(x, y) dx dy := \iint_{Q_l} \tilde{f}(x, y) dx dy.$$

pokud tento integrál existuje.



OBRÁZEK 2. Definice dvojného integrálu přes obecnou množinu.

Následující věta říká, že nezáleží na tom, jaký čtverec zvolíme. Stačí, že obsahuje M .

VĚTA 5.5. Polož $Q_l = [-l, l] \times [-l, l]$ a $Q_{l'} = [-l', l'] \times [-l', l']$. Buď $M \subset Q_l \subset Q_{l'}$. Pak

$$\iint_{Q_l} \tilde{f}(x, y) dx dy = \iint_{Q_{l'}} \tilde{f}(x, y) dx dy.$$

Další věta nám říká základní vlastnosti Riemannova integrálu.

VĚTA 5.6. *Nechť všechny integrály vystupující v této větě existují. Pak*

$$\iint_M (a f(x, y) + b g(x, y)) dx dy = a \iint_M f(x, y) dx dy + b \iint_M g(x, y) dx dy,$$

$$f(x, y) \leq g(x, y) \Rightarrow \iint_M f(x, y) dx dy \leq \iint_M g(x, y) dx dy,$$

$$M \cap N = \emptyset \Rightarrow \iint_{M \cup N} f(x, y) dx dy = \iint_M f(x, y) dx dy + \iint_N f(x, y) dx dy.$$

Nyní si můžeme definovat "plošný obsah" či (dvourozměrnou) míru množiny M .

DEFINICE 5.7. *Buď dána $M \subset \mathbb{R}^2$ omezená. Definujeme $S(M)$ (míru množiny M)*

$$S(M) := \iint_M 1 dx dy,$$

pokud tento integrál existuje. V takovém případě říkáme, že M je "Riemannovsky" měřitelná.

Za zmínku stojí následující věta.

VĚTA 5.8. *Nechť M, N jsou měřitelné. Pak*

$$M \subset N \Rightarrow 0 \leq S(M) \leq S(N),$$

$$M \cap N = \emptyset \Rightarrow S(M \cup N) = S(M) + S(N).$$

Velmi často se nacházíme v situaci, že M je nějaká "oblast v rovině se spojitou hranicí" (např. kruh, elipsa, obdélník, trojúhelník, "ledvinka" či nějaké jejich průniky) a funkce f je spojitá na $\overline{M}$ (to je M i s její hranicí). Potom automaticky existuje Riemannův integrál. Toto tvrzení nebudeme formulovat jako větu, to bychom museli říci, co je "oblast v rovině se spojitou hranicí" a to dá dost práce a pro praktické příklady to nebudeme potřebovat, ty budeme řešit intuitivně.

2. Fubiniova věta

Nechť $M \subset \mathbb{R}^2$ a $x \in \mathbb{R}$. Označme symbolem $M_1(x)$ řez množiny M přímkou rovnoběžnou s osou y jdoucí bodem $[x, 0]$, t.j.

$$M_1(x) := \{[x, s] \in \mathbb{R}^2; [t, s] \in M\}.$$

Pro $y \in \mathbb{R}$ označme symbolem $M_2(y)$ řez množiny M přímkou rovnoběžnou s osou x jdoucí bodem $[0, y]$, t.j.

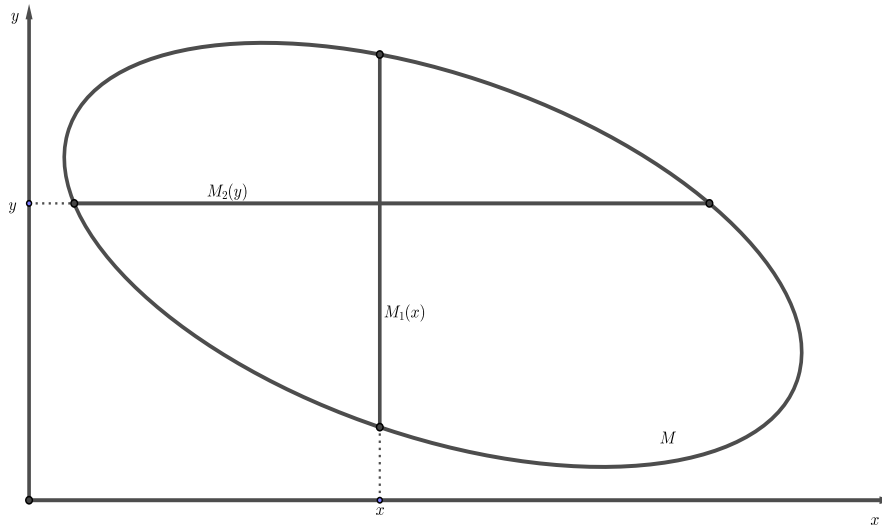
$$M_2(y) := \{[t, y] \in \mathbb{R}^2; [t, s] \in M\}.$$

Viz obrázek 3.

V dalším uvidíme, jak počítat objem podgrafu funkce. Viz obrázek 4. Zafixujeme si x a uvažujeme červené těleso o tloušťce dx . Jeho objem je přibližně roven

$$\left(\int_{M_1(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Objem podgrafu funkce potom dostaneme integrací tohoto objemu přes proměnnou x . Analogicky lze zafixovat y a použít modré těleso.

OBRÁZEK 3. Řezy množinou M .

Přesněji, je-li dána $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ omezená, má smysl uvažovat pro $x, y \in \mathbb{R}$ jednorozměrné Riemannovy integrály

$$\int_{M_1(x)} f(x, y) dy, \quad \int_{M_2(y)} f(x, y) dx.$$

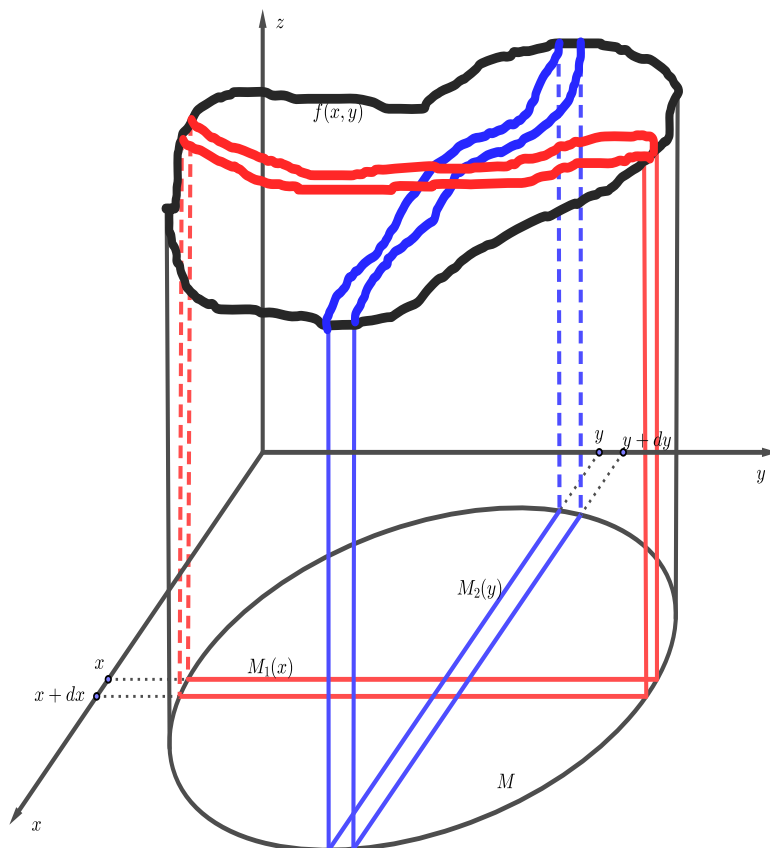
Následující věta nám dává praktický návod, jak dvojrozměrné integrály počítat.

VĚTA 5.9. *Nechť M omezená v rovině a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce. Nechť existuje Riemannův integrál $\iint_M f(x, y) dx dy$ a existují Riemannovy integrály $\int_{M_1(x)} f(x, y) dy$ pro každé $x \in [a, b]$, kde interval $[a, b]$ je vybrán tak, že $M_1(x) = \emptyset$ pro $x \notin [a, b]$. Pak*

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{M_1(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Podobně, existují Riemannovy integrály $\int_{M_2(y)} f(x, y) dx$ pro každé $y \in [c, d]$, kde interval $[c, d]$ je vybrán tak, že $M_2(y) = \emptyset$ pro $y \notin [c, d]$, pak

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{M_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$



OBRÁZEK 4. Řezy tělesem o malé tloušťce.

Předchozí věta vlastně říká, že prakticky můžeme přehodit pořadí integrace. Tedy pokud $M \subset [a, b] \times [c, d]$, pak

$$\int_a^b \left(\int_{M_1(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{M_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

3. Dva důležité speciální typy oblastí

VĚTA 5.10. *Nechť $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ jsou funkce spojité na intervalu $[a, b]$ a*

$$M := \{[x, y]; a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Pak

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

viz obrázek 5.

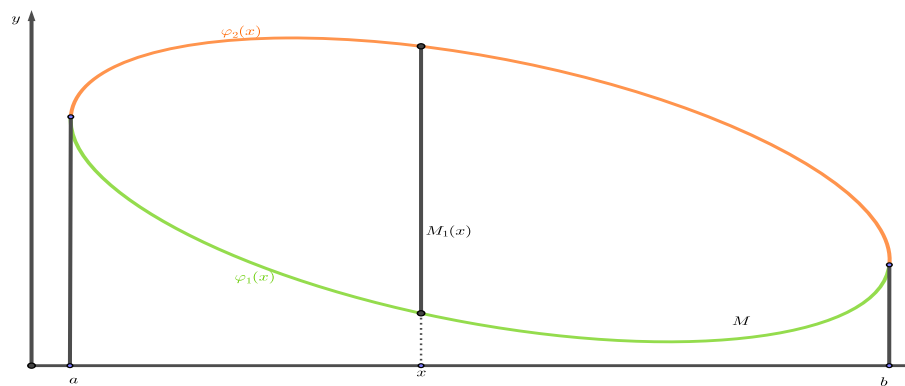
Podobně, je-li $\psi_1(y), \psi_2(y)$ jsou funkce spojité na intervalu $[c, d]$ a

$$M := \{[x, y]; c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

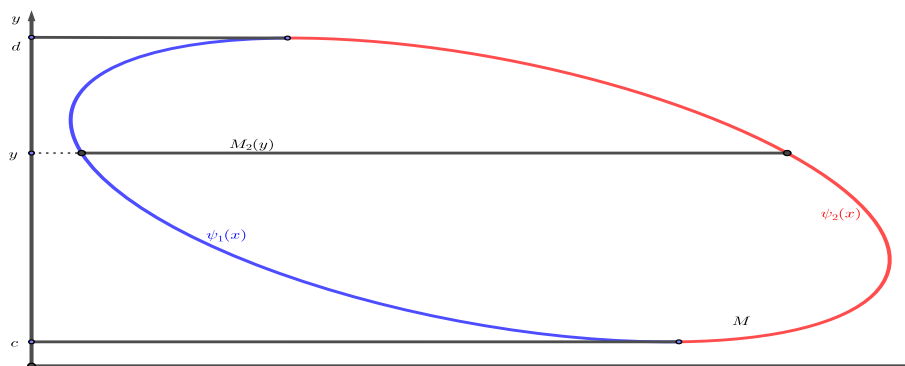
pak

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

viz obrázek 6.



OBRÁZEK 5. První speciální typ oblasti.



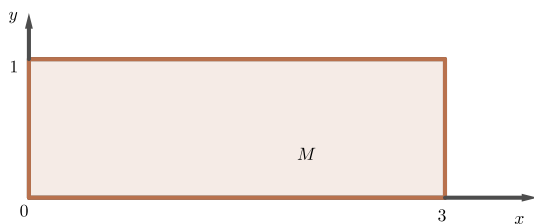
OBRÁZEK 6. Druhý speciální typ oblasti.

4. Příklady

PŘÍKLAD 5.11. Buď $M := \{[x, y]; 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$. Vypočítej

$$\iint_M \frac{x^2}{1+y^2} dx dy.$$

Řešení. Nejprve si namalujeme oblast. Viz obrázek 7.



OBRÁZEK 7. Oblast M .

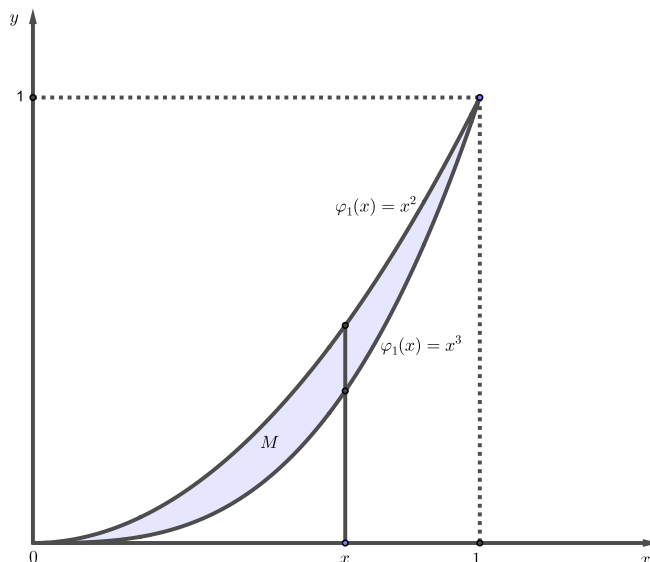
$$\begin{aligned} \iint_M \frac{x^2}{1+y^2} dx dy &= \int_0^3 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy \right) dx = \int_0^3 [x^2 \operatorname{arctg} y]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^3 x^2 (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) dx = \frac{\pi}{4} [x^3/3]_0^3 = \frac{9\pi}{4}. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 5.12. Buď $M := \{[x, y]; x^3 \leq y \leq x^2\}$. Vypočítej

$$\iint_M (x^2 + y^2) dx dy.$$

Řešení. Namalujeme oblast. Viz obrázek 8. Vidíme, že x se nám pohybuje v intervalu $[0, 1]$ pokud mám nějaké takové x pevně zvolené, pak $x^3 \leq y \leq x^2$. Potom daný integrál je

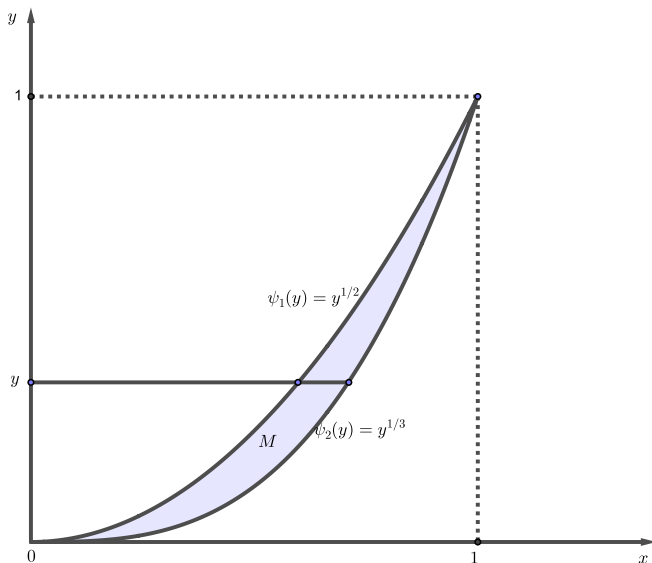


OBRÁZEK 8. Oblast M .

$$\begin{aligned} \iint_M (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 [x^2 y + y^3/3]_{y=x^3}^{y=x^2} dx \\ &= \int_0^1 (x^4 + x^6/3 - x^5 - x^9/3) dx = [x^5/5 + x^7/21 - x^6/6 - x^{10}/30]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{1}{21}. \end{aligned}$$

Integrujme v opačném pořadí. Nejprve si znovu namalujeme oblast. Viz obrázek 9. Vidíme, že y se nám pohybuje v intervalu $[0, 1]$ pokud mám nějaké takové y pevně zvolené, pak $y^{1/2} \leq x \leq y^{1/3}$. Potom daný integrál je

$$\begin{aligned} \iint_M (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 [x^3/3 + xy^2]_{x=y^{1/2}}^{x=y^{1/3}} dy \\ &= \int_0^1 (y/3 + y^{7/3} - y^{3/2}/3 - y^{5/3}) dy = [y^2/6 + 3/10 y^{10/3} - 2/15 y^{5/2} - 2/7 y^{7/2}]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{3}{10} - \frac{2}{15} - \frac{2}{7} = \frac{1}{21}. \end{aligned}$$

OBRÁZEK 9. Oblast M .

Na zvoleném pořadí integrace tedy nezáleží, což je obsaženo ve Fubiniově větě.

□

PŘÍKLAD 5.13. Buď $M := \{[x, y]; 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$. Vypočítej

$$\iint_M e^{\frac{x}{y}} dx dy.$$

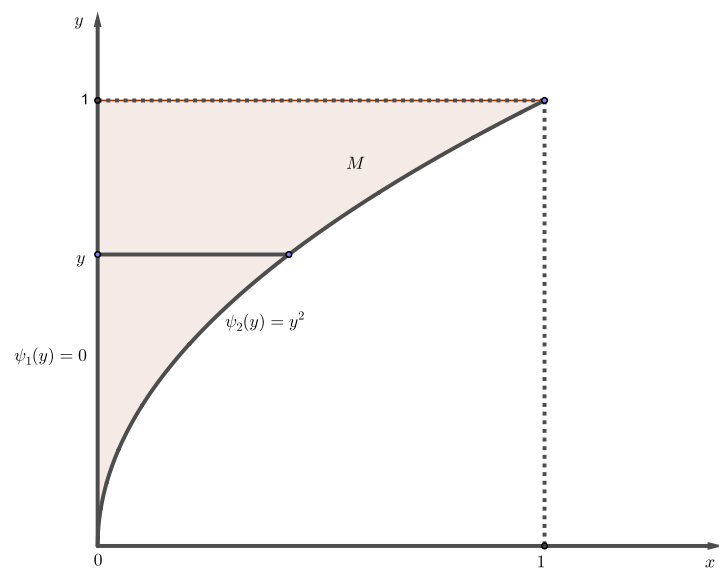
Řešení. Nejprve si znovu namalujeme oblast. Viz obrázek 10. Vidíme, že y se nám pohybuje v intervalu $[0, 1]$ pokud mám nějaké takové y pevně zvolené, pak $0 \leq x \leq y^2$. Potom daný integrál je

$$\begin{aligned} \iint_M e^{\frac{x}{y}} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy = \int_0^1 [ye^{\frac{x}{y}}]_{x=0}^{x=y^2} dy \\ &= \int_0^1 (ye^y - y) dy = [ye^y - e^y - y^2/2]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pokusme se prohodit integrály. Potom máme

$$\iint_M e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy \right) dx = \text{????}$$

Teď to neumíme vyjadřovat pomocí elementárních funkcí.

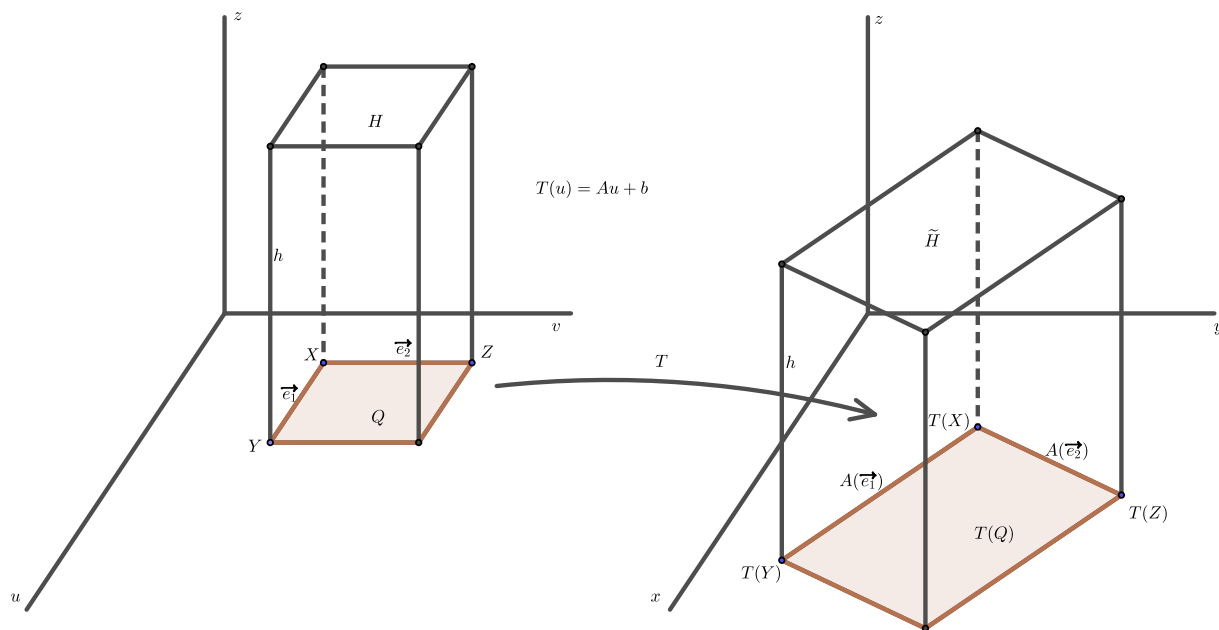
OBRÁZEK 10. Oblast M .

□

PŘEDNÁŠKA 6

Věta o substituci

Uvažujme nějaké zobrazení roviny $\mathbb{R}^2$ do roviny $\mathbb{R}^2$. Začneme nejjednodušším případem zobrazení, to je afinní zobrazení dané vzorcem $T(u) = Au + b$, kde A je nějaká regulární matice 2×2 . Představme si hranol H s podstavou Q a výškou h . Podstava Q se zobrazí pomocí T na rovnoběžník $T(Q)$ a dostaneme rovnoběžnostěn $\tilde{H}$ s podstavou $T(Q)$ a výškou v . Viz obrázek 1.



OBRÁZEK 1. Afinní substituce.

Označme souřadnice bodu $X = [u, v]$, $Y = [u + du, v]$ a $Z = [u, v + dv]$. Nechť

$$T(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + b.$$

Pak $\vec{e}_1 = (du, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, dv)$. Spočtěme $A(\vec{e}_1)$. Zřejmě je

$$\begin{aligned} A(\vec{e}_1) &= T(Y) - T(X) = A(u + du, v) + b - (A(u, v) + b) = A(du, 0) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}du \\ a_{21}du \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tedy $A(\vec{e}_1) = (a_{11}, a_{21})du$. Podobně spočítáme $A(\vec{e}_2) = (a_{12}, a_{22})dv$. Potom z lineární algebry víme, že plošný obsah $S(T(Q))$ rovnoběžníku $T(Q)$ lze spočítat jako absolutní hodnotu determinantu z matice

$$\begin{pmatrix} a_{11}du, a_{12}du \\ a_{21}dv, a_{22}dv \end{pmatrix},$$

tedy

$$S(T(Q)) = \left| \det \begin{pmatrix} a_{11}du, a_{12}du \\ a_{21}dv, a_{22}dv \end{pmatrix} \right| = |\det(A)|dudv.$$

Označme objemy $V(H)$ hranolu H a $V(\tilde{H})$ rovnoběžnostěnu $\tilde{H}$. Potom platí zásadní vztah

$$V(\tilde{H}) = S(T(Q)).h = |\det(A)|dudv.h = V(H) |\det(A)|,$$

tj.

$$V(\tilde{H}) = V(H) |\det(A)|.$$

Buď $M, N \subset \mathbb{R}^2$ dvě omezené množiny, $N \subset [-l, l]^2 := C$, a necht' $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce definované na C takové, že

$$M = \{[\varphi(u, v), \psi(u, v)]; [u, v] \in N\}.$$

Pak říkáme, že funkce $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ jsou transformace N na M , pokud

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \neq 0$$

pro každé $[u, v] \in N$. Označme ještě Jakobián transformace

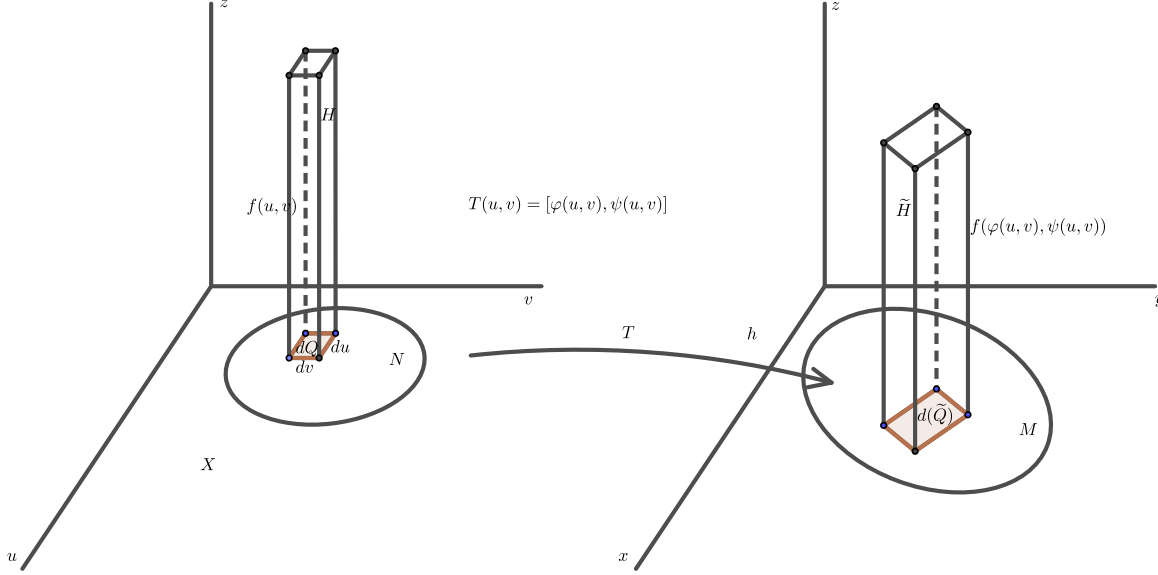
$$J(u, v) = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \right|.$$

VĚTA 6.1. Buď $M, N \subset \mathbb{R}^2$ dvě omezené množiny, $N \subset [-l, l]^2 := C$, a necht' dvojice funkcí $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ je transformace T z N na M . Buď $f(x, y) : M \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na M . Pak

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \iint_N f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) J(u, v) dudv.$$

Důkaz. Jen naznačíme, proč to platí. Podívejte se na obrázek 2.

Transformace T není lineární, ale pro velmi malá du, dv ji můžeme dobře aproximovat afinní transformací. Jde jen o to, jaká je ta matice v bodě $[u, v]$. Použijeme



OBRÁZEK 2. Substituce ve dvojném integrálu.

Taylorův rozvoj (pouze lineární, členy vyššího řádu zanedbáme) a dostaneme

$$\begin{aligned}
 T(u + du, v) - T(u, v) &= (\varphi(u + du, v), \psi(u + du, v)) - (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\
 &= \left(\varphi(u, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)du, \psi(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)du \right) - (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \\
 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \right) du.
 \end{aligned}$$

Podobně dostaneme

$$T(u, v + dv) - T(u, v) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \right) dv.$$

Z úvahy o afinním zobrazení víme, že

$$S(d(\tilde{Q})) = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)du & \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)du \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)dv & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)dv \end{pmatrix} \right| = S(d(Q))J(u, v) = J(u, v)dudv.$$

Víme, že

$$I = \iint_M f(x, y) dx dy$$

je objem tělesa, které je podgrafem funkce $f(x, y)$, a to je součtem objemů elementárních malinkých rovnoběžnostěnů $\tilde{H}$ přes oblast M , tedy $I = \sum V(\tilde{H})$. Ale

$$V(\tilde{H}) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))S(d(\tilde{Q})) = f(u, v)J(u, v)S(D(Q)) = f(u, v)J(u, v)dudv$$

a posčítáním těchto objemů dostaneme

$$I = \iint_N f(u, v) J(u, v) du dv.$$

Tedy

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \iint_N f(u, v) J(u, v) du dv.$$

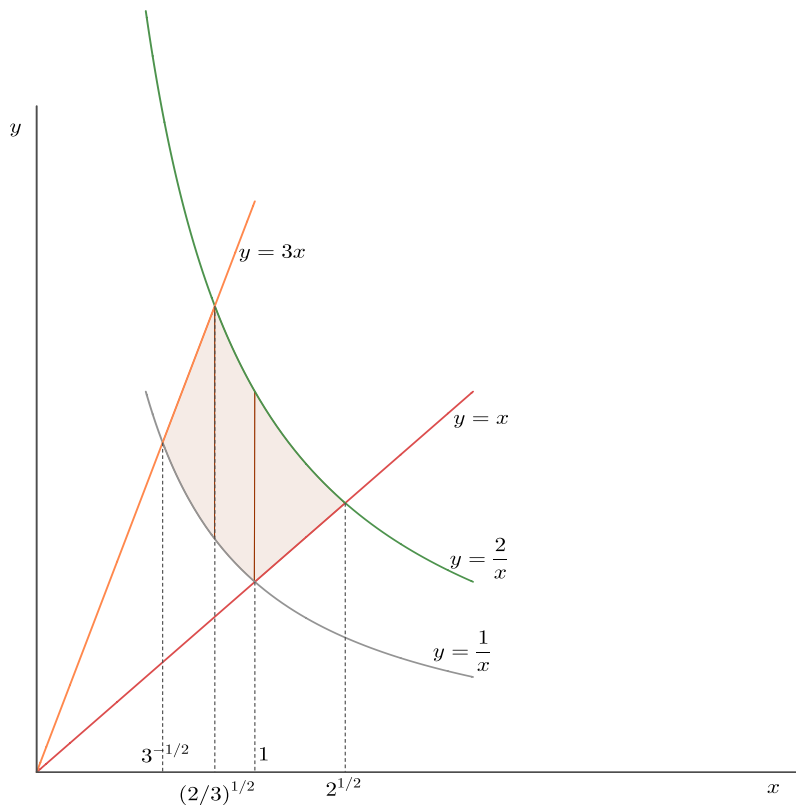
□

1. Příklad

PŘÍKLAD 6.2. Buď $M := \{[x, y]; x \leq y \leq 3x, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\}$. Vypočítej

$$\iint_M y^2 dx dy.$$

Řešení. Vyřešme to nejprve pomocí Fubiniho věty. namalujme si obrázek dané oblasti. Viz obrázek 3. Potom



OBRÁZEK 3. Oblast.

$$\begin{aligned}
\iint_M y^2 dx dy &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \int_{\frac{1}{x}}^{3x} y^2 dy dx + \int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^1 \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} y^2 dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_x^{\frac{2}{x}} y^2 dy dx \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{1}{3} \left(27x^3 - \frac{1}{x^3} \right) dx + \int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^1 \frac{1}{3} \left(\frac{8}{x^3} - \frac{1}{x^3} \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{3} \left(\frac{8}{x^3} - x^3 \right) dx \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{27x^4}{4} + \frac{1}{2x^2} \right) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{3} \frac{7}{2x^2} \Big|_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{4}{x^2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{27(\frac{2}{3})^2}{4} - \frac{27(\frac{1}{3})^2}{4} + \frac{1}{2(\frac{2}{3})} - \frac{1}{2(\frac{1}{3})} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{7}{2} - \frac{7}{2(\frac{2}{3})} \right) \\
&\quad - \frac{1}{3} \left(\frac{4}{2} - \frac{4}{1} + \frac{2^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \left(3 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \right) - \frac{7}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) - \frac{1}{3} \left(2 - 4 + 1 - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{5}{4} \right) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

A nyní to hlavní. Chceme ukázat, jak pracuje substituce. Použijeme tedy substituci $u = \frac{y}{x}$, $v = xy$. Pak $1 \leq u \leq 3$, $1 \leq v \leq 2$. Dále $x = \sqrt{\frac{v}{u}}$, $y = \sqrt{uv}$. Tedy $x = u^{-1/2}v^{1/2}$, $y = u^{1/2}v^{1/2}$. Jakobián je tedy

$$\begin{aligned}
J(u, v) &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u^{-3/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2} \\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2} \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| -\frac{1}{4}u^{-1} - \frac{1}{4}u^{-1} \right| = \frac{1}{2u}.
\end{aligned}$$

Potom

$$\iint_M y^2 dx dy = \int_1^3 \int_1^2 uv \frac{1}{2v} dv du = \frac{1}{2} \int_1^3 \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v=1}^{v=2} du = \frac{3}{4} \int_1^3 du = \frac{3}{2}.$$

□

2. Polární souřadnice

Vezměme v rovině bod o souřadnicích $[x, y]$. Jeho vzdálenost od počátku označíme r a úhel, který svírá průvodič tohoto bodu s kladnou částí osy x , označíme φ . Příslušné hodnoty r, φ nazýváme polární souřadnice bodu $[x, y]$. Viz obrázek 4. Z tohoto obrázku je vidět, že

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}.$$

Polární souřadnice r, φ jsou dány rovnicemi

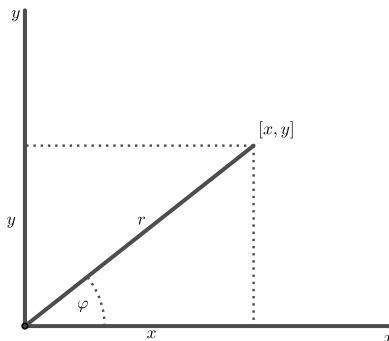
$$\begin{aligned}
x &= r \cos \varphi, \\
y &= r \sin \varphi
\end{aligned}$$

a jsou to prakticky nejdůležitější substituce. Spočítejme Jakobián.

$$J(r, \varphi) = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Napišme ještě jeden důležitý vzorec (lze ho buď spočítat nebo je vidět z Pythagorovy věty):

$$x^2 + y^2 = r^2.$$



OBRÁZEK 4. Polární souřadnice.

PŘÍKLAD 6.3. Buď $M := \{[x, y]; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$. Vypočítej

$$\iint_M \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Řešení. Namalujme si obrázek. Viz obrázek 5. Vidíme, že pokud se s bodem $[x, y]$ pohybujeme přes oblast M , polární souřadnice bodu $[x, y]$ se pohybují $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/3$ a $1 \leq r \leq 2$. Proto použitím polárních souřadnic dostaneme

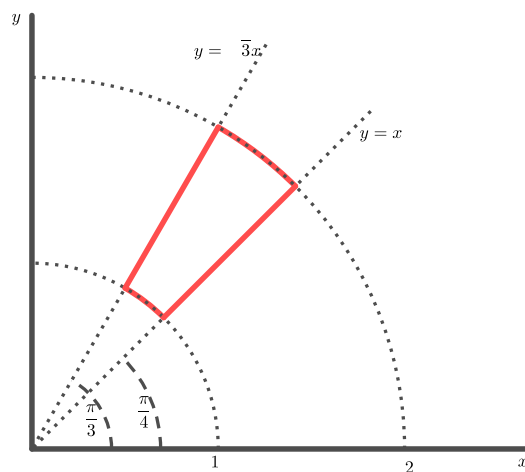
$$\iint_M \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_1^2 r \cdot r dr d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=1}^{r=2} d\varphi = \frac{7}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi = \frac{7\pi}{36}.$$

□

3. Posunuté polární souřadnice

V případě, že integrujeme přes kruh nebo část kruhu, který má střed v bodě $[x_0, y_0]$, můžeme posunout polární souřadnice tak, aby $[x_0, y_0]$ byl středem. Tj. polární souřadnice jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r \cos \varphi, \\ y &= y_0 + r \sin \varphi. \end{aligned}$$



OBRÁZEK 5. Oblast.

Spočítejme Jakobián.

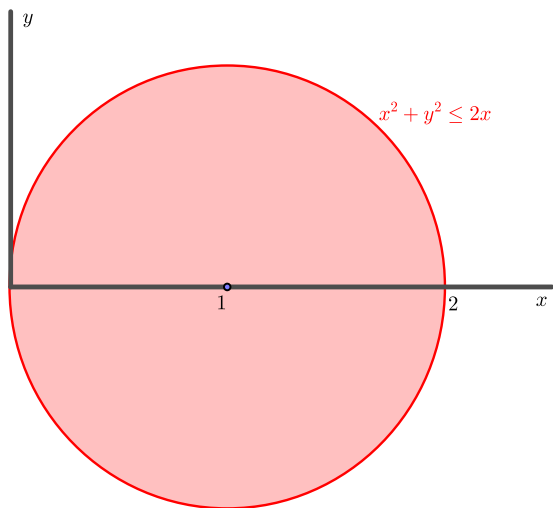
$$J(r, \varphi) = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

PŘÍKLAD 6.4. Buď $M := \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq 2x, \}$. Vypočítej

$$\iint_M (x^2 + y^2) dx dy.$$

Řešení. Uvědomme si, že M jde přepsat jako $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$. Viz obrázek 6. Můžeme (ale nemusíme) použít posunutých polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= 1 + r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$



OBRÁZEK 6. Oblast.

Dostaneme $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ a tedy

$$\begin{aligned}
 \iint_M (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 ((1 + r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2) r dr d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r + 2r^2 \cos \varphi + r^3) dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \cos \varphi + \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cos \varphi \right) d\varphi = \left[\frac{3}{4} \varphi + \frac{1}{3} \sin \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{3\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Použijme klasické polární souřadnice

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi, \\
 y &= r \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

Geometricky vidíme, že $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Potom ovšem r závisí na φ . Vypočítejme, jak. Dosazením do rovnice $(x-1)^2 + y^2 = 1$ dostaneme $r^2 \leq 2r \cos \varphi$, a tedy $0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$. Pišme

$$\begin{aligned} \iint_M (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \cdot r dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2 \cos \varphi} d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{16 \cos^4 \varphi}{4} d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \left[\frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

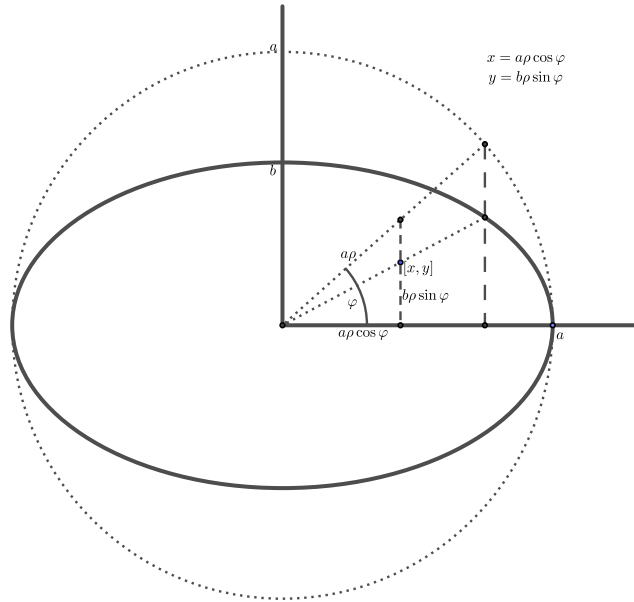
4. Zobecněné polární souřadnice

Zobecněné polární souřadnice jsou dány rovnicemi

$$x = a\rho \cos \varphi,$$

$$y = b\rho \sin \varphi.$$

Viz obrázek 7. Na tomto obrázku vidíme geometrický význam φ a při troše



OBRÁZEK 7. Zobecněné polární souřadnice.

přemýšlení i význam ρ . Při integraci přes celou elipsu je $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ a $0 \leq \rho \leq 1$. Lze je podobně jako polární souřadnice posunout do středu $[x_0, y_0]$, pak máme

posunutě zobecněné polární souřadnice

$$x = x_0 + a\rho \cos \varphi,$$

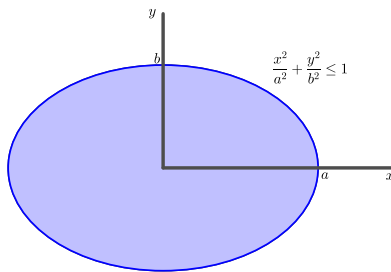
$$y = y_0 + b\rho \sin \varphi.$$

Spočítejme Jakobián.

$$J(\rho, \varphi) = \left| \det \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = ab\rho.$$

PŘÍKLAD 6.5. *Vypočítej obsah elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.*

Řešení. Namalujme si, jak daná elipsa vypadá. Viz obrázek 8. Zřejmě je



OBRÁZEK 8. Elipsa.

$$P = \iint_M dx dy,$$

kde $M = \{[x, y]; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. Převeďme integrál do zobecněných polárních souřadnic

$$x = a\rho \cos \varphi,$$

$$y = b\rho \sin \varphi.$$

Dostaneme

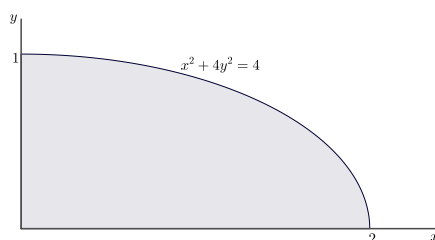
$$\begin{aligned} P &= \iint_M dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 ab\rho \, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[ab \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 d\varphi \\ &= \frac{1}{2} ab \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 6.6. Buď $M := \{[x, y]; x^2 + 4y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$. Vypočítej

$$\iint_M xy dx dy.$$

Řešení. Na obrázku 9 je namalovaná daná oblast (je to část elipsy). Převedme



OBRÁZEK 9. Čtvrtina elipsy.

integrál do zobecněných polárních souřadnic

$$x = 2\rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_M xy dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 2\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \cdot 2\rho \, d\rho d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 4\rho^3 \cos \varphi \sin \varphi \, d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Použijme pro zajímavost klasické polární souřadnice

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Geometricky vidíme, že $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Potom ovšem r závisí na φ . Vypočítejme, jak. Dosazením do rovnice $x^2 + 4y^2 = 4$ dostaneme $r^2(\cos^2 \varphi + 4\sin^2 \varphi = 4)$, a tedy $0 \leq r \leq \frac{2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + 4\sin^2 \varphi}}$. Pišme

$$\begin{aligned} \iint_M xy dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + 4\sin^2 \varphi}}} r^2 \cos \varphi \sin \varphi r dr d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\frac{2}{\sqrt{\cos^2 \varphi + 4\sin^2 \varphi}}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{(\cos^2 \varphi + 4\sin^2 \varphi)^2} d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{(1 + 3\sin^2 \varphi)^2} d\varphi = \left| \begin{array}{l} t = \sin \varphi \\ dt = \cos \varphi d\varphi \end{array} \right| = 4 \int_0^1 \frac{t}{(1 + 3t^2)^2} dt \\ &= \left| \begin{array}{l} s = 1 + 3t^2 \\ ds = 6t dt \end{array} \right| = \frac{4}{6} \int_1^4 \frac{1}{s^2} ds = \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{s} \right]_1^4 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zdá se, že první metoda je přeci jen výhodnější. □

Dosud jsme integrovali jen přes omezené oblasti. Podobně jako v případě nevlastního jednorozměrného Riemannova integrálu lze definovat i nevlastní vícenásobný integrál. Udělejme to pro omezenou funkci na $\mathbb{R}^2$. Pro $M \subset \mathbb{R}^2$ definujme

$$\chi_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y] \in M; \\ 0 & \text{pro } [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus M. \end{cases}$$

Poznamenejme, že funkci χ_M nazýváme charakteristickou funkcí množiny M .

DEFINICE 6.7. *Nechť funkce f je daná na $\mathbb{R}^2$. Definujme*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy := \lim_{K \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \chi_{[-K, K]^2}(x, y) dx dy$$

Jako příklad si spočítejme Laplaceův integrál.

PŘÍKLAD 6.8. *Vypočítej*

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

Řešení. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 = I \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) = \left(\int_{\mathbb{R}} I e^{-x^2} dx \right) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) e^{-x^2} dx \right) = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} e^{-x^2} dy \right) dx \right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Poslední integrál převedeme do polárních souřadnic a dostaneme

$$\begin{aligned} I^2 &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=\infty} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} 2\pi = \pi. \end{aligned}$$

Protože $I > 0$, je nutně

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

□

Aplikace dvojného integrálu.

V této části se naučíme určité aplikace dvojného integrálu v geometrii a ve fyzice.

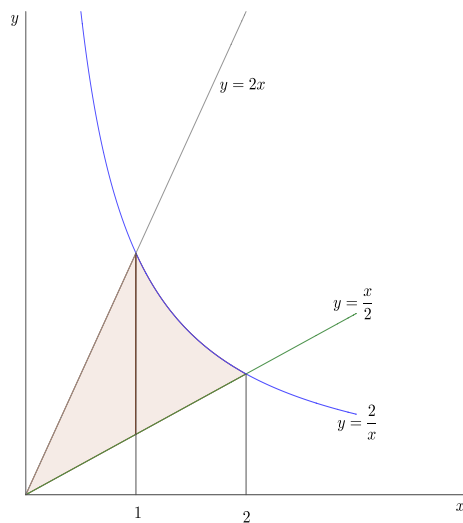
1. Obsah rovinného obrazce

Už jsme se zmiňovali, že obsah rovinného obrazce M je dán vzorečkem

$$P := \iint_M dx dy.$$

PŘÍKLAD 7.1. *Vypočítej obsah P obrazce $M := \{[x, y]; \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, xy \leq 2\}$.*

Řešení. Danou oblast si namalujeme, viz obrázek 1. Zřejmě platí



OBRÁZEK 1. Plošný obsah.

$$\begin{aligned}
P &= \iint_M dx dy = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy dx + \int_1^2 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} dy dx \\
&= \int_0^1 \left(2x - \frac{x}{2}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{3}{4}x^2\right]_0^1 + \left[2 \ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{3}{4} + \left((2 \ln 2 - 1) - (0 - 1/4)\right) = 2 \ln 2.
\end{aligned}$$

Možná by někoho napadlo převést výpočet do polárních souřadnic

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Potom

$$\frac{1}{2} \leq \operatorname{tg} \varphi \leq 2 \Rightarrow \arctg \frac{1}{2} \leq \varphi \leq \arctg 2.$$

Navíc je $xy \leq 2$, tedy $r^2 \sin \varphi \cos \varphi \leq 2$ a tedy

$$0 \leq r \leq \sqrt{\frac{2}{\sin \varphi \cos \varphi}}.$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}
P &= \iint_M dx dy = \int_{\arctg \frac{1}{2}}^{\arctg 2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\sin \varphi \cos \varphi}}} r dr d\varphi = \int_{\arctg \frac{1}{2}}^{\arctg 2} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{\sqrt{\frac{2}{\sin \varphi \cos \varphi}}} d\varphi \\
&= \int_{\arctg \frac{1}{2}}^{\arctg 2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ x = \arctg \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ x = \arctg 2 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{t} dt = \left[\ln t\right]_{\frac{1}{2}}^2 = \ln 2 - \ln \frac{1}{2} = 2 \ln 2
\end{aligned}$$

což je stejný výsledek jako při použití první metody. □

Nyní si všimneme také fyzikálních aplikací dvojného integrálu. Naučíme se počítat některé veličiny jako těžiště tenké desky atd.

2. Objem tělesa pod grafem funkce

Nechť je dána nezáporná funkce dvou proměnných $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Potom objem V tělesa (množiny) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; [x, y] \in \Omega, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ je dána vzorcem

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

PŘÍKLAD 7.2. Spočítejte objem koule o poloměru R .

Řešení. Stačí spočítat jen objem horní polokoule a výsledek vynásobit dvěma. Obrázek polokoule si snad představíte sami. Rovnice sféry o poloměru R je $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a tedy horní polosféra má rovnici

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Polovina objemu V je tedy dána integrálem

$$\frac{1}{2}V = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Tento integrál vypočítáme užitím polárních souřadnic. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \left| \begin{array}{l} t = R^2 - r^2 \Rightarrow dt = -2dr \\ r = 0 \Rightarrow t = R^2 \\ r = R \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = 2\pi \int_{R^2}^0 \sqrt{t} \frac{dt}{-2} \\ &= \pi \int_0^{R^2} t^{1/2} dt = \pi [2/3 t^{3/2}]_0^{R^2} = \frac{2}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Tedy

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

□

Další příklad je ze života. Jistě jste již alespoň jednou popíjeli z püllitru pivo. Praktická úloha následuje.

PŘÍKLAD 7.3. *Představte si, že pijete pivo z püllitru tvaru válce, který je zrovna nakloněn tak, že vidíme přesně polovinu dna. Kolik piva je ještě v püllitru?*

Řešení. Představíme si, že v momentě, kdy vidíme ve sklenici půlku dna, pivo ztuhne. Postavíme sklenici na stůl a vidíme, že hladina piva tvoří rovinu, která rozdělí sklenici (válec) na dvě části. Viz obrázek 2. Označme R poloměr dna a h výšku püllitru. Natočíme püllitr tak, že rovina řezu je dána body $[R, 0, 0]$, $[-R, 0, 0]$ a $[0, R, H]$. Utvoříme rovnici roviny. Vyjde $z = \frac{H}{R}y$. Polovina dna je oblast v rovině xy daná nerovnicemi $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$. Objem je tedy dán

$$V = \iint_M \frac{H}{R} y dx dy, \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}.$$

Užitím polárních souřadnic máme

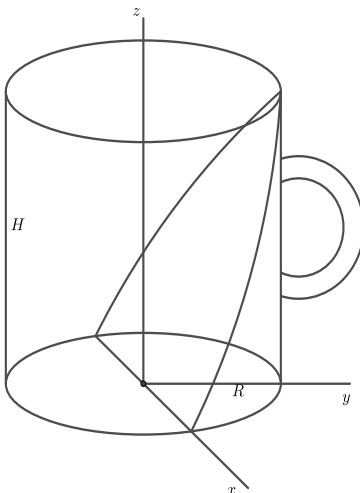
$$\begin{aligned} V &= \frac{H}{R} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr d\varphi = \frac{H}{R} \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \sin \varphi d\varphi = \frac{HR^2}{3} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{HR^2}{3} [-\cos \varphi]_0^\pi = \frac{2}{3}HR^2. \end{aligned}$$

□

3. Hmotnost tenké desky

Buď dána tenká deska (rovinový obrazec) M nepravidelné hustoty $\varrho(x, y)$. Označme $Q_\delta(x, y)$ čtverec se středem v $[x, y]$ a straně $\delta > 0$. Poznamenejme, v ze hustota v bodě $[x, y]$ se definuje

$$\varrho(x, y) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\text{hmotnost } Q_\delta(x, y)}{\text{obsah } Q_\delta(x, y)} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\text{hmotnost } Q_\delta(x, y)}{\delta^2}.$$



OBRÁZEK 2. Pivo.

Vezmeme nyní takové malé δ a udělejme v rovině síť o straně δ . Buď $\mathcal{Q}$ množina v sech síťových čtverečků, které mají s M neprázdný průnik. Potom hmotnost je rovna přibližně

$$\begin{aligned} m &\doteq \sum_{q \in \mathcal{Q}} \text{hmotnost } Q_\delta(x, y) = \sum_{q \in \mathcal{Q}} \frac{\text{hmotnost } Q_\delta(x, y)}{\delta^2} \delta^2 \\ &\doteq \sum_{q \in \mathcal{Q}} \frac{\text{hmotnost } Q_\delta(x, y)}{\delta^2} \delta^2. \end{aligned}$$

Považujeme-li δ za malý element délky ve směru osy x a také y , t.j. $dx = dy = \delta$, máme

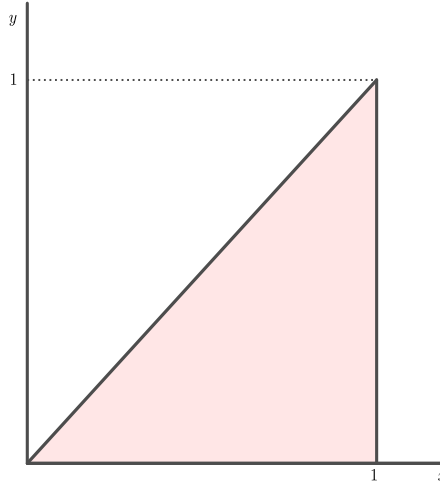
$$m \doteq \sum_{q \in \mathcal{Q}} \varrho(x, y) \delta^2 \rightarrow \iint_M \varrho(x, y) dx dy$$

a dostáváme tedy vzorec

$$m = \iint_M \varrho(x, y) dx dy.$$

PŘÍKLAD 7.4. Mějme nehomogenní plíšek zanedbatelné tloušťky tvaru trojúhelníku o vrcholech $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 1]$, jehož hustota je $\varrho(x, y) = x$. Jaká je hmotnost tohoto plíšku?

Řešení. Namalujme si daný trojúhelník. Viz obrázek 3. Vidíme, že



OBRÁZEK 3. Hmotnost plechu.

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_M \varrho(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x x dy dx = \int_0^1 x \int_0^x dy dx = \int_0^1 x [y]_{y=0}^{y=x} dx \\
 &= \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

□

4. Těžiště tenké desky

Nechť je v rovině dána soustava n hmotných bodů s polohovými vektory $r_i = (x_i, y_i)$ a s hmotnostmi m_i . Potom celkové těžiště systému je dáno

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)$$

Máme-li nyní tenkou desku M s hustotou $\varrho(x, y)$, můžeme opět udělat v rovině síť o straně δ . Buď $\mathcal{Q}$ množina všech síťových čtverečků, které mají s M neprázdný průnik. Potom souřadnice těžiště dostaneme

$$T_x \doteq \frac{\sum_{q \in \mathcal{Q}} x \varrho(x, y) \delta^2}{\sum_{q \in \mathcal{Q}} \varrho(x, y) \delta^2}, \quad T_y \doteq \frac{\sum_{q \in \mathcal{Q}} y \varrho(x, y) \delta^2}{\sum_{q \in \mathcal{Q}} \varrho(x, y) \delta^2}.$$

Považujeme-li opět δ za malý element délky ve směru osy x a také y , t.j. $dx = dy = \delta$, máme

$$T_x \doteq \frac{\sum_{q \in \mathcal{Q}} x \varrho(x, y) \delta^2}{\sum_{q \in \mathcal{Q}} \varrho(x, y) \delta^2} \rightarrow \frac{\iint_M x \varrho(x, y) dx dy}{\iint_M \varrho(x, y) dx dy},$$

$$T_y \doteq \frac{\sum_{q \in \mathcal{Q}} y \varrho(x, y) \delta^2}{\sum_{q \in \mathcal{Q}} \varrho(x, y) \delta^2} \rightarrow \frac{\iint_M y \varrho(x, y) dx dy}{\iint_M \varrho(x, y) dx dy}.$$

Dostali jsme tedy vzorce

$$T_x = \frac{\iint_M x \varrho(x, y) dx dy}{\iint_M \varrho(x, y) dx dy}, \quad T_y = \frac{\iint_M y \varrho(x, y) dx dy}{\iint_M \varrho(x, y) dx dy}.$$

Víme již, že $m = \iint_M \varrho(x, y) dx dy$ je hmotnost tenké desky. Dále se zavádí označení

$$S_y = \iint_M x \varrho(x, y) dx dy, \quad S_x = \iint_M y \varrho(x, y) dx dy$$

a S_x se nazývá statický moment tenké desky vzhledem k ose y a podobně S_y se nazývá statický moment tenké desky vzhledem k ose x . Lze tedy psát

$$T_x = \frac{S_y}{m}, \quad T_y = \frac{S_x}{m}.$$

PŘÍKLAD 7.5. Buď $M := \{[x, y]; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ tenká deska s hustotou $\varrho(x, y) = y$. Vypočtěte souřadnice těžiště.

Řešení. Namalujme si danou oblast. Viz obrázek 4. Integrály budeme počítat převodem do polárních souřadnic. Zřejmě

$$m = \iint_M y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \sin \varphi dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} \sin \varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{3} [-\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Dále

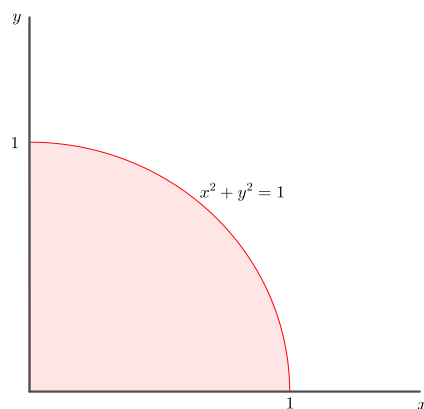
$$S_x = \iint_M y^2 dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} \sin^2 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{4} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

a

$$S_y = \iint_M xy dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 \sin \varphi \cos \varphi dr d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}.$$



OBRÁZEK 4. Těžiště nehomogenní oblasti.

Z toho máme konečně

$$T_x = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}, \quad T_y = \frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{1}{3}} = \frac{3\pi}{16}.$$

Tedy

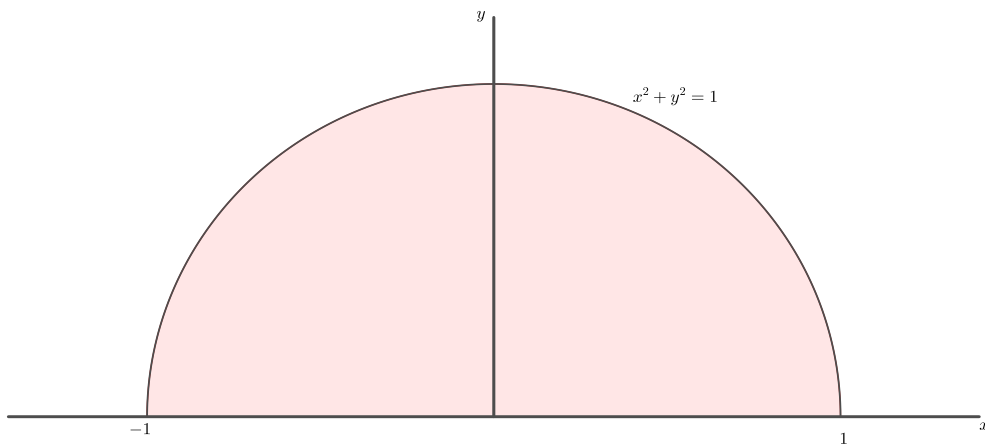
$$T = \left[\frac{3}{8}, \frac{3\pi}{16} \right].$$

□

PŘÍKLAD 7.6. Buď $M := \{[x, y]; y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ tenká deska s hustotou $\varrho(x, y) = 1$. Vypočtěte souřadnice těžiště.

Řešení. Viz obrázek 5. Podle vzorečků je

$$\begin{aligned} m &= \iint_M dx dy = \int_0^\pi \int_0^1 r dr d\varphi = \int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\varphi = \frac{1}{2} [\varphi]_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



OBRÁZEK 5. Těžiště homogenní oblasti.

Dále

$$\begin{aligned} S_x &= \iint_M y \, dx dy = \int_0^\pi \int_0^1 r \sin \varphi \, r \, dr d\varphi = \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{3} [-\cos \varphi]_0^\pi = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} S_y &= \iint_M x \, dx dy = \int_0^\pi \int_0^1 r \cos \varphi \, r \, dr d\varphi = \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} [\sin \varphi]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Poznamejme, že S_y počítat nemusíme, to je vidět ze symetrie. Z toho máme konečně

$$T_x = \frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0, \quad T_y = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}.$$

Tedy

$$T = \left[0, \frac{4}{3\pi} \right].$$

□

5. Momenty setrvačnosti tenké desky

Nechť je v rovině dána soustava n hmotných bodů s polohovými vektory $r_i = (x_i, y_i)$ a s hmotnostmi m_i a přímka p , kterou nazýváme osou rotace. Označme d_i vzdálenost i -tého bodu od p . Začne-li tato soustava bodů rotovat kolem osy p v prostoru, je moment setrvačnosti systému roven

$$I_p = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2.$$

Buď dána tenká deska (rovinný obrazec) M nepravidelné hustoty $\varrho(x, y)$ a osa p . Označme $d(x, y)$ vzdálenost bodu $[x, y]$ od osy p . Lze snadno odvodit pomocí předchozího vzorce pro soustavu hmotných bodů, že začne-li tato tenká deska rotovat kolem osy p v prostoru, je moment setrvačnosti systému roven

$$I_p = \iint_M d^2(x, y) \varrho(x, y) dx dy.$$

Pokud p je buď osa x nebo osa y , máme speciálně

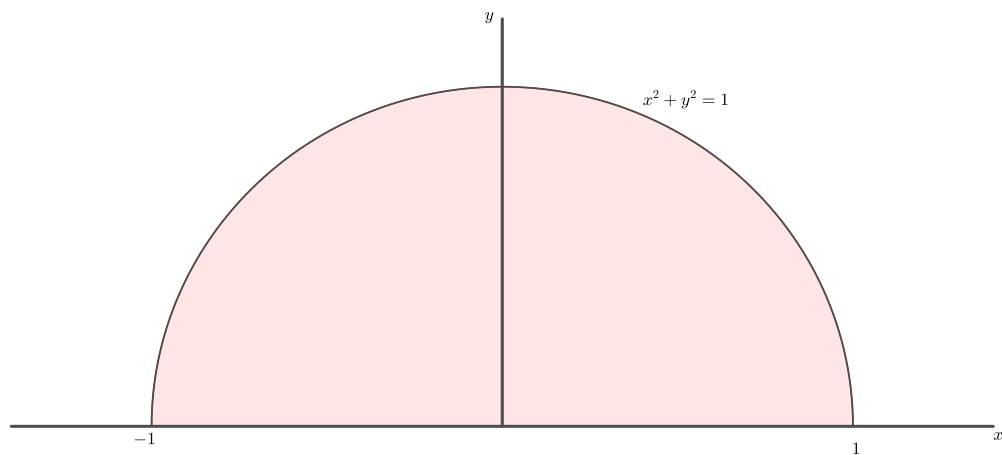
$$I_x = \iint_M y^2 \varrho(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_M x^2 \varrho(x, y) dx dy.$$

PŘÍKLAD 7.7. Buď $M := \{[x, y]; y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ tenká deska s hustotou $\varrho(x, y) = 1$. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose x .

Řešení. Oblast je namalovaná na obrázku 6. Podle vzorce je

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_M y^2 dx dy = \int_0^\pi \int_0^1 r^2 \sin^2 \varphi r dr d\varphi = \int_0^\pi \sin^2 \varphi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^\pi = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

□



OBRÁZEK 6. Moment setrvacnosti homogenní oblasti.

Trojný integrál.

1. Definice Riemannova trojného integrálu

Analogicky jako dvojný integrál zavedeme trojný. Buď $M \subset \mathbb{R}^3$ (představte si třeba bramboru) omezená množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce, kterou můžeme chápat jako rozložení hustoty v množině M (později si o tom povíme víc). Naším cílem bude definovat nějakým přijatelným způsobem hmotnost "tělesa" $T := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; [x, y] \in M, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$.

Nejprve se naučíme integrovat přes krychli. Předpokládejme tedy, že M je nějaká krychle $[-l, l] \times [-l, l] \times [-l, l] = [-l, l]^3$. Zvolme $N \in \mathbb{N}$ a vytvořme v krychli M krychlovou síť takovou, že každá krychle má stranu $h := 2l/n$. Množinu krychlí této sítě označme $\mathfrak{C}_h$.

DEFINICE 8.1. *Definujeme*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(f, n) &= \sum_{Q \in \mathfrak{C}_h} \inf_{[x, y] \in Q} f(x, y) h^3, \\ \mathcal{H}(f, n) &= \sum_{Q \in \mathfrak{C}_h} \sup_{[x, y] \in Q} f(x, y) h^3.\end{aligned}$$

Je jasné, že "hmotnost" T (značit to budeme $m(M)$) je mezi $\mathcal{D}(f, h)$ a $\mathcal{H}(f, h)$. Zřejmě je

$$0 < m < n \Rightarrow \mathcal{D}(f, 2^{-m}) \leq \mathcal{D}(f, 2^{-n}) \quad \wedge \quad \mathcal{D}(f, 2^{-m}) \geq \mathcal{D}(f, 2^{-n}).$$

Tedy existují limity

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}) \quad \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}(f, 2^{-n}), \\ (\mathcal{H}) \quad \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}(f, 2^{-n}).\end{aligned}$$

DEFINICE 8.2. *Výrazy $(\mathcal{D}) \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$ a $(\mathcal{H}) \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$ se nazývají dolní a horní Riemannovy integrály z funkce f přes čtverec M .*

Poznamenejme, že kladnost funkce f na začátku byla jen optická záležitost, stačí skutečně jenom omezenost f na M . Umíme tedy definovat pro omezenou množinu M a omezenou f na M horní a dolní Riemannův integrál. Nyní máme vše potřebné pro definici Riemannova integrálu.

DEFINICE 8.3. Buď dána $M \subset \mathbb{R}^3$ omezená a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce. Říkáme, že f je Riemannovsky integrovatelná, pokud

$$(\mathcal{D}) \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = (\mathcal{H}) \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$$

a definujeme Riemannův integrál

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz := (\mathcal{D}) \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz.$$

Nyní definujeme Riemannův integrál přes obecnou omezenou množinu. Buď $M \subset \mathbb{R}^3$ omezená a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce jako na začátku. Udělejme domluvu, že funkci f rozšíříme 0 na celé $\mathbb{R}^3$ a toto rozšíření označíme $\tilde{f}$. Protože M je omezená, existuje krychle $[-l, l]^3$ taková, že $M \subset [-l, l]^3$. Uvědomme si, že $\tilde{f}$ je díky rozšíření definována všude v krychli $C := [-l, l]^3$.

DEFINICE 8.4. Buď dána $M \subset \mathbb{R}^3$ omezená. Definujeme Riemannův integrál

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz := \iiint_M \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz.$$

pokud tento integrál existuje.

Další věta nám říká základní vlastnosti Riemannova integrálu, všechny integrály v ní existují.

VĚTA 8.5.

$$\begin{aligned} & \iiint_M (a f(x, y, z) + b g(x, y, z)) dx dy dz \\ &= a \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz + b \iiint_M g(x, y, z) dx dy dz, \\ f(x, y, z) \leq g(x, y, z) &\Rightarrow \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_M g(x, y, z) dx dy dz, \\ M \cap N = \emptyset &\Rightarrow \iiint_{M \cup N} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_M f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_N f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Nyní si můžeme definovat "objem" či (trojrozměrnou) míru množiny M .

DEFINICE 8.6. Buď dána $M \subset \mathbb{R}^3$ omezená. Definujeme $V(M)$ (míru množiny M)

$$V(M) := \iiint_M dx dy dz,$$

pokud tento integrál existuje. V takovém případě říkáme, že M je měřitelná.

Za zmínku stojí následující věta.

VĚTA 8.7. *Nechť M, N jsou měřitelné. Pak*

$$M \subset N \Rightarrow 0 \leq V(M) \leq V(N),$$

$$M \cap N = \emptyset \Rightarrow V(M \cup N) = V(M) + V(N).$$

Velmi často se nacházíme v situaci, že M je nějaká "oblast v prostoru se spojitou hranicí" (např koule, elipsoid, kvádr, čtyřstěn, bramboroid či nějaké jejich průniky) a funkce f je spojitá na $\overline{M}$ (to je M i s její hranicí). Potom automaticky existuje Riemannův integrál. Podobně jako pro dvojný integrál nebudeme toto tvrzení formulovat jako větu, budeme to řešit intuitivně.

2. Fubiniova věta

Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ a $x \in \mathbb{R}$. Označme symbolem $M_1(x)$ řez množiny M rovinou rovnoběžnou s osami y, z jdoucí bodem $[x, 0, 0]$, t.j.

$$M_1(x) := \{[t, s, u] \in \mathbb{R}^3; t = x, [t, s, u] \in M\}.$$

Pro $y \in \mathbb{R}$ označme symbolem $M_2(y)$ řez množiny M rovinou rovnoběžnou s osami x, z jdoucí bodem $[0, y, 0]$, t.j.

$$M_2(y) := \{[t, s, u] \in \mathbb{R}^3; s = y, [t, s, u] \in M\}$$

a pro $z \in \mathbb{R}$ označme symbolem $M_3(z)$ řez množiny M rovinou rovnoběžnou s osami x, y jdoucí bodem $[0, 0, z]$, t.j.

$$M_3(z) := \{[t, s, u] \in \mathbb{R}^3; u = z, [t, s, u] \in M\}.$$

Je-li dána $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ omezená, má smysl uvažovat pro $x, y, z \in \mathbb{R}$ dvojrozměrné Riemannovy integrály

$$\iint_{M_1(x)} f(x, y, z) dy dz, \quad \iint_{M_2(y)} f(x, y, z) dx dz, \quad \iint_{M_3(z)} f(x, y, z) dx dy.$$

Následující věta nám dává praktický návod, jak trojrozměrné integrály počítat.

VĚTA 8.8. *Nechť M omezená v prostoru a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce a $M \subset [a, b]^3$. Nechť existuje Riemannův integrál $\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz$ a existují Riemannovy integrály $\iint_{M_1(x)} f(x, y, z) dy dz$ pro každé $x \in [a, b]$. Pak*

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{M_1(x)} f(x, y, z) dy dz \right) dx.$$

Podobně, nechť existují Riemannovy integrály $\int_{M_2(y)} f(x, y, z) dx dz$ pro každé $y \in [a, b]$, pak

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{M_2(y)} f(x, y, z) dx dz \right) dy$$

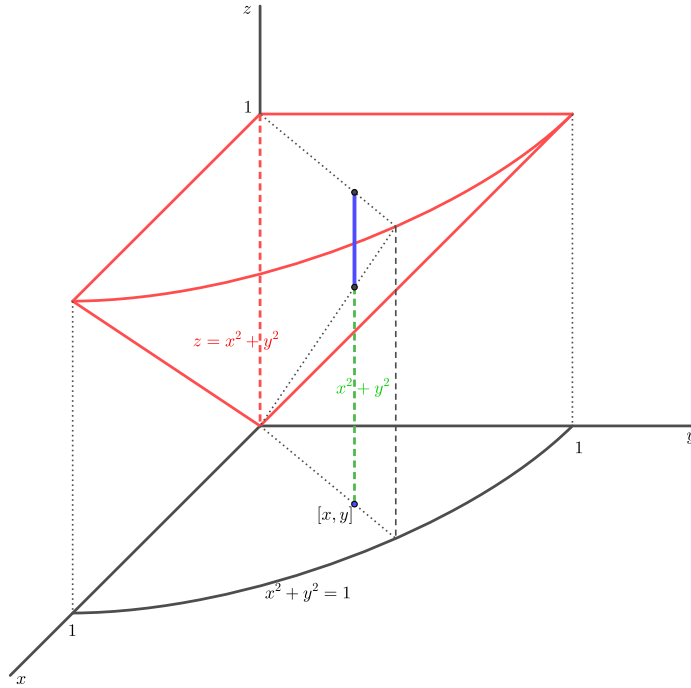
a nechť existují Riemannovy integrály $\int_{M_3(z)} f(x, y, z) dx dy$ pro každé $z \in [a, b]$, pak

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\iint_{M_3(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz.$$

Předchozí věta vlastně říká, že prakticky můžeme přehodit pořadí integrace.

PŘÍKLAD 8.9. Vypočítejte $\iiint_M xyz dx dy dz$, kde $M = \{[x, y, z]; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

Řešení. Namalujme si oblast, přes kterou integrujeme. Viz obrázek 1. Podíváme-li se na danou (červeně ohraničenou) oblast shora, vidíme čtvrtkruh Ω , jehož popis je $x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$. Na obrázku 1 vidíme, že pro pevně zvolené $[x, y] \in \Omega$ se z pohybuje po modré úsečce, tj. meze pro z v závislosti na x, y jsou dány nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Potom lze psát



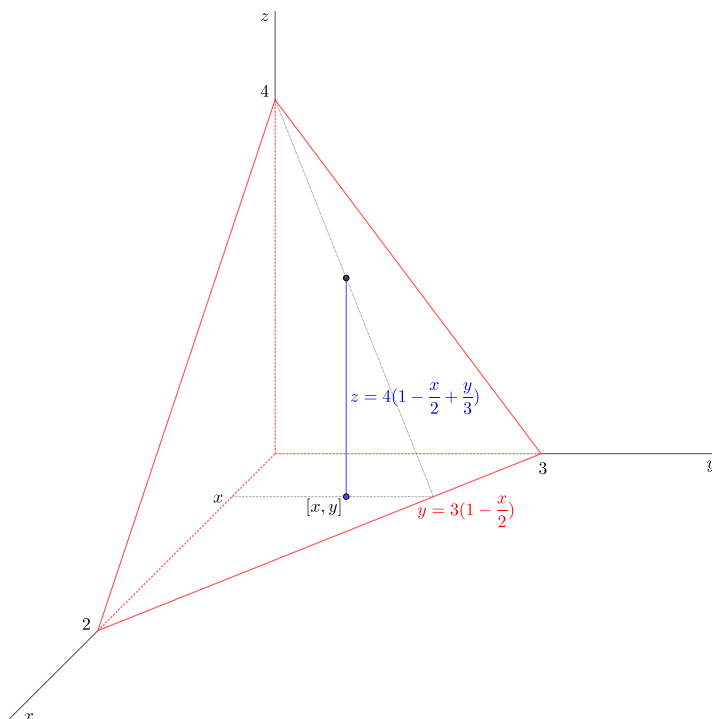
OBRÁZEK 1. Trojný integrál.

$$\begin{aligned}
 \iiint_M xyz dx dy dz &= \iint_{\Omega} \left(\int_{x^2+y^2}^1 xyz dz \right) dy dx = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} xyz^2 dz \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1} dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} xy(1 - (x^2 + y^2)^2) dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cos \varphi \sin \varphi (1 - r^4) r dr d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \cos \varphi \sin \varphi (r^3 - r^7) dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^8}{8} \right]_0^1 d\varphi \\
 &= \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{16} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{32}.
 \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 8.10. Vypočítejte $\iiint_M dx dy dz$, kde $M = \{[x, y, z]; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} \leq 1\}$.

Řešení. Opět si namalujme oblast, přes kterou integrujeme. Viz obrázek 2. Podíváme-li se na danou (červeně ohraničenou) oblast shora, vidíme trojúhelník Ω , jehož popis je $x \geq 0, y \geq 0, x/2 + y/3 \leq 1$. Na obrázku 2 vidíme, že pro pevně zvolené $[x, y] \in \Omega$ se z pohybuje po modré úsečce, tj. meze pro z v závislosti na x, y jsou dány nerovnostmi $0 \leq z \leq 4(1 - x/2 - y/3)$. Potom lze psát



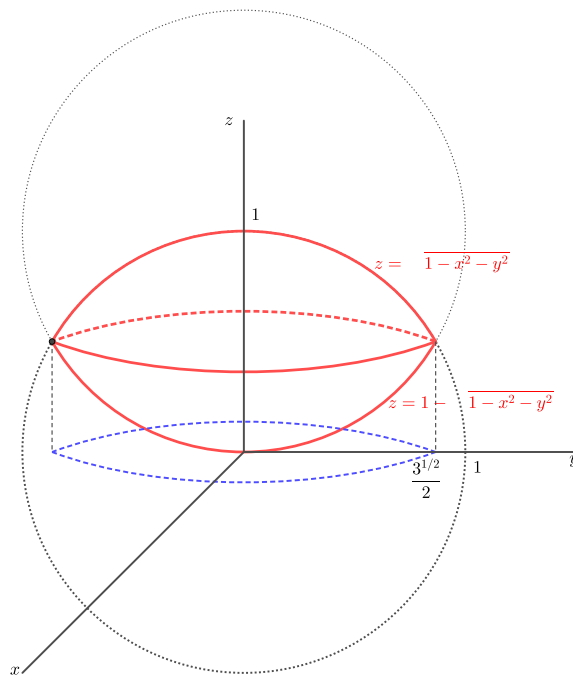
OBRÁZEK 2. Trojný integrál přes čtyřstěn.

$$\begin{aligned}
 \iiint_M dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^{3(1-\frac{x}{2})} \int_0^{4(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3})} dz dy dx \\
 &= 4 \int_0^2 \int_0^{3(1-\frac{x}{2})} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right) dy dx = 4 \int_0^2 \left[y - \frac{xy}{2} - \frac{y^2}{6}\right]_0^{3(1-\frac{x}{2})} dx \\
 &= 4 \int_0^2 \left(3(1 - \frac{x}{2}) - \frac{3x(1-\frac{x}{2})}{2} - \frac{9(1-\frac{x}{2})^2}{6}\right) dx = 4 \int_0^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2\right) dx \\
 &= 4 \left[\frac{3x}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{8}\right]_0^2 = 4.
 \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 8.11. Vypočítejte $\iiint_M z^2 dx dy dz$, kde $M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$.

Řešení. Opět si namalujeme oblast, přes kterou integrujeme. Viz obrázek 3. Podíváme-li se na danou (červeně ohraničenou) oblast shora, vidíme kružnici Ω se středem v $[0, 0]$ a poloměrem $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Na obrázku 3 vidíme, že pro pevně zvolené $[x, y] \in \Omega$ se z pohybuje od $1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ do $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Potom lze psát



OBRÁZEK 3. Trojný integrál přes "čočku".

$$\begin{aligned}
 \iiint_M z^2 dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}} \int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz dx dy \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy \\
 &= \frac{1}{3} \iint_{x^2+y^2 \leq \frac{3}{4}} (\sqrt{1-x^2-y^2})^3 - (1-\sqrt{1-x^2-y^2})^3 dx dy \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} (\sqrt{1-r^2})^3 - (1-\sqrt{1-r^2})^3 r dr d\varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\sqrt{3}/2} (\sqrt{1-r^2})^3 - (1 - \sqrt{1-r^2})^3 r dr = \left| \begin{array}{l} t = 1 - r^2 \\ dt = -2r dr \end{array} \right| \\
&= \frac{\pi}{3} \int_{\frac{1}{4}}^1 (\sqrt{t})^3 - (1 - \sqrt{t})^3 = \frac{\pi}{3} \int_{\frac{1}{4}}^1 (2t^{3/2} - 3t + 3t^{1/2} - 1) dt \\
&= \frac{\pi}{3} \left[\frac{4}{5} t^{5/2} - \frac{3}{2} t^2 + 2t^{3/2} - t \right]_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{\pi}{3} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{2} + 2 - 1 - \left(\frac{4}{5} \frac{1}{32} - \frac{3}{32} + \frac{2}{8} - \frac{1}{4} \right) \right) \\
&= \frac{\pi}{3} \left(\frac{3}{10} + \frac{11}{160} \right) = \frac{59\pi}{480}.
\end{aligned}$$

□

3. Rafinovaný příklad pro zvědavce

Tento příklad je určen jenom pro zajímavost. Jedná se o jednonásobný integrál, tj. učivo druhého semestru. Nicméně metody probrané ve druhém semestru nestačí pro výpočet tohoto integrálu, neboť se nám nepodaří najít primitivní funkci ve tvaru konečného vzorečku. O to překvapivější je fakt, že navzdoru tomu se dá tento integrál přesně spočítat. K výpočtu ale použijeme dokonce trojný integrál a k nalezení myšlenky řešení je potřeba vyvinout značnou vynalézavost.

PŘÍKLAD 8.12. *Vypočtěte*

$$\int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^2 dx.$$

Řešení. Pišme:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right)^2 dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-tx} dt \right)^2 dx = \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-tx} dt \right) \left(\int_0^1 e^{-sx} dx \right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-tx} dt \right) \left(\int_0^1 e^{-sx} ds \right) dx = \int_0^\infty \left(\int_0^1 \int_0^1 e^{-tx} e^{-sx} dt ds \right) dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 e^{-(t+s)x} dt ds dx = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\infty e^{-(t+s)x} dx dt ds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left[-\frac{e^{-(t+s)x}}{t+s} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dt ds}{t+s} = \int_0^1 [\ln(t+s)]_{t=0}^{t=1} ds \\
&= \int_0^1 (\ln(1+s) - \ln s) ds = \int_0^1 \ln \left(1 + \frac{1}{s} \right) ds = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & v = \ln \left(1 + \frac{1}{s} \right) \\ u = s & v' = \frac{1}{1+\frac{1}{s}} \left(-\frac{1}{s^2} \right) \end{array} \right| \\
&= \left[s \ln \left(1 + \frac{1}{s} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 s \frac{1}{1+\frac{1}{s}} \left(-\frac{1}{s^2} \right) ds = \ln 2 + \int_0^1 \frac{1}{1+s} ds \\
&= \ln 2 + [\ln(1+s)]_0^1 = 2 \ln 2.
\end{aligned}$$

□

Věta o substituci

Jedná se o analogii věty o substituce ve dvojném integrálu, proto budeme postupovat již rychleji. Buď $M, N \subset \mathbb{R}^3$ dvě omezené množiny, $N \subset [-l, l]^3 := C$, a necht' $\varphi_1(u_1, u_2, u_3)$, $\varphi_2(u_1, u_2, u_3)$ a $\varphi_3(u_1, u_2, u_3)$ jsou spojitě diferencovatelné funkce definované na C takové, že

$$M = \{[\varphi_1(u_1, u_2, u_3), \varphi_2(u_1, u_2, u_3), \varphi_3(u_1, u_2, u_3)]; [u_1, u_2, u_3] \in N\}.$$

Pak říkáme, že funkce $\varphi_1(u_1, u_2, u_3)$, $\varphi_2(u_1, u_2, u_3)$, $\varphi_3(u_1, u_2, u_3)$ jsou transformace N na M , pokud

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3}(u_1, u_2, u_3) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3}(u_1, u_2, u_3) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2}(u_1, u_2, u_3) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3}(u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix} \neq 0$$

pro každé $[u_1, u_2, u_3] \in N$. Vynecháme v dalším argumenty u_1, u_2, u_3 . Označme ještě Jakobián transformace

$$J(u_1, u_2, u_3) = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \right|.$$

Trochu si vysvětlíme význam Jacobiánu. Je to analogické jako ve dvou proměnných. Všimneme si obrázku 1. Předpokládejme, že T je lineární transformace, tj.

$$x = (x_1, x_2, x_3) = T(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = Au + b.$$

Na levé straně je dána krychle třemi vektory $X_1 - X$, $X_2 - X$, $X_3 - X$, které se zobrazí na vektory $T(X_1) - T(X)$, $T(X_2) - T(X)$, $T(X_3) - T(X)$. Píšeme-li $X = [u_1, u_2, u_3]$, $X_1 = [u_1 + d, u_2, u_3]$, $X_2 = [u_1, u_2 + d, u_3]$, $X_3 = [u_1, u_2, u_3 + d]$, dostaneme

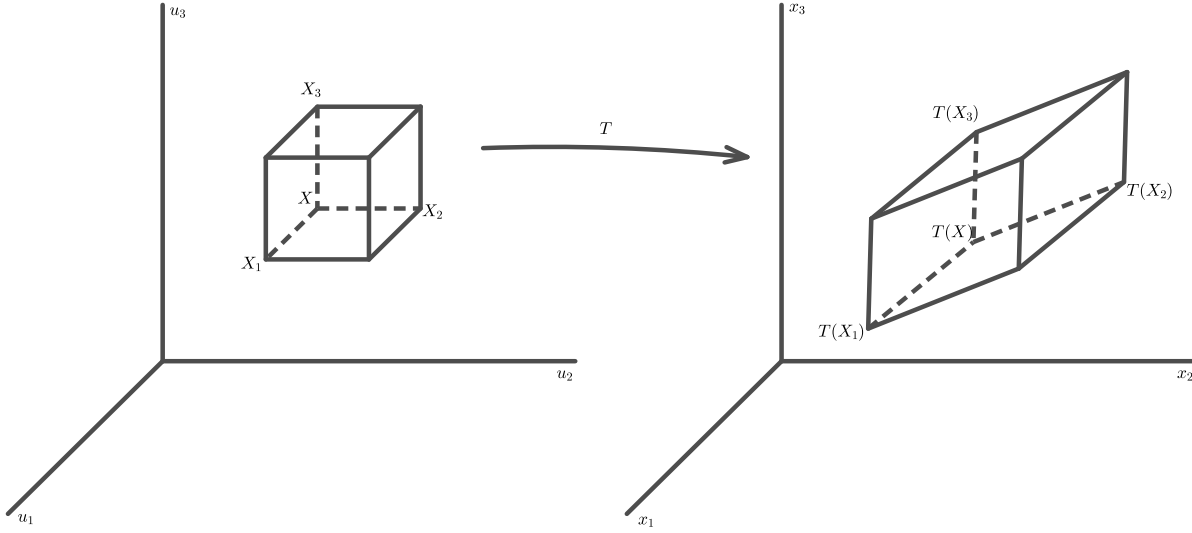
$$\begin{aligned} T(X_1) - T(X) &= A(u_1 + d, u_2, u_3) + b - A(u_1, u_2, u_3) - b = A(d, 0, 0) \\ &= dA(1, 0, 0) = d(a_{11}, a_{21}, a_{31}). \end{aligned}$$

Analogicky

$$\begin{aligned} T(X_2) - T(X) &= d(a_{12}, a_{22}, a_{32}) \\ T(X_3) - T(X) &= d(a_{13}, a_{23}, a_{33}). \end{aligned}$$

Objem krychle na levé straně obrázku 1 je $V = d^3$. Z lineární algebry víme, že objem rovnoběžníku na pravé straně obrázku 1 je

$$V' = \left| \begin{pmatrix} da_{11} & da_{12} & da_{13} \\ da_{21} & da_{22} & da_{23} \\ da_{31} & da_{32} & da_{33} \end{pmatrix} \right| = d^3 |\det(A)| = V |\det(A)|.$$



OBRÁZEK 1. Transformace krychle ve 3D.

Vezmeme nyní obecnou transformaci $T : N \rightarrow M$,

$$T(u_1, u_2, u_3) = (\varphi_1(u_1, u_2, u_3), \varphi_2(u_1, u_2, u_3), \varphi_3(u_1, u_2, u_3)).$$

Považujeme-li krychličku na levé straně obrázku 1 za velmi malou, tj. $X = [u_1, u_2, u_3]$, $X_1 = [u_1 + du_1, u_2, u_3]$, $X_2 = [u_1, u_2 + du_2, u_3]$, $X_3 = [u_1, u_2, u_3 + du_3]$, dostaneme z Taylorova rozvoje T po zanedbání vyšších řádů

$$\begin{aligned} T(X_1) - T(X) &= T(u_1 + du_1, u_2, u_3) - T(u_1, u_2, u_3) \\ &= T(u_1, u_2, u_3) + \frac{\partial T}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3)du_1 - T(u_1, u_2, u_3) \\ &= \frac{\partial T}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3)du_1 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3), \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1}(u_1, u_2, u_3) \right) du_1. \end{aligned}$$

Analogicky

$$\begin{aligned} T(X_2) - T(X) &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(u_1, u_2, u_3), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(u_1, u_2, u_3), \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2}(u_1, u_2, u_3) \right) du_2 \\ T(X_3) - T(X) &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3}(u_1, u_2, u_3), \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3}(u_1, u_2, u_3), \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3}(u_1, u_2, u_3) \right) du_3. \end{aligned}$$

Objem DV''' „malého rovnoběžnostěnu“ na pravé straně obrázku 1 je potom

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3} \end{pmatrix} \right| du_1 du_2 du_3 = J(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3.$$

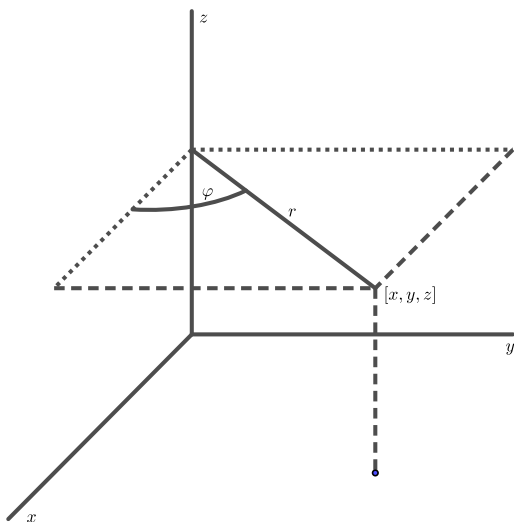
A to je také výraz, který se objevuje ve větě o substituci pro trojný integrál.

VĚTA 9.1. *Buď $M, N \subset \mathbb{R}^3$ dvě omezené množiny, $N \subset [-l, l]^3 := C$, a nechť trojice funkcí $\varphi_1(u_1, u_2, u_3), \varphi_2(u_1, u_2, u_3), \varphi_3(u_1, u_2, u_3)$ je transformace N na M . Buď $f(x_1, x_2, x_3) : M \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na M . Pak*

$$\begin{aligned} & \iiint_M f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \iiint_N f(\varphi_1(u_1, u_2, u_3), \varphi_2(u_1, u_2, u_3), \varphi_3(u_1, u_2, u_3)) J(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3. \end{aligned}$$

1. Cylindrické souřadnice

Zafixujeme-li jednu z os, třeba z a proměnné x, y převedeme do polárních sužnic, dostaneme tzv. cylindrické souřadnice. Jejich výhodou je, že převádějí válec (s osou rovnoběžnou s jednou souřadnicovou osou) na kvádr. Z obrázku 2 lehce



OBRÁZEK 2. Cylindrické souřadnice.

uvidíme, že pro bod $[x, y, z]$ platí $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. To jsou cylindrické souřadnice pro osu z . Další varianty (s osami x a y jsou uvedeny dále).

$$\begin{array}{lll} x = r \cos \varphi, & x = r \cos \varphi, & x = x \\ y = r \sin \varphi, & y = y, & z = r \cos \varphi \\ z = z & z = r \sin \varphi & z = r \sin \varphi. \end{array}$$

Jakobián je

$$J = r.$$

Spočítejme Jakobián.

$$J(r, \varphi) = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Napišme ještě jeden důležitý vzorec:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2.$$

PŘÍKLAD 9.2. Vypočítejte $\iiint_M z dx dy dz$, kde $M = \{[x, y, z]; \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.

Řešení. Integrujeme přes válec s osou z a podstavou $x^2 + y^2 \leq 1$, viz obrázek 3. Převodem do cylindrických souřadnic

$$\begin{array}{l} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z \end{array}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \iiint_M z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 z r dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} r dr d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

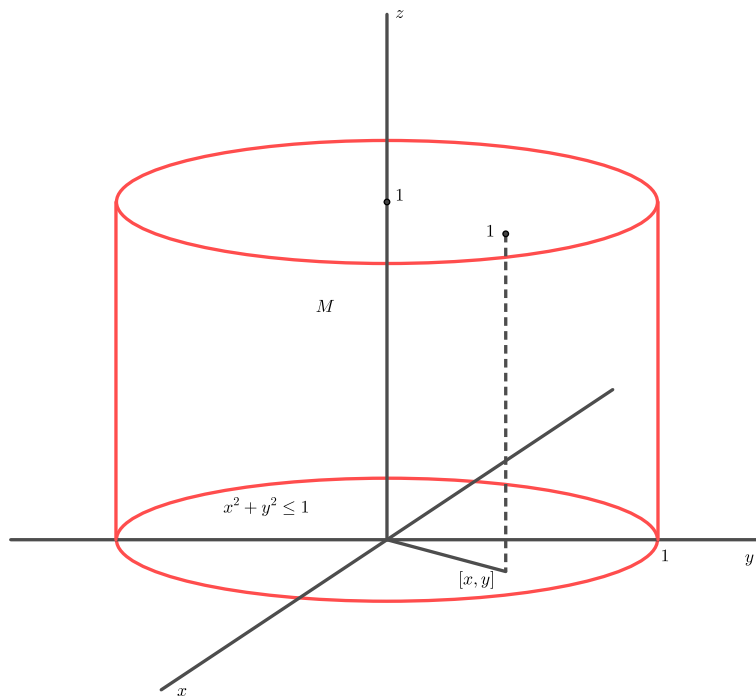
Příklad ale lze řešit i kombinací Fubiniovy věty a substituce. Nejprve integrujeme přes z a dostaneme dvojný integrál, který vypočítáme pomocí polárních souřadnic. Viz následující postup. Ty dva postupy jsou v podstatě stejné.

$$\begin{aligned} \iiint_M z dx dy dz &= \int_{x^2+y^2 \leq 1} \int_0^1 z dz dx dy = \int_{x^2+y^2 \leq 1} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 9.3. Vypočítejte $\iiint_M x^2 y^2 z dx dy dz$, kde $M = \{[x, y, z]; \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, z \leq 1\}$.

Řešení. Převedeme daný integrál do cylindrických souřadnic. Viz obrázek 4. Z obrázku vidíme, že pro dané $[x, y]$ z dolního kruhu zapsaného pomocí nerovnosti

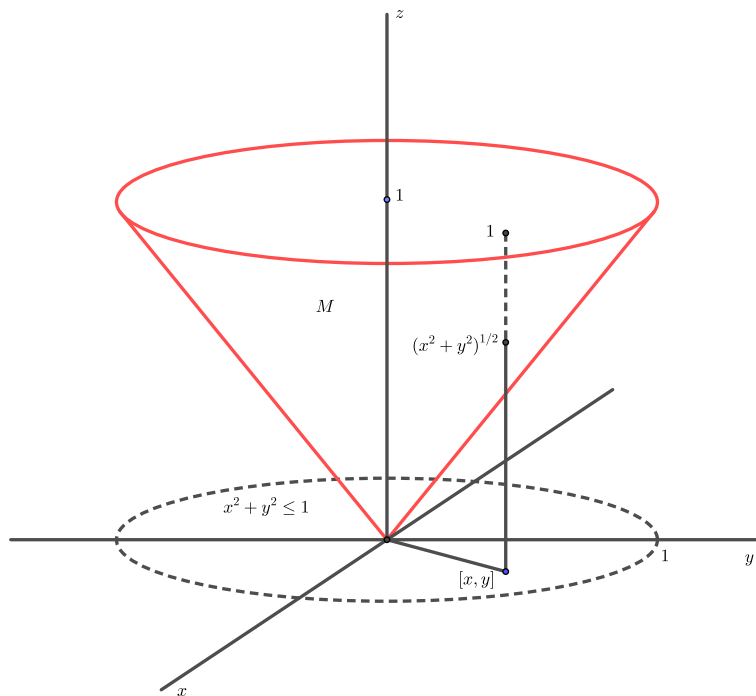
OBRÁZEK 3. Oblast M .

$x^2 + y^2 \leq 1$ se z pohybuje mezi $\sqrt{x^2 + y^2}$ a 1. Tedy integrál můžeme přepsat do cylindrických souřadnic

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$z = z$$

OBRÁZEK 4. Oblast M .

a dostaneme použitím vztahu $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{aligned}
 \iiint_M x^2 y^2 z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 r^2 \cos^2 \varphi \, r^2 \sin^2 \varphi \, r \, z \, dz dr d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=r}^1 dr d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^5 - r^7) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{6} - \frac{r^8}{8} \right]_{r=0}^1 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{48} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{48} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{4.48} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 2\varphi) \, d\varphi = \frac{1}{4.48} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \, d\varphi \\
 &= \frac{1}{4.48} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{1}{8.48} \left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{8.48} = \frac{\pi}{192}.
 \end{aligned}$$

Příklad ale lze opět řešit i kombinací Fubiniovy věty a substituce. Nejprve integrujeme přes z a dostaneme dvojný integrál, který vypočítáme pomocí polárních

souřadnic.

$$\begin{aligned}
 \iiint_M x^2 y^2 z dx dy dz &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 x^2 y^2 z dz dx dy \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y^2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1} dx dy = \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 y^2 (1 - x^2 - y^2) dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos^2 \varphi r^2 \sin^2 \varphi (1 - r^2) r dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (r^5 - r^7) dr d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{6} - \frac{r^8}{8} \right]_{r=0}^1 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{48} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{1}{48} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\
 &= \frac{1}{4 \cdot 48} \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{4 \cdot 48} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \\
 &= \frac{1}{4 \cdot 48} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{8 \cdot 48} \left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{8 \cdot 48} = \frac{\pi}{192}.
 \end{aligned}$$

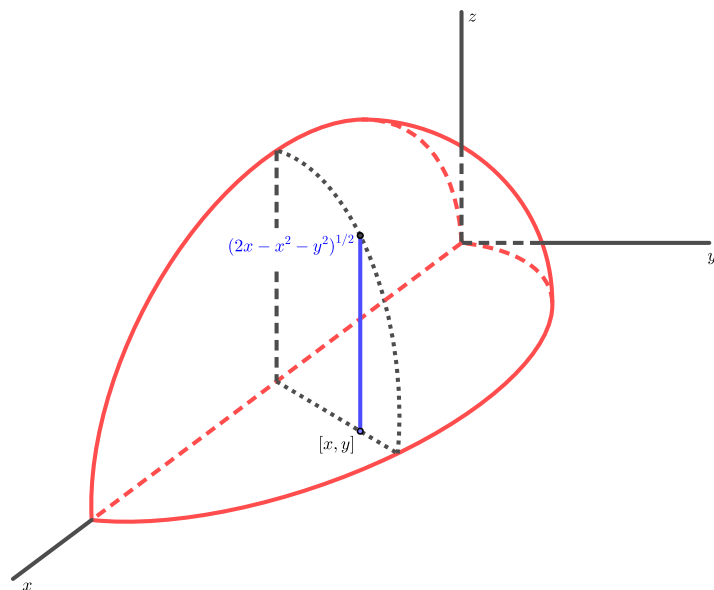
□

PŘÍKLAD 9.4. Vypočítejte $\iiint_M z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, kde $M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Řešení. Upravme podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$ ekvivalentně na tvar $(x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Z toho je vidět, že integrační oblast čtvrtina koule se středem $[1, 0, 0]$ a poloměrem 1. Viz obrázek 5. Projekce M do roviny xy je kruh se středem v $[0, 0]$ a poloměrem 1. Zvolíme-li $[x, y]$, splňuje z podmínku $0 \leq z \leq 2x - x^2 - y^2$. Převědme tento integrál do cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi, \\
 y &= r \sin \varphi, \\
 z &= z.
 \end{aligned}$$

Bod $[x, y]$ splňuje $x^2 + y^2 \leq 2x$, tj. v polárních souřadnicích je $\varphi \in [0, \pi/2]$ a pro r dostaneme $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \leq 2r \cos \varphi$, což dává $0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$. Pro z pak máme $0 \leq z \leq \sqrt{2r \cos \varphi - r^2}$. Po převodu integrálu do cylindrických souřadnic

OBRÁZEK 5. Oblast M .

dostaneme

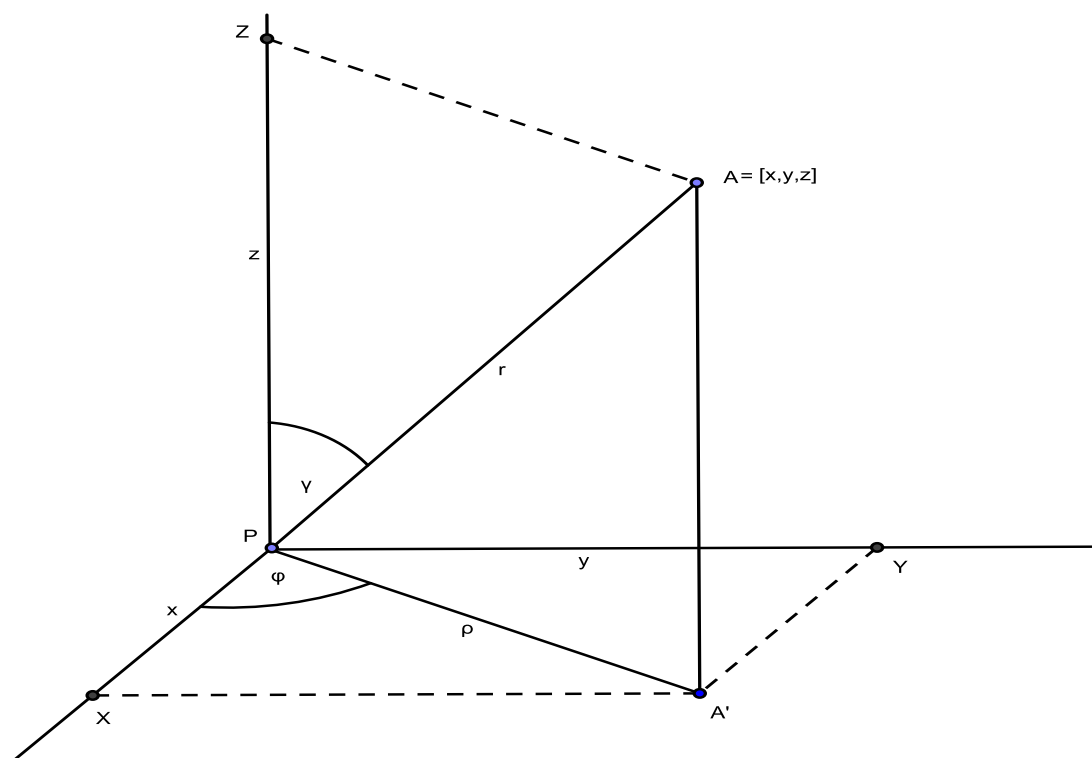
$$\begin{aligned}
 \iiint_M z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2r \cos \varphi} \int_0^{\sqrt{2r \cos \varphi - r^2}} z r \, rdz dr d\varphi \\
 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2r \cos \varphi} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{2r \cos \varphi - r^2}} r^2 dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2r \cos \varphi} \frac{1}{2} (2r \cos \varphi - r^2) r^2 dr d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2r \cos \varphi} (2r^3 \cos \varphi - r^4) dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{2} \cos \varphi - \frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=2r \cos \varphi} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(8 \cos^5 \varphi - \frac{32 \cos^5 \varphi}{5} \right) d\varphi = \frac{4}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^5 \varphi d\varphi = \frac{4}{5} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi)^2 \cos \varphi d\varphi \\
 &= \frac{4}{5} \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \frac{4}{5} \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \frac{4}{5} \left[t - 2\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{4}{5} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) \\
 &= \frac{32}{75}.
 \end{aligned}$$

□

2. Sférické souřadnice

Na obrázku 6 vidíme bod v prostoru o souřadnicích $[x, y, z]$. Geometricky vidíme, že k určení souřadnic x, y, z nám stačí znát jiné tři veličiny. Jsou to úhel

φ , tj. úhel, který svírá polopřímka PA' s polopřímkou PX , úhel ν , tj. úhel, který svírá polopřímka PA s polopřímkou PZ a vzdálenost r bodu A od počátku.



OBRÁZEK 6. Sférické souřadnice.

Veličinami r, φ, ν je bod $[x, y, z]$ určen. Najdeme příslušné vztahy. Na obrázku 6 vidíme, že ϱ (vzdálenost bodů PA') splňuje

$$\frac{x}{\varrho} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{\varrho} = \sin \varphi.$$

Dále vidíme, že

$$\frac{\rho}{r} = \sin \nu, \quad \frac{z}{r} = \cos \nu.$$

Z těchto vztahu plyne, že sférické souřadnice jsou dány rovnicemi

$$x = r \cos \varphi \sin \nu,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \nu,$$

$$z = r \cos \nu.$$

Pak

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \nu + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \nu + r^2 \cos^2 \nu \\ &= r^2 \sin^2 \nu (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \nu \\ &= r^2 \sin^2 \nu + r^2 \cos^2 \nu = r^2 (\sin^2 \nu + \cos^2 \nu) = r^2. \end{aligned}$$

Spočteme Jacobián $J := J(r, \varphi, \nu)$.

$$\begin{aligned} J(r, \varphi, \nu) &= \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \nu} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \nu} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \nu} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \nu & -r \sin \varphi \sin \nu & r \cos \varphi \cos \nu \\ \sin \varphi \sin \nu & r \cos \varphi \sin \nu & r \sin \varphi \cos \nu \\ \cos \nu & 0 & -r \sin \nu \end{pmatrix} \right| \\ &= | -r^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \nu - r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \nu \sin \nu - (r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \nu \sin \nu + r^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \nu) | \\ &= | -r^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \nu - r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \nu \sin \nu - r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \nu \sin \nu - r^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \nu | \\ &= | -r^2 \sin^3 \nu (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - r^2 \cos^2 \nu \sin \nu (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) | \\ &= | -r^2 \sin^3 \nu - r^2 \cos^2 \nu \sin \nu | = | -r^2 \sin \nu (\sin^2 \nu + \cos^2 \nu) | = r^2 \sin \nu. \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 9.5. Vypočítejte $\iiint_M z dx dy dz$, kde $M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

Řešení. Daná oblast je polokoule v poloprostoru $z \geq 0$ se středem v počátku a poloměrem 1. Viz obrázek 7. Převědeme daný integrál do sférických souřadnic

$$x = r \cos \varphi \sin \nu,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \nu,$$

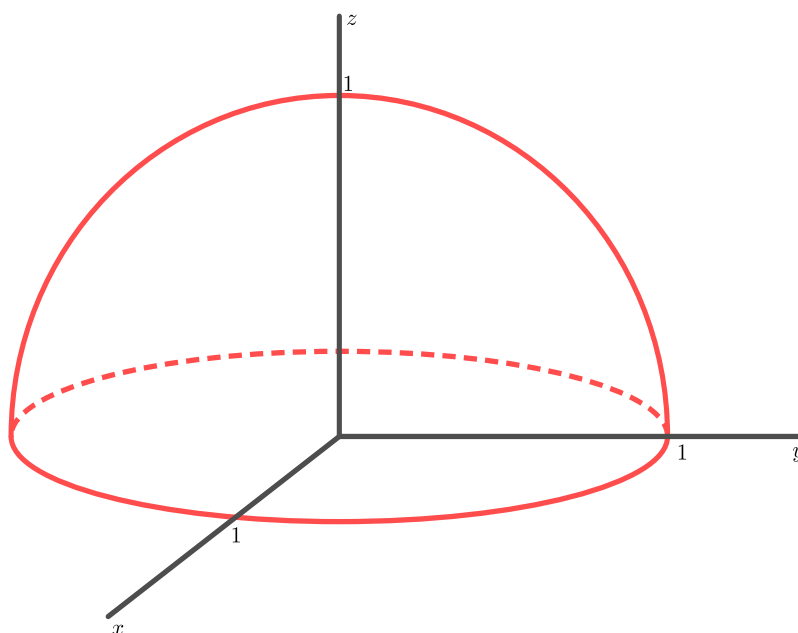
$$z = r \cos \nu.$$

Z obrázku 7 vidíme, že $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\nu \in [0, \pi/2]$ a $r \in [0, 1]$. Pak

$$\begin{aligned} \iiint_M z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \cos \nu \cdot r^2 \sin \nu \, dr d\nu d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \cos \nu \sin \nu \, dr d\nu d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^1 \cos \nu \sin \nu \, d\nu d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \nu \sin \nu \, d\nu d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^2 \nu}{2} \right]_{\nu=0}^{\pi/2} d\varphi = \frac{1}{8} [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

□

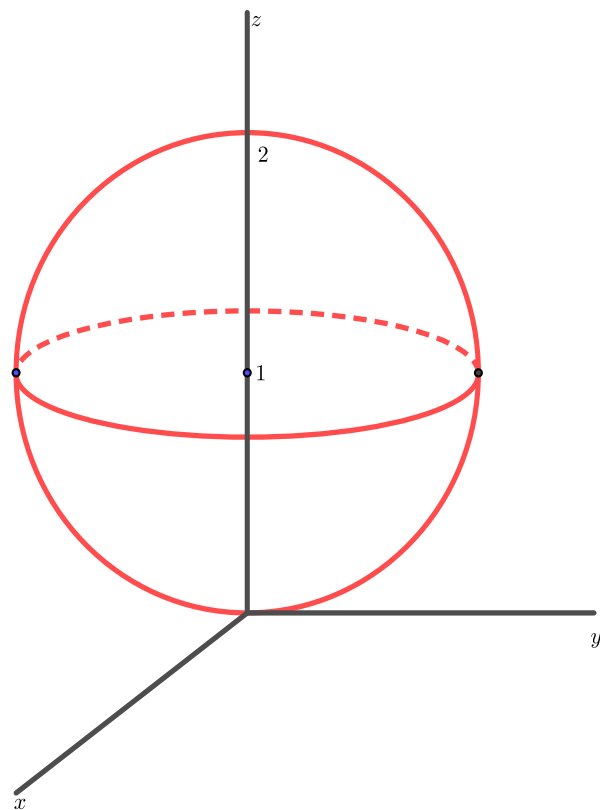
PŘÍKLAD 9.6. Vypočítejte $\iiint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, kde $M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$.



OBRÁZEK 7. Sférické souřadnice.

Řešení. Podmínku $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ si upravíme na tvar $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$. Potom je vidět, že daná oblast je koule v poloprostoru $z \geq 0$ se středem v bodě $[0, 0, 1]$ a poloměrem 1. Viz obrázek 8. Převédeme daný integrál do sférických souřadnic

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \nu, \\y &= r \sin \varphi \sin \nu, \\z &= r \cos \nu.\end{aligned}$$



OBRÁZEK 8. Sférické souřadnice.

Pokud zafixujeme φ a ν , je r závislé na těchto veličinách. Z podmínky $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ dostaneme $r^2 \leq 2r \cos \nu$. Z obrázku 8 vidíme, že $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $\nu \in [0, \pi/2]$. Pak

$$\begin{aligned}
 \iiint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \nu} r^2 \sin \nu dr d\nu d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{2 \cos \nu} \sin \nu d\nu d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \nu \sin \nu d\nu d\varphi \\
 &= 4 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^4 \nu}{4} \right]_{\nu=0}^{\pi/2} d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi = 4 [\varphi]_0^{2\pi} = 8\pi.
 \end{aligned}$$

Můžeme ovšem použít i posunuté sférické souřadnice

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \nu, \\y &= r \sin \varphi \sin \nu, \\z &= 1 + r \cos \nu.\end{aligned}$$

Potom geometricky vidíme, že $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $\nu \in [0, \pi]$ a $r \in [0, 1]$. Jacobián se nemění, protože závisí pouze na derivacích apřičtením jedničky se derivace nemění. Potom

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \nu + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \nu + (1 + r \cos \nu)^2 \\&= r^2 \sin^2 \nu (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + 1 + 2r \cos \nu + r^2 \cos^2 \nu \\&= r^2 \sin^2 \nu + 1 + 2r \cos \nu + r^2 \cos^2 \nu = r^2 (\sin^2 \nu + \cos^2 \nu) + 1 + 2r \cos \nu \\&= r^2 + 2r \cos \nu + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \sqrt{r^2 + 2r \cos \nu + 1} r^2 \sin \nu dr d\nu d\varphi \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{r^2 + 2r \cos \nu + 1} r^2 \sin \nu d\nu dr d\varphi = \left| \begin{array}{l} t = \cos \nu \\ dt = -\sin \nu d\nu \end{array} \right| \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{-1} \sqrt{r^2 + 2rt + 1} (-r^2) dt dr d\varphi \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \int_{-1}^1 \sqrt{r^2 + 2rt + 1} dt dr d\varphi \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \left[\frac{2}{3} \frac{1}{2r} (r^2 + 2rt + 1)^{3/2} \right]_{t=-1}^{t=1} dr d\varphi \\&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{3} r ((r^2 + 2r + 1)^{3/2} - (r^2 - 2r + 1)^{3/2}) dr d\varphi \\&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r (((r+1)^2)^{3/2} - ((r-1)^2)^{3/2}) dr d\varphi \\&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r (|r+1|^3 - |r-1|^3) dr d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r ((r+1)^3 - (1-r)^3) dr d\varphi \\&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r (r^3 + 3r^2 + 3r + 1 - (1 - 3r + 3r^2 - r^3)) dr d\varphi \\&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r^4 + 6r^2) dr d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{5} r^5 + 2r^3 \right]_{r=0}^{r=1} d\varphi \\&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{12}{5} d\varphi = \frac{4}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8\pi}{5}.\end{aligned}$$

Vidíme, že na volbě metody nezávisí, ale první metoda byla přeci jen rychlejší.

□

PŘÍKLAD 9.7. Vypočítejte $\iiint_M z dx dy dz$, kde $M = \{[x, y, z]; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

Řešení. Převédeme daný integrál do sférických souřadnic

$$x = r \cos \varphi \sin \nu,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \nu,$$

$$z = r \cos \nu.$$

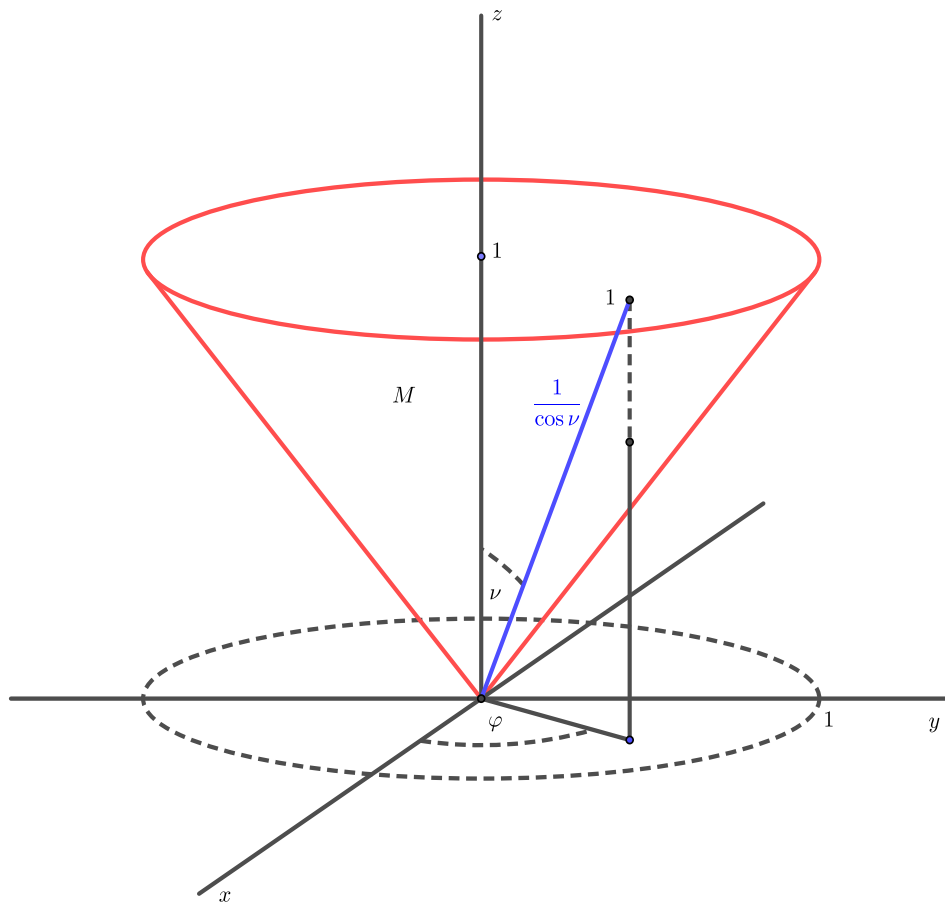
Podívejme se na obrázek 9. Vidíme, že $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\nu \in [0, \pi/4]$. Pokud je φ, ν dané, platí pro r z podmínky $z \leq 1$

$$r \cos \nu \leq 1,$$

tedy

$$r \leq \frac{1}{\cos \nu}.$$

Tedy délka modré čáry na obrázku 9 je $\frac{1}{\cos \nu}$ a integrál se po převedení do sférických souřadnic rovná



OBRÁZEK 9. Kužel ve sférických souřadnicích.

$$\begin{aligned}
\iiint_M z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos \nu} r \cos \nu \, r^2 \sin \nu \, dr d\nu d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{1/\cos \nu} \cos \nu \sin \nu \, d\nu d\varphi \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \nu}{\cos^3 \nu} \, d\nu d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2 \cos^2 \nu} \right]_{\nu=0}^{\pi/4} d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Můžeme také daný integrál převést do cylindrických souřadnic. Oblast, přes kterou integrujeme, se už objevila v příkladu 9.3. Podívejme se tedy na příslušný obrázek 4 a dostaneme stejnemeze jako v příkladu 9.3. Pak

$$\begin{aligned}
\iiint_M z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 r \, z \, dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=r}^1 dr d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3) \, dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^1 d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Můžeme také daný integrál spočítat klasickou Fubiniho větou.

$$\begin{aligned}
\iiint_M z dx dy dz &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z \, dz dy dx \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^1 dy dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) \, dy dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{-1}^1 \left((1-x^2)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \right) dx \\
&= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2)\sqrt{1-x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t \, dt \end{array} \right| \\
&= \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t \, dt = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, dt = \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2t}{2} \right)^2 dt \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) \, dt = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2} \right) dt \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2}t + 2\sin 2t + \frac{\sin 4t}{8} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že máme mnoho možností, jak integrál spočítat.

□

3. Zobecněné sférické souřadnice

Pokud integrujeme přes elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ nebo přes jeho část, je často výhodné použít tzv. zobecněné sférické souřadnice

$$\begin{aligned}
x &= a \varrho \cos \varphi \sin \nu, \\
y &= b \varrho \sin \varphi \sin \nu, \\
z &= c \varrho \cos \nu.
\end{aligned}$$

nebo i posunuté do nějakého středu, viz

$$x = x_0 + a\rho \cos \varphi \sin \nu,$$

$$y = y_0 + b\rho \sin \varphi \sin \nu,$$

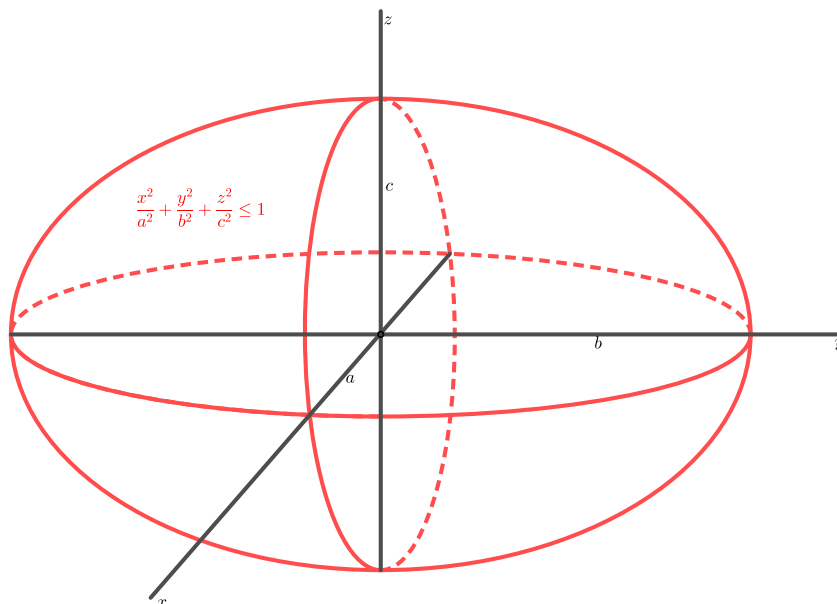
$$z = z_0 + c\rho \cos \nu.$$

Snadno lze spočítat $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \rho^2$ a

$$J = abc\rho^2 \sin \nu.$$

PŘÍKLAD 9.8. Vypočtete objem elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

Integrační oblast je znázorněna na obrázku 10. Zřejmě $V = \iiint_M dx dy dz$,



OBRÁZEK 10. Elipsoid.

kde $M = \{[x, y, z]; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$. Převědeme daný integrál do zobecněných sférických souřadnic a máme

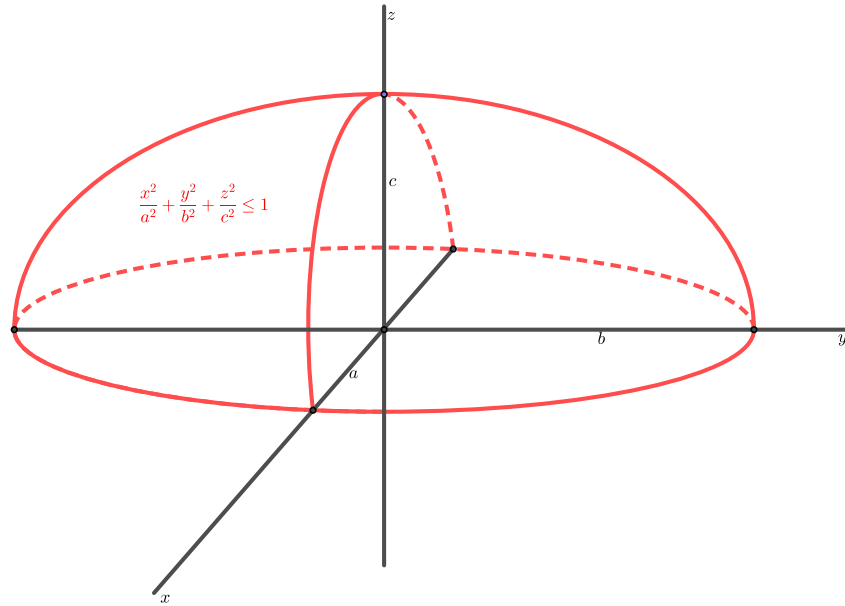
$$\begin{aligned} V &= \iiint_M dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 abc\rho^2 \sin \nu \, d\rho d\nu d\varphi \\ &= 2\pi abc \int_0^\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \sin \nu \, d\nu = \frac{2}{3}\pi abc \left[-\cos \nu \right]_0^\pi = \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 9.9. Nechť $M = \{[x, y, z]; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \leq 1, z \geq 0\}$. Vypočítejte

$$\iiint_M z^3 \, dx dy dz.$$

Řešení. Integrační oblast je znázorněna na obrázku 11. Převědeme daný in-



OBRÁZEK 11. Polovina elipsoidu.

tegrál do zobecněných sférických souřadnic

$$x = 2\varrho \cos \varphi \sin \nu,$$

$$y = 3\varrho \sin \varphi \sin \nu,$$

$$z = 4\varrho \cos \nu,$$

$$J = 2.3.4\varrho^2 \sin \nu$$

a máme

$$\begin{aligned} \iiint_M z^3 \, dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 4^3 \varrho^3 \cos^3 \nu \, 2.3.4\varrho^2 \sin \nu \, d\varrho d\nu d\varphi \\ &= 2\pi \, 2.3.4^4 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\varrho^6}{6} \right]_0^1 \cos^3 \nu \sin \nu \, d\nu = 2.4^4 \pi \int_0^{\pi/2} \cos^3 \nu \sin \nu \, d\nu \\ &= 2.4^4 \pi \left[-\frac{\cos^4 \nu}{4} \right]_0^{\pi/2} = 2.4^3 \pi = 128\pi. \end{aligned}$$

□

Aplikace trojného integrálu.

1. Hmotnost tělesa

Buď dáno v prostoru těleso M všelijakého tvaru (nazvěme ho třeba "bramboroid", tj. těleso tvaru brambory), o němž víme, že má nějaké rozložení hustoty. Co to ale je? Jde o to, definovat hustotu, která se mění v každém bodě. Jde tedy o funkci $\varrho : M \rightarrow \mathbb{R}$. Co to ale je hustota v bodě? Představme si nějaký "bramboroid" M s proměnnou hustotou $\varrho(x, y, z)$. Zvolme bod $[x, y, z] \in M$. Vezmeme malý kvádr se středem v $[x, y, z]$ se stranami dx, dy, dz . Pokud jsou rozměry dx, dy, dz velmi malé, je možné považovat hustotu v kvádru za konstantní a rovnou $\varrho(x, y, z)$. Hmotnost tohoto kvádru je potom rovna $\varrho(x, y, z)dxdydz$ a hmotnost pak dostaneme počítáme přes celé M , tj.

$$m = \sum_{[x,y,z] \in M} \varrho(x, y, z)dxdydz.$$

Limitním přechodem $dx, dy, dz \rightarrow 0$ dostaneme z konečné sumy integrál

$$m(M) = \iiint_M \varrho(x, y, z)dxdydz.$$

PŘÍKLAD 10.1. *Vypočítejte hmotnost nehomogenního rotačního kužele s poloměrem podstavy R a výškou H , jestliže hustota v každém bodě kužele je rovna vzdálenosti tohoto bodu od roviny rovnoběžné s podstavou kužele a procházející vrcholem kužele.*

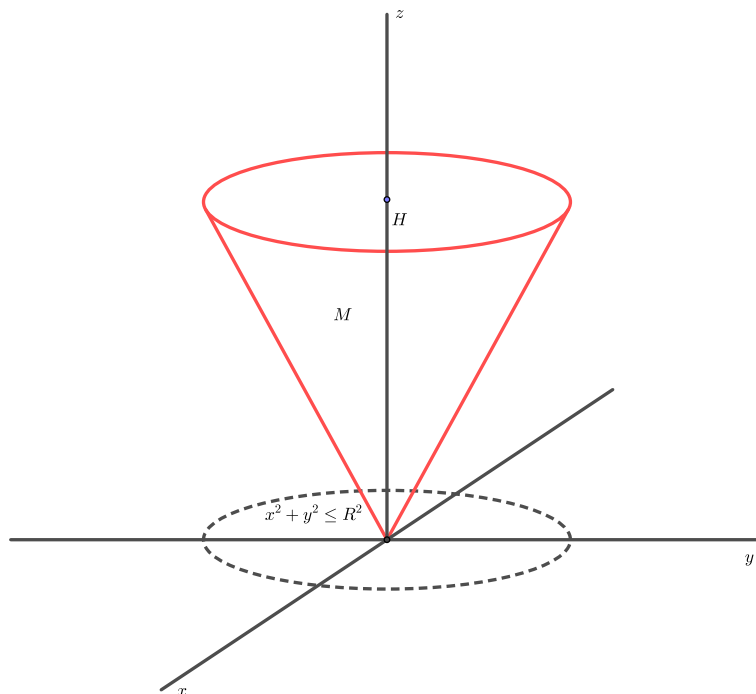
Řešení. Daný kužel postavme na špičku do počátku soustavy souřadnic tak, že osa kužele leží v ose z . Viz obrázek 1. Potom $\varrho(x, y, z) = z$ a daný kužel je dán

$$K = \left\{ [x, y, z]; \frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H \right\}.$$

Hmotnost je potom

$$\begin{aligned} m &= \iiint_M z \, dxdydz = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \int_{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^H z \, dzdxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^H dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(\frac{H^2}{2} - \frac{H^2}{R^2} \frac{x^2+y^2}{2} \right) dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \left(\frac{H^2}{2} - \frac{H^2}{R^2} \frac{r^2}{2} \right) r dr d\varphi = 2\pi \left[\frac{H^2 r^2}{4} - \frac{H^2 r^4}{R^2 \cdot 6} \right]_0^R \\ &= 2\pi \left(\frac{H^2 R^2}{4} - \frac{H^2 R^4}{R^2 \cdot 6} \right) = \pi \left(\frac{H^2 R^2}{2} - \frac{H^2 R^2}{3} \right) = \frac{\pi}{6} H^2 R^2. \end{aligned}$$

□



OBRÁZEK 1. Kužel.

2. Objem tělesa

Pokud je dáno homogenní těleso M s hustotou $\varrho(x, y, z) = 1$, je hmotnost tělesa číselně rovna jeho objemu. Tento fakt je tak zřejmý, že ho není potřeba zdůvodňovat.

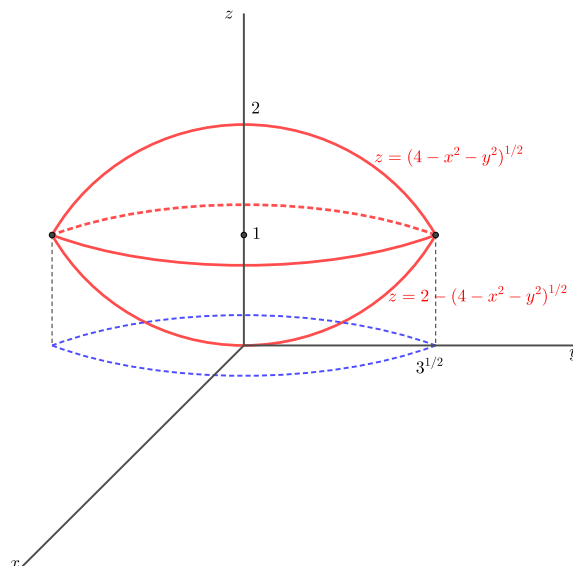
PŘÍKLAD 10.2. *Vypočtěte objem tělesa $M = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z\}$.*

Řešení. Těleso je znázorněno na obrázku 2. Modře je namalovaná projekce dané "čočky" do roviny xy . Je to kruh. Jeho poloměr spočteme z podmínky $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. To znamená, že $x^2 + y^2 = 3$ a ten modrý kruh má poloměr $\sqrt{3}$. Užitím Fubiniovy věty a následně polárních souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned} V &= \iiint_M dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 3} \int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dx dy \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 3} (\sqrt{4-x^2-y^2} - 1) dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-r^2} - 1) r dr d\varphi \\ &= 4\pi \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2} - \frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{10}{3}\pi. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 10.3. *Vypočtěte objem koule s poloměrem R .*



OBRÁZEK 2. Čočka.

Řešení. Použijme sférické souřadnice

$$x = r \cos \varphi \sin \nu,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \nu,$$

$$z = r \cos \nu.$$

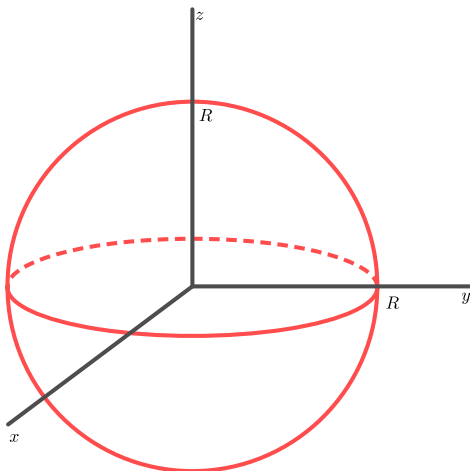
Z obrázku 3 vidíme $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\nu \in [0, \pi]$ a $r \in [0, 1]$. Potom

$$\begin{aligned} V &= \iiint_M dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \nu dr d\nu d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \sin \nu d\nu = \frac{2}{3} \pi R^3 \int_0^\pi \sin \nu d\nu = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 10.4. Vypočtete objem tělesa $M = \{[x, y, z]; z \geq x^2 + y^2, z^2 \leq xy, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Řešení. Zde si obrázek kreslit nebudeme, není to nijak jednoduché těleso. Ale ze zadání máme $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{xy}$. To znamená dvě věci. Jednak to dává podmínky na z a potom vidíme, že $x^2 + y^2 \leq \sqrt{xy}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, což je podmínka na projekci tělesa do roviny xy . Oblast $x^2 + y^2 \leq \sqrt{xy}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ si můžeme namalovat. Viz obrázek 4. Popis této červené oblasti v rovině je v polárních souřadnicích dán vztahem $x^2 + y^2 \leq \sqrt{xy}$, tj. $r^2 \leq \sqrt{r \cos \varphi} r \sin \varphi$, z čehož máme



OBRÁZEK 3. Koule.

$\varphi \in [0, \pi/2]$ a $r \in [0, \sqrt{\cos \varphi \sin \varphi}]$. Tedy lze psát

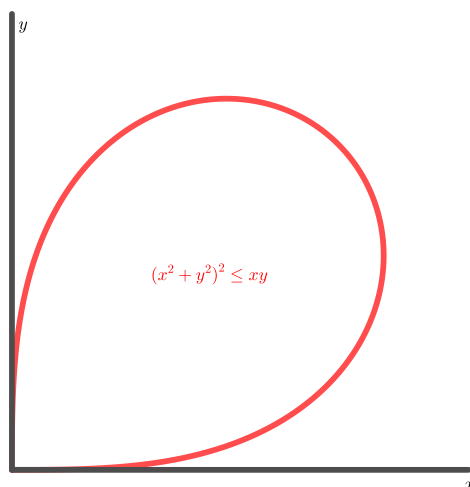
$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_M dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq \sqrt{xy}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{xy}} dz dx dy \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq \sqrt{xy}} (\sqrt{xy} - (x^2 + y^2)) dx dy \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\cos \varphi \sin \varphi}} (r \sqrt{\cos \varphi \sin \varphi} - r^2) r dr d\varphi \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3} \sqrt{\cos \varphi \sin \varphi} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{\cos \varphi \sin \varphi}} d\varphi \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{96}.
 \end{aligned}$$

□

3. Těžiště tělesa

Z mechaniky hmotných bodů víme, že pokud máme soustavu hmotných bodů o hmotnostech m_i a radius vektorech r_i , je vektor těžiště dán vzorcem

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$



OBRÁZEK 4. Oblast v rovině.

Buď dáno v prostoru těleso M všelijakého tvaru (nazvěme ho třeba "bramboroid", tj. těleso tvaru brambory), o němž víme, že má nějaké rozložení hustoty. Chceme spočítat souřadnice jeho těžiště. Zvolme bod $[x, y, z] \in M$. Vezmeme malý kvádr se středem v $[x, y, z]$ se stranami dx, dy, dz . Je jasné, že radius vektor bodu $[x, y, z]$ je (x, y, z) . Těžiště má pak souřadnice

$$T = \frac{\sum_{x,y,z} (x, y, z) \varrho(x, y, z) dx dy dz}{\sum_{x,y,z} \varrho(x, y, z) dx dy dz}.$$

Limitním přechodem $dx, dy, dz \rightarrow 0$ dostaneme integrál

$$T = \frac{\iiint_M (x, y, z) \varrho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_M \varrho(x, y, z) dx dy dz}.$$

Pokud tento vzorec rozepíšeme do souřadnic, dostaneme

$$T = \left[\frac{\iiint_M x \varrho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_M \varrho(x, y, z) dx dy dz}, \frac{\iiint_M y \varrho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_M \varrho(x, y, z) dx dy dz}, \frac{\iiint_M z \varrho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_M \varrho(x, y, z) dx dy dz} \right].$$

Označme

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iiint_M z \varrho(x, y, z) dx dy dz, \\ S_{xz} &= \iiint_M y \varrho(x, y, z) dx dy dz, \\ S_{yz} &= \iiint_M x \varrho(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Tyto výrazy se nazývají statické momenty vzhledem k rovinám xy, xz, yz .

Vysvětlíme si trochu, jak si to pamatovat. Necht' je dána rovina ϱ . Označme $d(x, y, z)$ vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od roviny ϱ . Pak statický moment tělesa M vzhledem o rovině ϱ definujeme vzorcem

$$S_\varrho = \iiint_M d(x, y, z) \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

Uvažujme nyní roviny xy, yz a xz . Pak ve výrazu pro statický moment S_{xy} je vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od roviny xy . Ale to je právě z , jak je uvedeno ve vzorci.

Již víme, že hmotnost tělesa je

$$m = \iiint_M \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

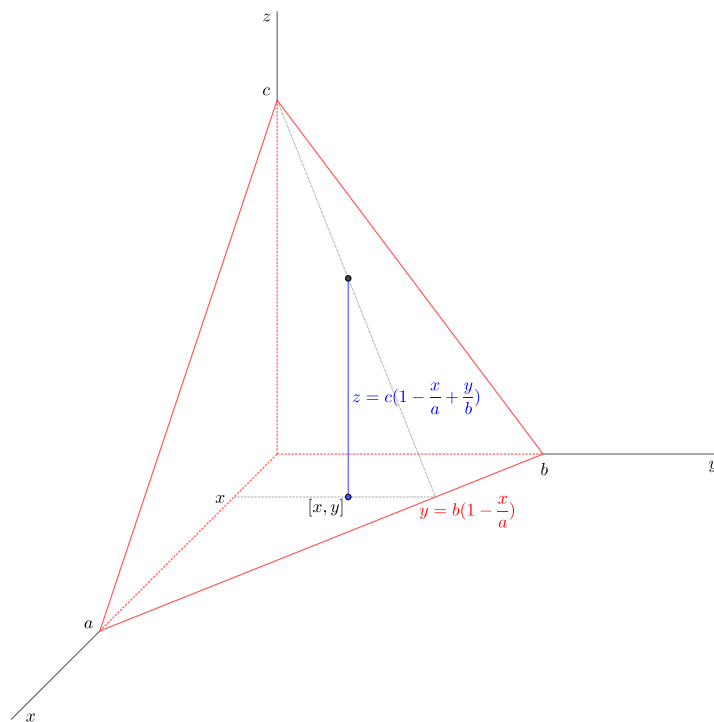
PŘÍKLAD 10.5. *Vypočítejte souřadnice těžiště homogenního tělesa $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1\}$.*

Řešení. Na obrázku 5 je namalovné dané těleso, Jedná se o čtyřstěn. Z obrázku vidíme, že statické momenty a hmotnost jsou

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iiint_M z dx dy dz = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} z dz dy dx \\ &= \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dy dx = \frac{c^2}{2} \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 dy dx \\ &= \frac{c^2}{2} \int_0^a \left(-\frac{b}{3} \right) \left[\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^3 \right]_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx = \frac{bc^2}{6} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} \right)^3 dx \\ &= \frac{bc^2}{6} \left(-\frac{a}{4} \right) \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right)^4 \right]_0^a = \frac{abc^2}{24}. \end{aligned}$$

Cyklickou záměnou mezi a, b, c (nebo si to můžeme spočítat, ale je to zbytečné) dostaneme

$$\begin{aligned} S_{xz} &= \frac{ab^2c}{24}, \\ S_{yz} &= \frac{a^2bc}{24}. \end{aligned}$$



OBRÁZEK 5. Čtyřlístěn.

Ještě potřebujeme hmotnost.

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_M dx dy dz = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dz dy dx \\
 &= \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} [z]_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dy dx = c \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy dx \\
 &= c \int_0^a \left(-\frac{b}{2}\right) \left[\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2\right]_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx = \frac{bc}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx \\
 &= \frac{bc}{2} \left(-\frac{a}{3}\right) \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)^3\right]_0^a = \frac{abc}{6}.
 \end{aligned}$$

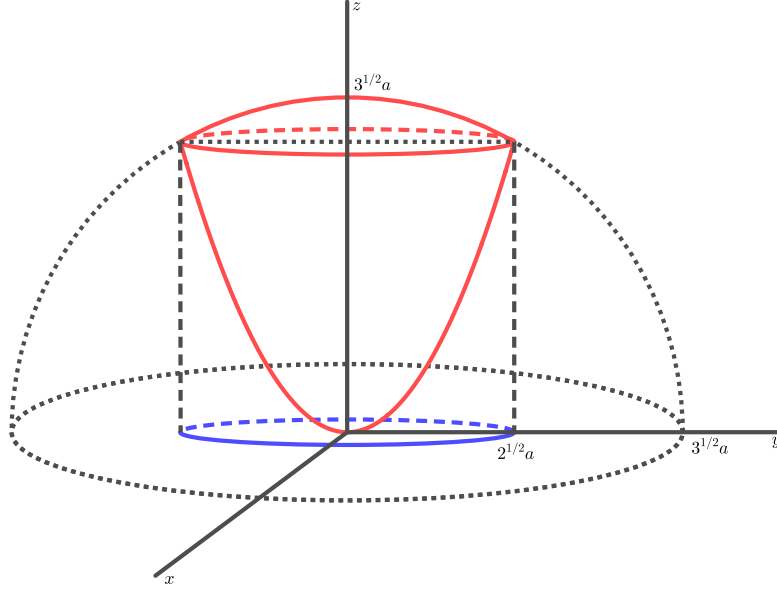
Těžiště má tedy souřadnice

$$T = \left[\frac{\frac{a^2 bc}{24}}{\frac{abc}{6}}, \frac{\frac{ab^2 c}{24}}{\frac{abc}{6}}, \frac{\frac{abc^2}{24}}{\frac{abc}{6}} \right] = \left[\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4} \right].$$

□

PŘÍKLAD 10.6. Vypočítejte souřadnice těžiště homogenního tělesa $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2, x^2 + y^2 \leq 2az\}$.

Řešení. Těleso je průnik koule a rotačního paraboloidu, viz obrázek 6. Zřejmě je díky symetrii $T_x = T_y = 0$. Spočítejme S_{xy} a m . Projekce oblasti do roviny xy



OBRÁZEK 6. Průnik koule a rotačního paraboloidu.

je zřejmý kruh. Spočítejme jeho poloměr ϱ z rovnice

$$z = \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} = \frac{x^2 + y^2}{2a}.$$

Označme $\varrho = x^2 + y^2$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt{3a^2 - \varrho^2} &= \frac{\varrho^2}{2a} \Leftrightarrow 3a^2 - \varrho^2 = \frac{\varrho^4}{4a^2} \Leftrightarrow \varrho^4 + 4a^2\varrho^2 - 12a^4 = 0 \\ \Leftrightarrow (\varrho^2)_{12} &= \frac{1}{2}(-4a^2 \pm \sqrt{16a^4 + 48a^4}) = \frac{1}{2}(-4a^2 \pm 8a^2) = 2a^2. \end{aligned}$$

Tedy $\varrho = a\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \iiint_M z \, dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 2a^2} \int_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} z \, dz dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a\sqrt{2}} \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} z \, r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{a\sqrt{2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} r dr \\ &= \pi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(3a^2 - r^2 - \frac{r^4}{4a^2} \right) r dr = \pi \left[\frac{3a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{24a^2} \right]_0^{a\sqrt{2}} = \frac{5}{3} \pi a^4. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_M z \, dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq 2a^2} \int_{\frac{x^2+y^2}{2a^2}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} dz dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{a\sqrt{2}} \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^{a\sqrt{2}} \left[z \right]_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} r dr \\
 &= 2\pi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(\sqrt{3a^2-r^2} - \frac{r^2}{2a} \right) r dr = 2\pi \left[-\frac{1}{3}(3a^2-r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{8a} \right]_0^{a\sqrt{2}} \\
 &= 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{5}{6} \right) a^3.
 \end{aligned}$$

Tedy

$$T_z = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{\frac{5}{3}\pi a^4}{2\pi(\sqrt{3}-\frac{5}{6})a^3} = \frac{5}{6\sqrt{3}-5}a = \frac{5}{83}(6\sqrt{3}+5)a$$

a

$$T = \left[0, 0, \frac{5}{83}(6\sqrt{3}+5)a \right].$$

□

PŘÍKLAD 10.7. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního tělesa $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$.

Řešení. Těleso je znázorněné na obrázku 7. Zřejmě je díky symetrii $T_x = T_y = 0$. Spočítejme S_{xy} a m . Převodem do sférických souřadnic máme

$$\begin{aligned}
 S_{xy} &= \iiint_M z \, dx dy dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r \cos \nu \, r^2 \sin \nu \, dr d\nu d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^3 \cos \nu \sin \nu \, dr d\nu d\varphi = 2\pi \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \cos \nu \sin \nu \, d\nu \\
 &= \pi \frac{R^4}{2} \left[\frac{\sin^2 \nu}{2} \right]_0^{\pi/2} = \pi \frac{R^4}{4}.
 \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_M dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r^2 \sin \nu \, dr d\nu d\varphi \\
 &= 2\pi \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \nu \, d\nu = 2\pi \frac{R^3}{3} \left[-\cos \nu \right]_0^{\pi/2} = 2\pi \frac{R^3}{3}.
 \end{aligned}$$

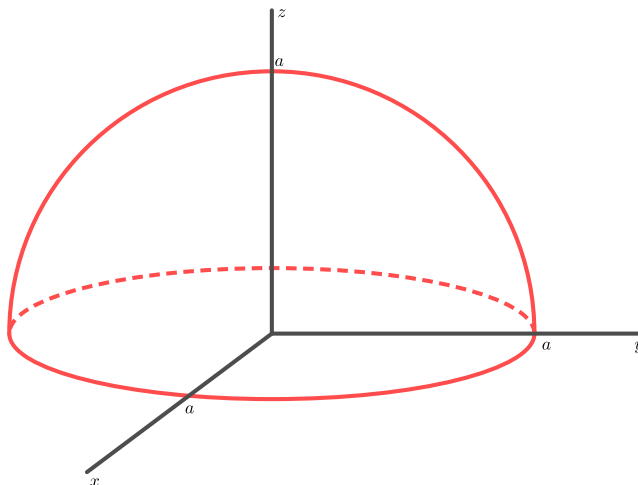
Tedy

$$T_z = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{\pi \frac{R^4}{4}}{2\pi \frac{R^3}{3}} = \frac{3}{8}R$$

a

$$T = \left[0, 0, \frac{3}{8}R \right].$$

□



OBRÁZEK 7. Polokoule.

4. Momenty setrvačnosti tělesa

Nechť máme hmotný bod v prostoru o hmotnosti m a přímkou o (nazýváme ji osou). Označme vzdálenost tohoto bodu od o symbolem d . Pak moment setrvačnosti tohoto bodu vzhledem k ose o je dán výrazem $I_o = md^2$.

Nechť máme soustavu hmotných bodů o hmotnostech m_i , $i = 1, 2, \dots, n$, a osu o . Označme d_i vzdálenosti těchto bodů od osy o . Pak moment setrvačnosti tohoto systému je roven

$$I_o = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2.$$

Buď dáno v prostoru těleso M s proměnnou hustotou $\varrho(x, y, z)$ a nechť je dána příмка o . Označme $d(x, y, z)$ vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od přímký o . Chceme spočítat jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose o . Zvolme bod $[x, y, z] \in M$. Vezmeme malý kvádr se středem v $[x, y, z]$ se stranami dx, dy, dz . Pak moment setrvačnosti tělesa M vzhledem k přímce o je vzorcem

$$I_o = \int \int \int_M d^2(x, y, z) \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

Moment celého systému dostaneme opět součtem, což dává integrál

$$I_o = \sum_{x,y,z} d^2(x, y, z) \varrho(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_M d^2(x, y, z) \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

My budeme ale v praxi počítat jen speciální momenty setrvačnosti, a to vzhledem k souřadnicovým osám. Uvažujme tedy osy x , y a z souřadného systému. Označme I_x , I_y a I_z příslušné momenty setrvačnosti tělesa. Protože vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od přímky x je $\sqrt{y^2 + z^2}$ (podobně od přímky y je $\sqrt{x^2 + z^2}$ a od přímky z je $\sqrt{x^2 + y^2}$), máme

$$I_x = \iiint_M (y^2 + z^2) \varrho(x, y, z) dx dy dz, \quad I_y = \iiint_M (x^2 + z^2) \varrho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_M (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) dx dy dz.$$

PŘÍKLAD 10.8. *Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní koule o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose jdoucí středem.*

Řešení. Viz obrázek 3 z příkladu 10.3. Nezáleží na tom, jakou vezmeme osu, pokud ovšem jde středem koule. Vezmeme třeba osu z . Pak pomocí sférických souřadnic dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \iiint_M (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \nu + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \nu) r^2 \sin \nu dr d\nu d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^3 \nu dr d\nu d\varphi = \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \nu d\nu d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{5} R^5 \int_0^\pi \sin^3 \nu d\nu = \frac{2\pi}{5} R^5 \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{8}{15} \pi R^5 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 10.9. *Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního válce spoloměrem R a o hmotnosti m vzhledem k jeho vlastní ose.*

Řešení. Viz obrázek 3 z příkladu 9.2 (rozdíl je jen v tom, že válec v tomto příkladu má poloměr R a nějakou obecnou výšku H). Osa válce je z . Pak

$$\begin{aligned} I &= \iiint_M (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^H r^2 r dz dr d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R H r^3 dr d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} H R^4 d\varphi = \frac{\pi H R^4}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 H R^2 = \frac{1}{2} m R^2. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 10.10. *Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního kužele spoloměrem R a o hmotnosti m vzhledem k jeho vlastní ose.*

Řešení. Viz obrázek 1 z příkladu 10.1. Osa válce je z . Pak

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_M (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \int_{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^H (x^2 + y^2) dz dx dy \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) \left(H - \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \right) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \left(H - \frac{H}{R}r \right) r dr d\varphi \\
 &= 2\pi \left[\frac{Hr^4}{4} - \frac{H}{R} \frac{r^5}{5} \right]_0^R = 2\pi \left(\frac{HR^4}{4} - \frac{HR^4}{5} \right) = 2\pi \frac{HR^4}{20} \\
 &= 2\pi \left(\frac{Hr^2}{4} - \frac{H}{R} \frac{r^5}{5} \right) = \pi \left(\frac{H^2 R^4}{4} - \frac{H^2 R^2}{3} \right) = \frac{\pi}{6} H^2 R^2 = \frac{3}{10} \frac{1}{3} \pi R^2 H R^2 = \frac{3}{10} m R^2.
 \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 10.11. *Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní krychle o straně a a hmotnosti m vzhledem k přímce, která prochází hranou.*

Řešení. Obrázek ani nemusíme kreslit. To si stačí představit krychli o hraně a v prvním oktantu "nalepenou" na souřadnicové roviny.

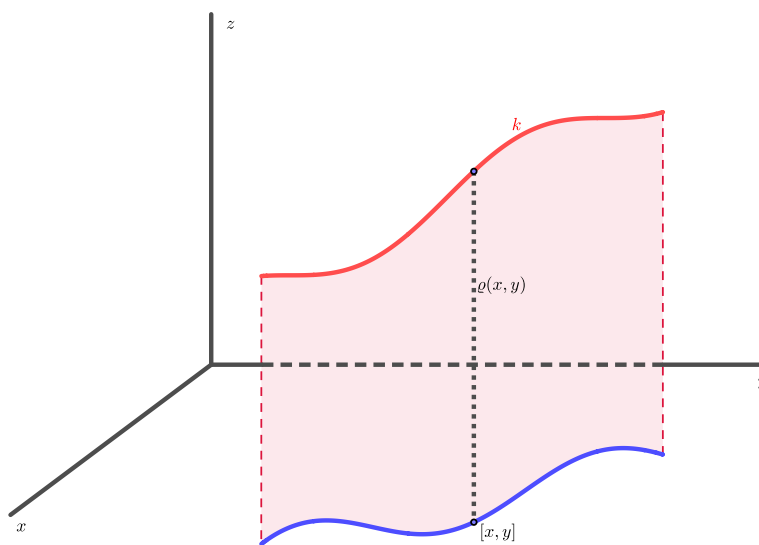
$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_M (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) dz dx dy = a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) dx dy \\
 &= a \int_0^a \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{x=0}^a dy = a \int_0^a a \left(\frac{a^3}{3} + ay^2 \right) dy = a \left[\frac{a^3}{3} y + a \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{2}{3} a^5 = \frac{2}{3} m a^2.
 \end{aligned}$$

□

Křivkový integrál prvního druhu a jeho aplikace.

1. Motivace a definice

Naším úkolem je nyní vyřešit následující problém. Představme si, že si nějaký domácí kutil udělal plechový plot ne zrovna rovný (tedy neleží v rovině) a ještě ke všemu jeho výška není konstantní, zkrátka tu výšku řezal náhodně. Teď chce ten plot z jedné strany nabarvit a potřebuje vědět, kolik barvy má koupit. Matematicky to lze popsat takto: Je daná křivka v rovině xy a v každém bodě $[x, y]$ té křivky je dána výška toho plotu, tj. je dána funkce dvou proměnných $\varrho(x, y)$. Viz obrázek 1.



OBRAZEK 1. Křivka.

Na tomto obrázku vidíme "křivý" plot s proměnnou výškou $\varrho(x, y)$. Chceme ten plot nabarvit fialovou barvou. Kolik barvy budeme potřebovat? Je celkem jasné, že množství barvy je úměrné plošnému obsahu toho plotu. Jak to ale spočítat?

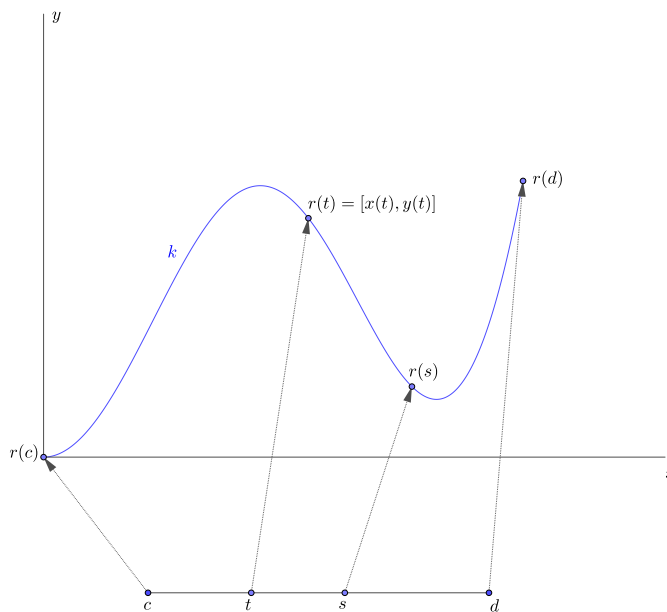
Vršek toho plotu vytvoří křivku v prostoru, to je ta červená čára, a daná křivka v rovině je ta modrá čára. Nejprve je potřeba vědět, jaký je tvar té křivky, to jest té modré křivky. Intuitivně tušíme, že křivka v rovině je popsána zobrazením, které každému bodu nějaké úsečky přiřadí bod v rovině. Tedy modrá křivka by měla být popsána parametricky $[x(t), y(t)]$, $t \in [c, d]$. Ale funkce $x(t), y(t)$ nemohou být libovolné. Měly by být aspoň spojité a vlastně ani to nestačí. Hladká křivka (tj. křivka mající tečnou přímku) v rovině je popsána následující definicí.

DEFINICE 11.1. *Nechť $r(t) = [x(t), y(t)]$ je spojité zobrazení z $[c, d]$ do $\mathbb{R}^2$ a nechť $r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňuje:*

- (i) $x(t), y(t)$ jsou spojité v $[c, d]$
- (ii) existují $x'(t), y'(t)$ v každém intervalu $[c, d]$ (v bodech c, d se myslí jednostranné derivace).

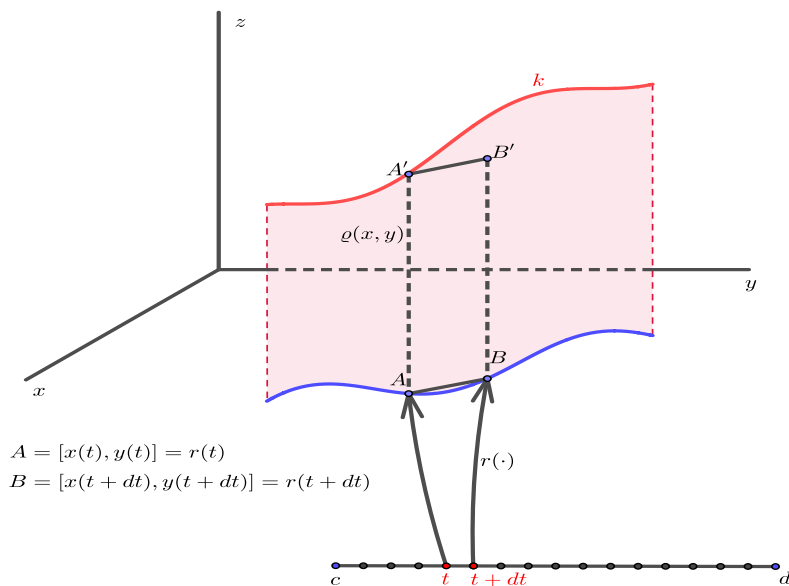
Potom obraz k zobrazení r , $k := \{[x(t), y(t)] \in \mathbb{R}^2; t \in [c, d]\}$, nazveme rovinnou křivkou k .

Poznamenejme, že ve skutečnosti z existencí derivací $x'(t), y'(t)$ plyne spojitost $x(t), y(t)$, čili v té definici je spojitost jaksi navíc. Ale ničemu to nevadí, tak ji tam necháme. Příklad takové křivky je na obrázku 2. Nyní se podíváme, jak spočítat



OBRÁZEK 2. Rovinná křivka.

ten plošný obsah. Nechť $r(t) = [x(t), y(t)]$, $t \in [c, d]$, je rovinná křivka a $\varrho(x, y)$ je daná funkce dvou proměnných. Podívejme se na obrázek 3. Rozdělme interval $[c, d]$ na velký počet malých dílků a vyberme si jeden dílek odpovídající parametrům



OBRÁZEK 3. Plocha pod křivkou.

$t, t + dt$. Na obrázku 3 vidíme body $A = [x(t), y(t)]$, $B = [x(t + dt), y(t + dt)]$ na modré křivce. Bod A' má souřadnice $[x(t), y(t), \rho(x, y)]$. Nyní doplníme bod B' tak, aby A, B, A', B' byl rovnoběžník. Plocha tohoto rovnoběžníku je dána

$$dP = \rho(x, y) |AB|.$$

Jak ale spočítat vzdálenost bodů A, B ? Protože $A = [x(t), y(t)]$, $B = [x(t + dt), y(t + dt)]$ a dt je velmi malé, je

$$|AB| = \sqrt{(x(t + dt) - x(t))^2 + (y(t + dt) - y(t))^2}$$

Ale my už z prvního semestru víme, že

$$x'(t) = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt},$$

tedy

$$x(t + dt) - x(t) = x'(t)dt$$

a analogicky

$$y(t + dt) - y(t) = y'(t)dt.$$

Dosazením máme

$$|AB| = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Výraz $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ budeme značit ds , tj.

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Následně

$$dP = \varrho(x, y) ds = \varrho(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Hledaná plocha je přibližně rovna součtu těchto dP , tj.

$$P \approx \sum_{\text{dělení } [c, d]} dP = \sum_{\text{dělení } [c, d]} \varrho(x, y) ds = \sum_{\text{dělení } [c, d]} \varrho(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Zjemňováním dělení dostaneme limitním přechodem ze sumy integrál, tj.

$$P = \int_k \varrho(x, y) ds = \int_c^d \varrho(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

A to je vlastně definice křivkového integrálu 1. druhu.

Existence derivace v každém bodě nás ale trochu omezuje. To nám neumožňuje integrovat přes křivky, které se mohou někde lámat, třeba trojúhelník, obdélník či jiný n -úhelník nebo přes obvod polokruhu atd. K tomu slouží následující definice.

DEFINICE 11.2. *Nechť $r(t) = (x(t), y(t))$ je spojitě zobrazení z $[c, d]$ do $\mathbb{R}^2$ a nechť $r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňuje:*

- (i) $x(t), y(t)$ jsou spojitě v $[c, d]$
- (ii) *existuje konečně mnoho čísel $c_1, c_2, \dots, c_n \in (a, b)$, $c = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < c_{n+1} = d$, tak, že existují $x'(t), y'(t)$ v každém intervalu $[c_i, c_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.*

Potom obraz k zobrazení r , $k := \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2; t \in [c, d]\}$, nazveme rovinnou křivkou k .

Nyní si definujeme integrál přes takovou křivku.

DEFINICE 11.3. *Nechť $r(t) = (x(t), y(t))$ je křivka ve smyslu definice 11.2 a $\varrho(x, y) : k \rightarrow \mathbb{R}^2$ spojitá funkce. Definujeme křivkový integrál prvního druhu předpisem*

$$\int_k \varrho(x, y) ds = \sum_{i=0}^n \int_{c_i}^{c_{i+1}} \varrho(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Ve speciálním případě $(x'(t), y'(t))$ existují v celém intervalu $[c, d]$ je

$$\int_k \varrho(x, y) ds = \int_c^d \varrho(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Každá křivka má ve skutečnosti mnoho parametrizací. Např. $r(t) = [t, t^2], t \in [0, 1]$ je táž křivka jako $r(t) = [s^2, s^4], s \in [0, 1]$. Výsledný integrál by neměl záviset na parametrizaci. To je hlavní smysl následující věty.

VĚTA 11.4. *Buď k křivka parametrizovaná dvěma způsoby:*

$$\begin{aligned} k &= \{(x_1(t), y_1(t)); t \in [a, b], \text{ existují } x'_1(t), y'_1(t)\}, \\ k &= \{(x_2(s), y_2(s)); s \in [c, d], \text{ existují } x'_2(s), y'_2(s)\}. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}\int_k f(x, y) ds &= \int_a^b f(x_1(t), y_1(t)) \sqrt{x_1'^2(t) + y_1'^2(t)} dt \\ &= \int_c^d f(x_2(s), y_2(s)) \sqrt{x_2'^2(s) + y_2'^2(s)} ds.\end{aligned}$$

Důkaz. Předpokládejme pro jednoduchost, že k je prostá, tj. každému bodu křivky odpovídají jednoznačné hodnoty parametru. Vezmeme bod $A \in k$. Pak existují jediná t, s taková, že $A = (x_1(t), y_1(t)) = (x_2(s), y_2(s))$. Tímto způsobem jsme k t přiřadili s a existuje tedy funkce $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ taková, že

$$x_1(t) = x_2(\varphi(t)), \quad y_1(t) = y_2(\varphi(t)).$$

Dále

$$x_1'(t) = x_2'(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow x_2'(s) = \frac{x_1'(t)}{\varphi'(t)}$$

a podobně $y_2'(s) = \frac{y_1'(t)}{\varphi'(t)}$. Potom

$$\begin{aligned}\int_c^d f(x_2(s), y_2(s)) \sqrt{x_2'^2(s) + y_2'^2(s)} ds &= \left| \begin{array}{l} s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t) dt \\ s = c \Rightarrow t = a \\ s = d \Rightarrow t = b \end{array} \right| \\ &= \int_a^b f(x_1(\varphi(t)), y_1(\varphi(t))) \sqrt{\left(\frac{x_1'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2 + \left(\frac{y_1'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t) dt \\ &= \int_a^b f(x_1(t), y_1(t)) \sqrt{x_1'^2(t) + y_1'^2(t)} dt.\end{aligned}$$

□

Zcela analogicky se zavede křivkový integrál 1. druhu pro prostorovou křivku.

DEFINICE 11.5. *Nechť $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ je spojitě zobrazení z $[c, d]$ do $\mathbb{R}^3$ a nechť $r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ splňuje:*

- (i) $x(t), y(t), z(t)$ jsou spojitě v $[c, d]$
- (ii) *existuje konečně mnoho čísel $c_1, c_2, \dots, c_n \in (a, b)$, $c = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < c_{n+1} = d$, tak, že existují $x'(t), y'(t), z'(t)$ v každém intervalu $[c_i, c_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.*

Potom obraz k zobrazení r , $k := \{[x(t), y(t), z(t)] \in \mathbb{R}^3; t \in [c, d]\}$, nazveme prostorovou křivkou k .

Nyní si definujeme integrál přes takovou křivku.

DEFINICE 11.6. *Nechť $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ je křivka ve smyslu definice 11.5 a $\varrho(x, y, z) : k \rightarrow \mathbb{R}^3$ spojitá funkce. Definujeme křivkový integrál prvního druhu předpisem*

$$\int_k \varrho(x, y) ds = \sum_{i=0}^n \int_{c_i}^{c_{i+1}} \varrho(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

Ve speciálním případě $(x'(t), y'(t), z'(t))$ existují v celém intervalu $[c, d]$ je

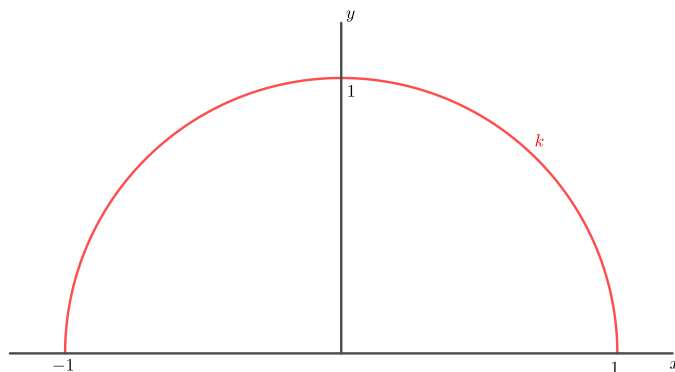
$$\int_k \varrho(x, y) ds = \int_c^d \varrho(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

2. Příklady

PŘÍKLAD 11.7. Buď k horní polokružnice se středem v $[0, 0]$ a poloměrem 1, $f(x, y) = y$. Vypočítejme

$$I = \int_k y ds.$$

Řešení. Rovnice kružnice je $x^2 + y^2 = 1$. Ale uvažujeme pouze horní polokružnici, tj. $y \geq 0$. Viz obrázek 4.



OBRÁZEK 4. Půlkružnice.

1. parametrizace.

$$x = t$$

$$y = \sqrt{1 - t^2}, \quad t \in [-1, 1].$$

Spočtěme

$$ds = \sqrt{1 + (\sqrt{1 - t^2})'^2} dt = \sqrt{1 + \left(-\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\right)^2} dt.$$

Potom

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \sqrt{1 + \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2} dt = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \sqrt{\frac{1}{1-t^2}} dt = \int_{-1}^1 dt = 2. \end{aligned}$$

2. parametrizace.

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \\ y &= \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Spočtěme

$$ds = \sqrt{(\cos' \varphi)^2 + (\sin' \varphi)^2} d\varphi = \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = d\varphi.$$

Potom

$$I = \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = [-\cos \varphi]_{\varphi=0}^\pi = 2.$$

□

PŘÍKLAD 11.8. *Vypočítejme*

$$\int_k \sqrt{x^2 + y^2} ds, \quad k : x^2 + y^2 = 2x. \quad \text{Jeden oběh.}$$

Řešení. Křivka, přes kterou integrujeme, je kružnice se středem $[1, 0]$ a poloměrem

1. Viz obrázek 5. 1. Parametrizace. Polární souřadnice jsou

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Potom $r^2 = 2r \cos \varphi$ a tedy $r = 2 \cos \varphi$, z čehož máme

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos \varphi \cos \varphi \\ y &= 2 \cos \varphi \sin \varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Spočtěme

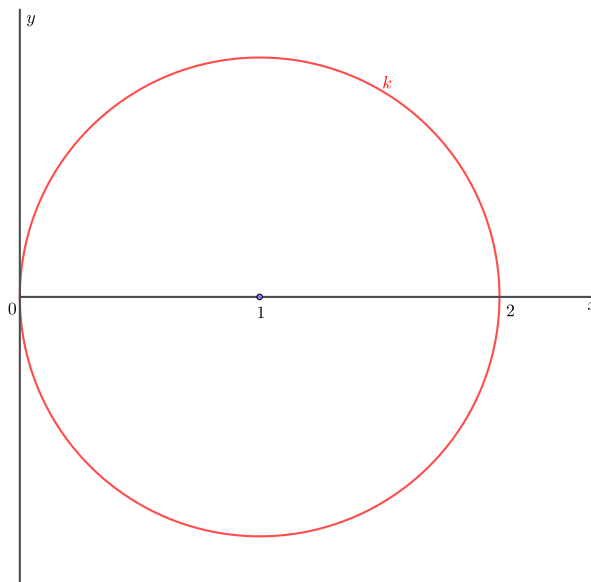
$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(2 \cos \varphi (-\sin \varphi))^2 + (2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi))^2} d\varphi \\ &= \sqrt{4 \sin^2 2\varphi + 4 \cos^2 2\varphi} d\varphi = 2 d\varphi. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \cos^4 \varphi + 4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} 2d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{\cos^2 \varphi} 2d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 8. \end{aligned}$$

Nebo 2. parametrizace.

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi + 1 \\ y &= \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$



OBRÁZEK 5. Kružnice.

SpočtĚme

$$ds = \sqrt{(-\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2} d\varphi = d\varphi.$$

Potom

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos \varphi + 1)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2\cos \varphi + 1} d\varphi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4 \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4[2 \sin \frac{\varphi}{2}]_0^{\pi} = 8. \end{aligned}$$

□

3. Hmotnost jednorozměrného drátu

Nechť je nyní dána křivka k nějakou parametrizací $(x(t), y(t))$, $t \in [c, d]$. Co je to hustota. Zvolme pevně t_0 a tomu odpovídá na křivce bod $(x(t_0), y(t_0))$. Vezmeme nyní interval $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ a vezmeme část křivky $k_\varepsilon(t_0) = \{(x(t), y(t)); t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon\}$. Průměrná hustota části křivky $k_\varepsilon(t_0)$ je její hmotnost $m(k_\varepsilon(t_0))$ dělená její délkou $d(k_\varepsilon(t_0))$. Hustota v bodě $(x(t_0), y(t_0))$ je potom definována jako

$$\varrho((x(t_0), y(t_0))) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(k_\varepsilon(t_0))}{d(k_\varepsilon(t_0))}.$$

Pokusme se nyní ze znalosti tvaru drátu a ze znalosti hustoty zjistit hmotnost drátu. Nechť $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [c, d]$ je křivka a předpokládejme pro jednoduchost, že je hladká, tj. $x'(t), y'(t)$ existují pro $t \in (c, d)$. Nechť je navíc dána funkce dvou proměnných $\varrho(x, y)$ definovaná pro $[x, y]$ ležící na dané křivce.

Rodělme interval $[c, d]$ na "krátké" podintervaly $c = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = d$. "Krátké" znamená, že na podintervalech $[t_i, t_{i+1}]$ lze považovat křivku $k_{r(t_i)r(t_{i+1})}$ za úsečku a hustotu za konstantní a rovnou $\varrho(x(t_i), y(t_i))$. Potom hmotnost křivky je přibližně rovna

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=0}^n \varrho(x(t_i), y(t_i)) \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2} \\ &= \sum_{i=0}^n \varrho(x(t_i), y(t_i)) \\ &\quad \times \sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 (t_{i+1} - t_i)^2 + \left(\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 (t_{i+1} - t_i)^2} \\ &= \sum_{i=0}^n \varrho(x(t_i), y(t_i)) \sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 + \left(\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2} (t_{i+1} - t_i) \\ &\doteq \sum_{i=0}^n \varrho(x(t_i), y(t_i)) \sqrt{x'^2(t_i) + y'^2(t_i)} (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Pokud budeme zjemňovat dělení, dostaneme již známým způsobem integrál

$$m = \int_c^d \varrho(x(t), y(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Analogicky pro prostorovou křivku

$$m = \int_c^d \varrho(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

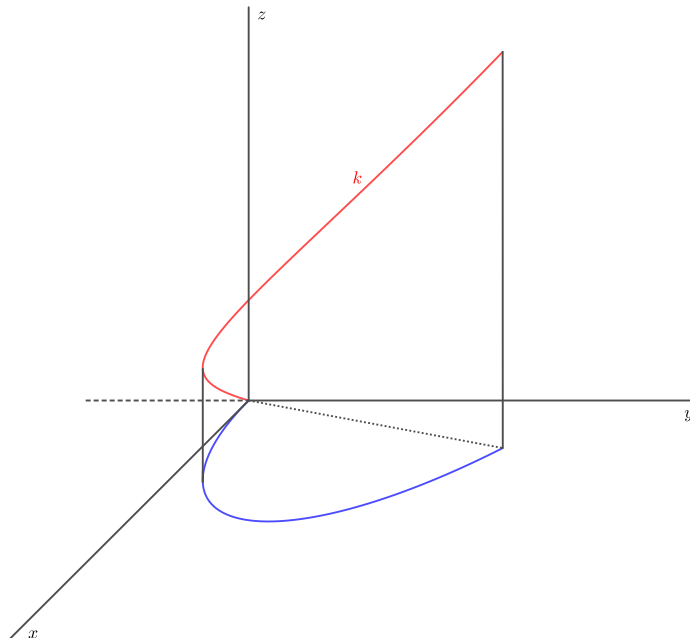
PŘÍKLAD 11.9. *Vypočtete hmotnost křivky*

$$\begin{aligned} x &= t \cos t, \\ y &= t \sin t, \\ z &= t, \quad t \in [0, \sqrt{2}], \end{aligned}$$

je-li hustota rovna $\varrho(x, y, z) = z$.

Řešení. Křivka je znázorněná červenou barvou na obrázku 6. Modrá barva je její projekce do roviny xy , tj. pohled na danou křivku shora.

$$\begin{aligned} m &= \int_k \varrho(x, y, z) ds = \int_0^{\sqrt{2}} t \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} t \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} t \sqrt{2 + t^2} dt = \left| \begin{array}{l} s = 2 + t^2 \\ ds = 2t dt \\ t = 0 \Rightarrow s = 2 \\ t = \sqrt{2} \Rightarrow s = 4 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_2^4 \sqrt{s} ds = \frac{1}{2} \frac{2}{3} [s^{\frac{3}{2}}]_2^4 = \frac{8 - 2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$



OBRÁZEK 6. Křivka v prostoru.

□

4. Délka jednorozměrného drátu

Pokud volíme v předchozím případě hustotu $\varrho(x, y, z) = 1$, dostaneme délku drátu (křivky)

$$d = \int_k ds.$$

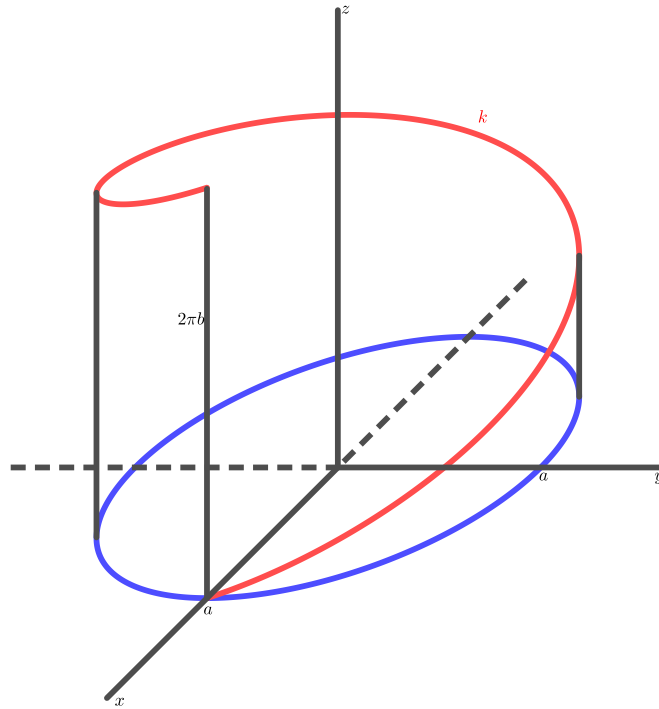
PŘÍKLAD 11.10. *Vypočtěte délku křivky (šroubovice)*

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t, \\ z &= bt, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Řešení. Obrázek šroubovice je na obrázku 7. Červená barva je prostorová křivka a modrá je její projekce do roviny xy , v tomto případě je to kružnice.

$$\begin{aligned} d &= \int_k ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

□



OBRÁZEK 7. Šroubovice.

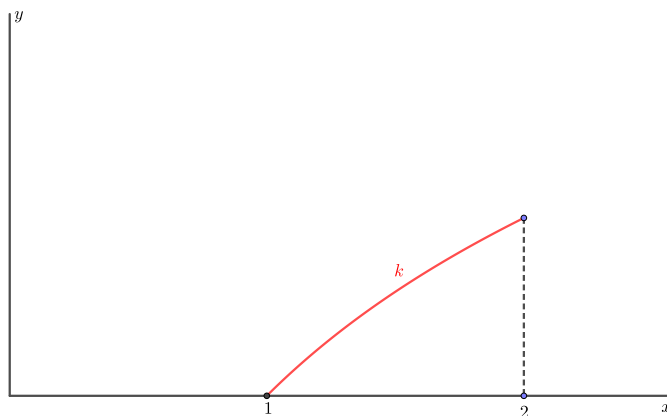
PŘÍKLAD 11.11. Vypočtete délku křivky

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= \ln t, \quad t \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Řešení. Na obrázku 8 je namalovaná daná křivka.

$$\begin{aligned} d &= \int_k ds = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} dt \\ &\left| \begin{array}{ll} s = \sqrt{1+t^2} & t = 1 \Rightarrow s = \sqrt{2} \\ t = \sqrt{s^2-1} & t = 2 \Rightarrow s = \sqrt{5} \end{array} \right| = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{s^2 ds}{s^2-1} ds \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{s^2-1} \right) ds = \left[s + \frac{1}{2} \ln \frac{s-1}{s+1} \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{2}-1)}. \end{aligned}$$

□



OBRÁZEK 8. Logaritmická křivka.

5. Statické momenty a těžiště jednorozměrného drátu

Odvození je analogické jako v případě plechu či tělesa. Jsou dány v případě rovinného drátu vzorcemi

$$S_y = \int_k x \varrho(x, y) ds, \quad S_x = \int_k y \varrho(x, y) ds, m = \int_k \varrho(x, y) ds,$$

a těžiště

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m} \right],$$

v případě prostorového drátu vzorcemi

$$S_{yz} = \int_k x \varrho(x, y, z) ds, \quad S_{xz} = \int_k y \varrho(x, y, z) ds, S_{xy} = \int_k z \varrho(x, y, z) ds,$$

a těžiště

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m} \right].$$

PŘÍKLAD 11.12. Vypočtěte těžiště homogenního drátu tvaru polokružnice (hus-tota rovna $\varrho(x, y) = 1$) s poloměrem 1.

Řešení. Viz obrázek 4. Parametrizujme danou křivku (půlkružnici).

$$x = \cos \varphi$$

$$y = \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Spočtěme

$$ds = \sqrt{(-\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2} d\varphi = d\varphi.$$

Potom

$$m = \int_0^\pi d\varphi = \pi.$$

Dále

$$S_y = \int_k x ds = \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi = 0$$

a

$$S_x = \int_k y ds = \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = [-\cos \varphi]_0^\pi = 2.$$

Těžiště je tedy

$$T = \left[0, \frac{2}{\pi}\right].$$

□

6. Momenty setrvačnosti jednorozměrného drátu

Je-li dána osa o a křivka k s hustotou $\varrho(x, y, z)$, je moment setrvačnosti k vzhledem k ose o roven

$$I_o = \int_k d^2(x, y, z) \varrho(x, y, z) ds,$$

kde $d(x, y, z)$ je vzdálenost bodu $[x, y, z]$ od osy o . Uvedeme jen vzorce pro osy x, y, z .

$$\begin{aligned} I_x &= \int_k (y^2 + z^2) \varrho(x, y, z) ds, \\ I_y &= \int_k (x^2 + z^2) \varrho(x, y, z) ds, \\ I_z &= \int_k (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) ds. \end{aligned}$$

Protože rovinná křivka může být chápána jako prostorová, stačí místo $[x(t), y(t)]$ uvažovat $[x(t), y(t), 0]$, nemusíme uvádět zvlášť vzorce pro rovinnou křivku.

PŘÍKLAD 11.13. *Vypočtěte momenty setrvačnosti homogenního drátu tvaru kružnice (hustota rovna $\varrho(x, y) = 1$) s poloměrem 1 vzhledem k ose y a k ose z .*

Řešení. Viz obrázek 4. Opět parametrizujeme danou křivku (půlkružnici), to už jsme několikrát udělali.

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \\ y &= \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Spočtěme

$$ds = \sqrt{(-\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2} d\varphi = d\varphi.$$

Potom

$$\begin{aligned} I_y &= \int_k x^2 \varrho(x, y) ds = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \left[\varphi + \frac{\sin \varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

Nyní vzhledem k ose z . Parametriace (jakožto prostorové křivky) je

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \\ y &= \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Potom $ds = \sqrt{(-\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} d\varphi = d\varphi$ a

$$I_z = \int_k (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

□

Křivkový integrál druhého druhu

1. Práce konstantního pole podél orientované úsečky

Jsou-li dány vektory u, v , označme symboly $|u|, |v|$ velikosti vektorů u, v a $u \cdot v$ jejich skalární součin. Připomeneme si ještě vzorec pro odchylku α vektorů u, v .

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}.$$

Začneme úlohou známou snad už ze základní školy. Je dána úsečka CD a síla F rovnoběžná s úsečkou s s počátečním bodem C a koncovým D . Uvědomme si, že F i s jsou vektory. Jaká práce se vykoná, pokud přemístíme těleso z C do D vlivem síly F ? Můžeme si to představit jako vlak na kolejích tažený koněm. Ze základní školy víme, že daná síla vykoná práci

$$A = |F| |s|.$$

Viz obrázek 1. Pokud síla F působí s opačnou orientací, vyjde vykonaná práce

$$A = -|F| |s|.$$

Zároveň si uvědomme, že pokud přemístíme dané těleso v opačném směru, tj. z bodu D do bodu C , tak budeme práci konat my. Fyzikálně to znamená, že práce pod vlivem síly F je záporná a je rovna

$$A = -|F| |s|.$$

Bylo by dobrá mít na obě možnosti jediný vzorec. A to si ukážeme v dalším.

Představme si nyní malinko obecnější situaci, kdy síla táhnoucí vlak není rovnoběžná s úsečkou CD , tj. třeba když tažný kůň táhne vlak po cestě, která je rovnoběžná s kolejemi. Viz obrázek 2. V tomto případě rozložíme sílu F na F_p a sílu F_k kolmou k CD . Ta kolmá složka F_k se ale neprojeví, ta je paralyzována pevností kolejí. Potom práce je

$$A = |F_p| |s|$$

v případě, kdy úhel α mezi vektory s a F je ostrý, a

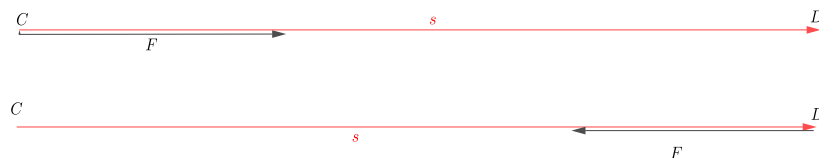
$$A = -|F_p| |s|$$

v případě, kdy úhel α mezi vektory s a F je tupý.

Ve všech třech případech je důležité, že úsečka CD je orientovaná, buď z C do D nebo z D do C . To znamená, že s je vektor, ale to jsme již říkali. Jak víme, síla je také vektor. Jak se dá spočítat velikost F_p ? Máme tedy dva vektory, s a F o velikostech $|s|, |F|$, které svírají úhel α .

Nechť je nejprve α ostrý úhel. Víme, že

$$\cos \alpha = \frac{F \cdot s}{|F| \cdot |s|}.$$



OBRÁZEK 1. Síla rovnoběžná s úsečkou.

Dále můžeme psát

$$A = |F_p| |s| = |F| \cos \alpha |s| = |F| \frac{F \cdot s}{|F| \cdot |s|} |s| = F \cdot s,$$

tedy A je daná skalárním součinem F a s .

Nechť je nejprve α tupý úhel. Z analytické geometrie opět víme, že

$$\cos \alpha = \frac{F \cdot s}{|F| \cdot |s|}.$$

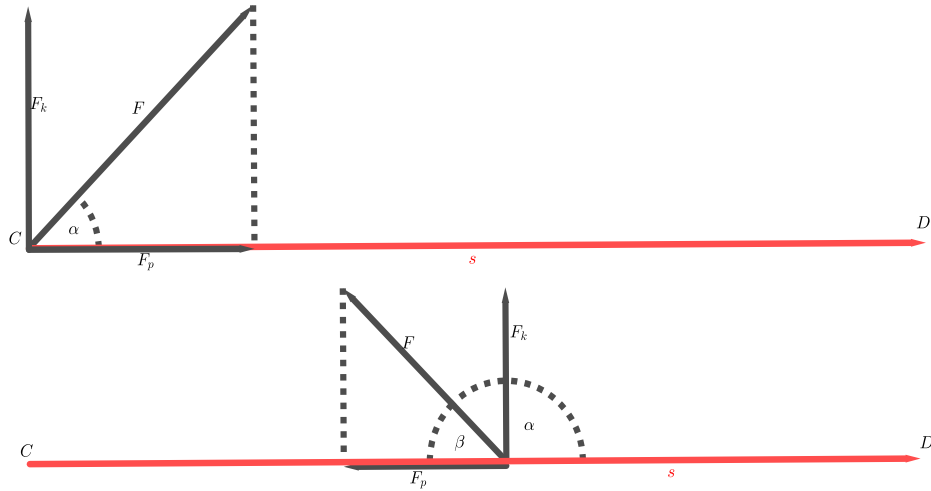
Dále můžeme psát

$$A = -|F_p| |s| = -|F| \cos \beta |s| = -|F| \cos(\pi - \alpha) |s| = |F| \frac{F \cdot s}{|F| \cdot |s|} |s| = F \cdot s,$$

tedy A je opět daná skalárním součinem F a s . Pokud $\alpha = 0$ či $\alpha = \pi$, máme platnost vzorečku $A = F \cdot s$ i v případě, že F a s jsou rovnoběžné.

2. Pojem vektorového pole

Musíme si nejprve říci, co to je vektorové pole. Je to předpis, který každému bodu $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ (nebo $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$) přiřadí vektor F (třeba vektor síly). Vektor v rovině je dán svými souřadnicemi, tj. $F = (f(x, y), g(x, y))$ (nebo v prostoru $F = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ pro trojrozměrné pole). Dvourozměrné vektorové



OBRÁZEK 2. Síla nerovnoběžná s úsečkou.

pole je tedy dané dvěma funkcemi dvou proměnných

$$(f(x, y), g(x, y))$$

a trojrozměrné vektorové pole je dané třemi funkcemi tří proměnných

$$(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)).$$

Představujeme si to tak, že do bodu $[x, y]$ umístíme vektor $(f(x, y), g(x, y))$ s počátečním bodem $[x, y]$. Koncový bod vektoru je pochopitelně $[x + f(x, y), y + g(x, y)]$. Analogicky si to můžeme představit v prostoru. Formální definice by byla následující.

DEFINICE 12.1. *Dvourozměrné vektorové pole je zobrazení z $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané dvěma funkcemi dvou proměnných $[x, y] \mapsto (f(x, y), g(x, y))$.*

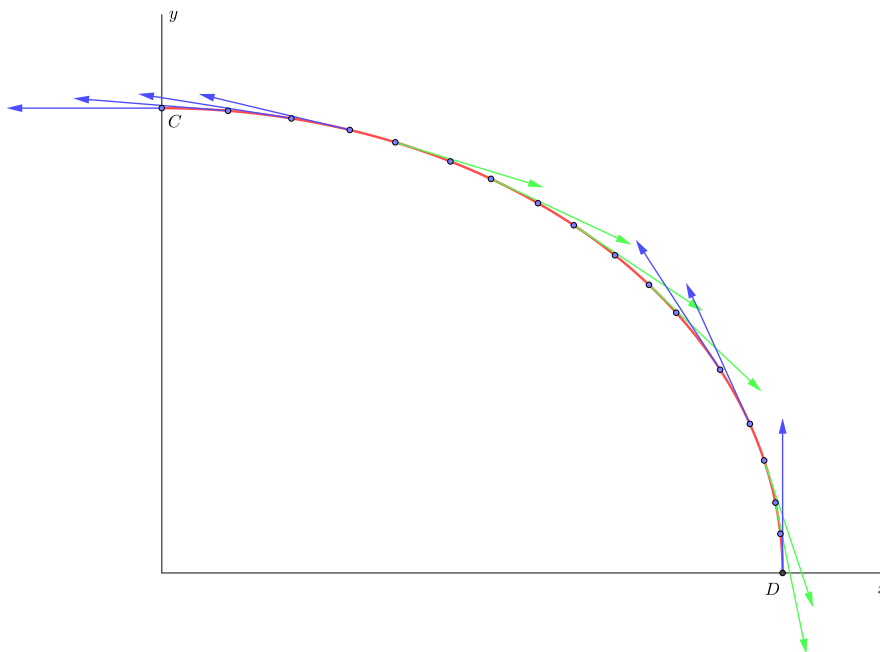
Trojrozměrné vektorové pole je zobrazení z $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané třemi funkcemi tří proměnných $[x, y, z] \mapsto (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$.

3. Orientovaná křivka

Definujme si nyní regulární hladkou prostou orientovanou křivku. Nechť je dána křivka $r(t) = [x(t), y(t)]$, $t \in [c, d]$. "Prostá" křivka znamená $r(t) \neq r(s)$ pro $t \neq s$, $t, s \in [c, d]$ a "hladká" znamená, že existují $x'(t), y'(t)$. "Regulární" znamená, že tečný vektor $(x'(t), y'(t))$ není nulový, což by šlo vyjádřit podmínkou $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, pro $t \in [c, d]$. Označme $r(c) = C$, $r(d) = D$. Potom počáteční

bod je C a koncový je D . Říkáme, že křivka je orientována od bodu C do bodu D . Pořadí bodů C, D nám tedy zadává orientaci křivky.

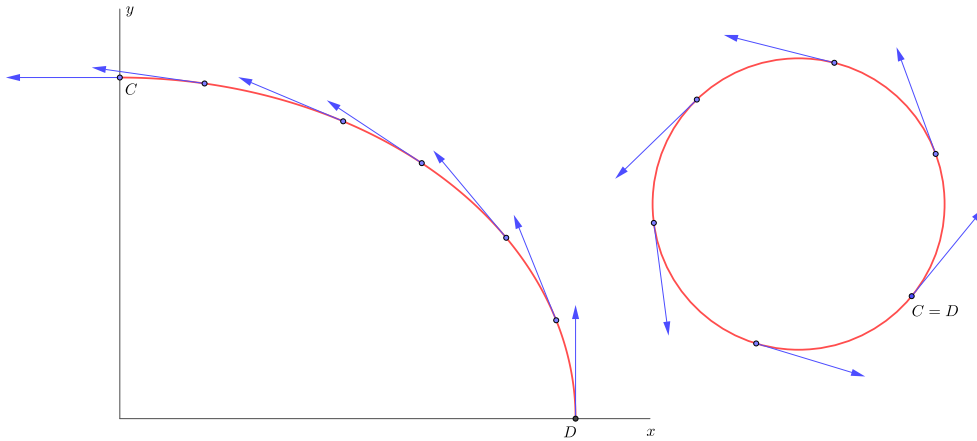
Tato definice orientace ale závisí na podmínce $r(c) \neq r(d)$. Ale v praxi je často potřeba integrovat přes uzavřené křivky, tj. $r(c) = r(d)$. Jak ale definovat orientaci pro uzavřenou křivku? Pomocí tečných vektorů. Můžeme v každém bodě $(x(t), y(t))$ dané křivky setrojit dva jednotkové tečné vektory, $\vec{t}(t)$ a $-\vec{t}(t)$, kde $\vec{t}(t) = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$. Vezměme nyní množinu všech zobrazení $\mathcal{T} : k \rightarrow \{\vec{t}(t), -\vec{t}(t)\}$. Nějaké takové zobrazení si představíme tak, že si v každém bodě křivky sestojíme jednotkový tečný vektor. Orientaci si zvolíme naprosto náhodně. Příklad nějakého takového zobrazení (výběru tečných vektorů) je na obrázku 3. Modré tečné vektory mají orientaci proti směru hodinových ručiček, zelené po



OBRÁZEK 3. Příklad jednotkových tečných vektorů ke křivce.

směru hodinových ručiček. Takových obrázků si můžeme namalovat spousty. Namalujeme si dva význačné obrázky. Jsou to obrázky 4 a 5. Na obrázku 4 jsou všechny tečné vektory orientovány proti směru hodinových ručiček u obou křivek (tedy i u té uzavřené) a Na obrázku 5 jsou všechny tečné vektory orientovány po směru hodinových ručiček.

Vraťme se k množině všech zobrazení $\mathcal{T} : k \rightarrow \{\vec{t}(t), -\vec{t}(t)\}$. Je vcelku vidět (a lze to i dokázat), že pouze dvě z těchto zobrazení jsou spojitá. Zvolme jedno z nich. Říkáme, že jsme křivku orientovali. Můžeme si orientaci křivky představit jako směr, kterým tu křivku proběhneme.



OBRÁZEK 4. Příklad jednotkových tečných vektorů.

Je-li tedy dána křivka k , můžeme na ní zadat dvě orientace. Volbou jedné z nich jsme křivku orientovali. Orientovanou křivku budeme značit (k) (nebo k_{CD} , pokud $C \neq D$).

Stejně bychom orientovali křivku v prostoru.

Zatím jsme uvažovali pouze hladké křivky. Ale umíme si představit, že potřebujeme počítat práci pole i přes trojúhelník či čtverec atd. To jsou po částech hladké křivky, viz následující definice.

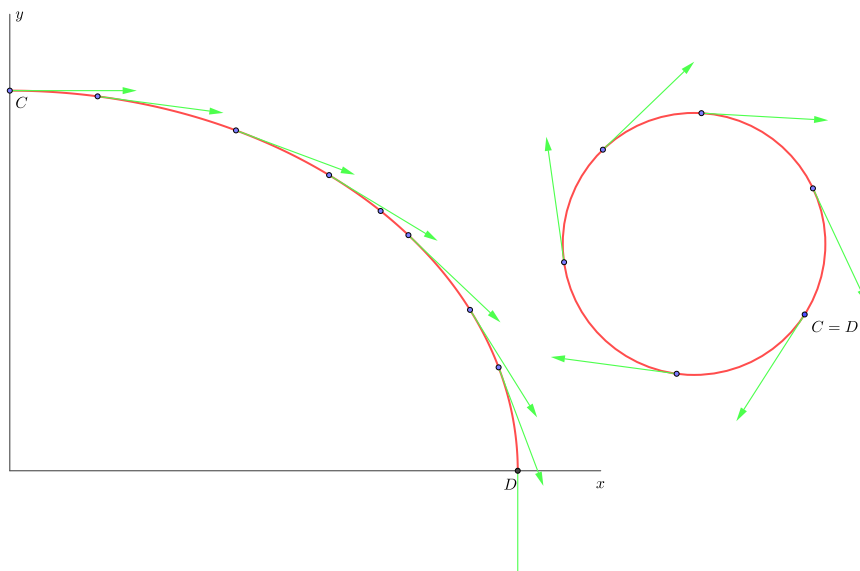
DEFINICE 12.2. *Nechť $r(t) = (x(t), y(t))$ je spojitě zobrazení z $[c, d]$ do $\mathbb{R}^2$ je buď prosté nebo připustíme $r(c) = r(d)$ (uzavřená křivka) a nechť $r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňuje:*

- (i) $x(t), y(t)$ jsou spojitě v $[c, d]$
- (ii) *existuje konečně mnoho čísel $c_1, c_2, \dots, c_n \in (c, d)$, $c = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < c_{n+1} = d$, tak, že existují $x'(t), y'(t)$ v každém intervalu $[c_i, c_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.*

Je jasné, že přímo parametrické rovnice nám dávají směr, kudy křivku probíháme, čili dávají orientaci. Pokud bychom chtěli opačnou, museli bychom to přeparametrizovat tak, abychom křivku proběhli v opačném směru.

Poznamenejme, že bychom mohli zkusit orientovat k pomocí tečného vektoru. Ten ale v bodech c_i nemusí existovat a nemusíme tedy mít spojitost zobrazení, které v každém bodu k přiřadí jednotkový tečný vektor. To by šlo překonat tak, že zvolíme na každém podintervalu $[c_i, c_{i+1}]$ orientaci pomocí tečného vektoru a nyní dá trochu práce navázat to v bodech c_i .

Je zřejmé, že na křivce k jsou právě dvě orientace.



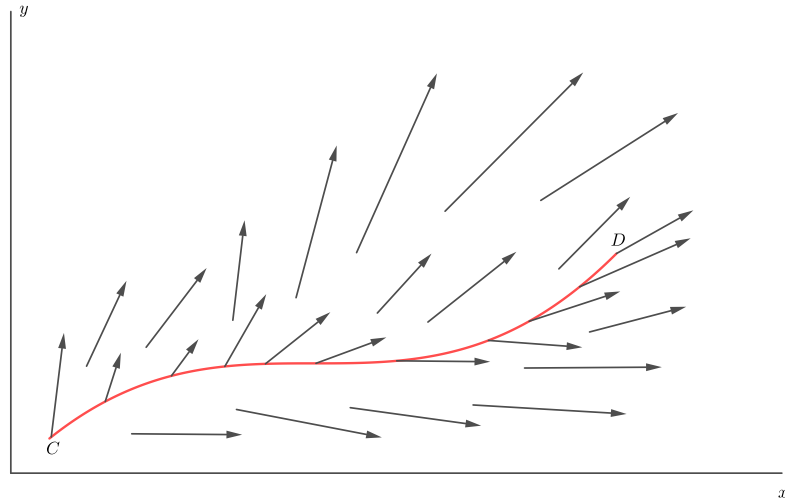
OBRÁZEK 5. Příklad jednotkových tečných vektorů.

4. Práce pole podél prosté orientované křivky

Náš nynější úkol je nyní tento. Máme dáno silové pole v rovině (prostoru) - přestavme si třeba gravitční pole dané několika hmotnými body. Zvolíme v rovině (prostoru) nějakou křivku k s počátečním bodem C a koncovým bodem D a předpokládejme, že $C \neq D$. Představme si, že hmotný bod o hmotnosti m se pohybuje po dané křivce z bodu C do bodu D vlivem daného pole. Otázka je, jakou práci toto pole vykoná? Viz obrázek 6.

Nechť je dáno silové pole (pro jednoduchost v rovině x, y). To znamená, že v každém bodě roviny je dán vektor $(f(x, y), g(x, y))$ síly a nechť je dána orientovaná křivka k ve smyslu definice 12.2. Představme si, že máme spočítat, jakou fyzikální práci vykoná silové pole, pokud se hmotný bod bude pohybovat po orientované křivce k z bodu C do bodu D .

Nechť křivka k je daná pro jednoduchost hladkým zobrazením $r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a silového pole $\vec{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Rodělně interval na "krátké" podintervaly $c = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = d$. "Krátké" znamená, že na podintervalech $[t_i, t_{i+1}]$ lze považovat křivku $k_{r(t_i)r(t_{i+1})}$ za úsečku a pole za konstantní a rovno $(f(x(t_i), y(t_i)), g(x(t_i), y(t_i)))$. Viz obrázek 7. Práce je přibližně rovna součtu prací přes všechny malé kousky $s = r(t_{i+1}) - r(t_i)$. Ale na tomto malém kousku je práce daná skalárním součinem $F \cdot s$. Potom celková práce A je



OBRÁZEK 6. Příklad orientované křivky a silového pole.

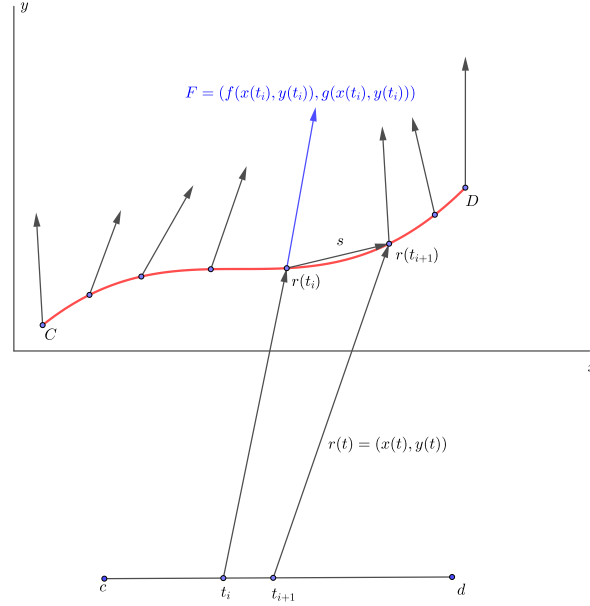
přibližně rovna součtu

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i=0}^n F \cdot s = \sum_{i=0}^n \left(f(x(t_i), y(t_i)), g(x(t_i), y(t_i)) \right) \left(x(t_{i+1}) - x(t_i), y(t_{i+1}) - y(t_i) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n f(x(t_i), y(t_i)) \left(x(t_{i+1}) - x(t_i) \right) + g(x(t_i), y(t_i)) \left(y(t_{i+1}) - y(t_i) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n f(x(t_i), y(t_i)) \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (t_{i+1} - t_i) \\
 &\quad + g(x(t_i), y(t_i)) \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (t_{i+1} - t_i) \\
 &\doteq \sum_{i=0}^n f(x(t_i), y(t_i)) x'(t_i) (t_{i+1} - t_i) + g(x(t_i), y(t_i)) y'(t_i) (t_{i+1} - t_i).
 \end{aligned}$$

Pokud budeme zjemňovat dělení, dostaneme již známým způsobem integrál

$$A = \int_c^d \left(f(x(t), y(t)) x'(t) + g(x(t), y(t)) y'(t) \right) dt.$$

Tento vzorec vlastně definuje křivkový integrál druhého druhu.



OBRÁZEK 7. Práce v silovém poli.

DEFINICE 12.3. *Nechť je dáno pole $(f(x, y), g(x, y))$ a orientovaná křivka k ve smyslu definice 12.2. Potom křivkový integrál druhého druhu je definován*

$$\int_{k_{CD}} f(x, y)dx + g(x, y)dy := \sum_{i=0}^n \int_{c_i}^{c_{i+1}} \left(f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t) \right) dt.$$

Pokud je k hladká, je

$$\int_{k_{CD}} f(x, y)dx + g(x, y)dy := \int_c^d \left(f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t) \right) dt.$$

Nyní uděláme několik věcí. Nejprve si tuto definici zobecníme pro křivky v $\mathbb{R}^3$ a potom si ukážeme, že na parametrizaci křivky nezáleží.

DEFINICE 12.4. *Nechť $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ je spojitě zobrazení z $[c, d]$ do $\mathbb{R}^3$ a nechť $r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$ splňuje:*

- (i) $x(t), y(t), z(t)$ jsou spojitě v $[c, d]$
- (ii) *existuje konečně mnoho čísel $c_1, c_2, \dots, c_n \in (a, b)$, $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < c_{n+1} = b$, tak, že existují $x'(t), y'(t), z'(t)$ v každém intervalu $[c_i, c_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.*

Označme $C = r(c), D = r(d)$. Zvolme pořadí bodů C, D . Potom obraz k zobrazení r s tímto zvoleným pořadím nazveme orientovanou křivkou v prostoru.

DEFINICE 12.5. *Nechť $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ je orientovaná křivka a nechť je dáno $(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)) : k \rightarrow \mathbb{R}^3$ spojitě pole. Definujme křivkový*

integrál druhého druhu předpisem

$$\int_{k_{CD}} f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz = \sum_{i=0}^n \int_{c_i}^{c_{i+1}} \left(f(x(t), y(t), z(t))x'(t) \right. \\ \left. + g(x(t), y(t), z(t))y'(t) + h(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt.$$

Pokud je k hladká, je

$$\int_{k_{CD}} f(x, y, z)dx + g(x, y, z)dy + h(x, y, z)dz := \int_c^d \left(f(x(t), y(t), z(t))x'(t) \right. \\ \left. + g(x(t), y(t), z(t))y'(t) + h(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt.$$

V dalším si ukážeme, že křivkový integrál druhého druhu nezáleží na parametrizaci dané křivky, ale jen na jejím tvaru a orientaci. Dokážeme to jen pro hladkou rovinovou křivku.

VĚTA 12.6. *Buď dáno pole $(f(x, y), g(x, y))$. Nechť je orientovaná křivka k_{CD} parametrizovaná dvěma způsoby:*

$$k = \{(x_1(t), y_1(t)); t \in [a, b], \text{ existují } x'_1(t), y'_1(t)\}, \\ k = \{(x_2(s), y_2(s)); s \in [c, d], \text{ existují } x'_2(s), y'_2(s)\}, \\ [x_1(a), y_1(a)] = [x_2(c), y_2(c)] = C, \quad [x_1(b), y_1(b)] = [x_2(d), y_2(d)] = D.$$

Pak

$$\int_{k_{CD}} f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_a^b f(x_1(t), y_1(t))x'_1(t) + g(x_1(t), y_1(t))y'_1(t) dt \\ = \int_c^d f(x_2(s), y_2(s))x'_1(s) + g(x_2(s), y_2(s))x'_1(s) ds.$$

Důkaz. Předpokládejme pro jednoduchost, že k je prostá, tj. každému bodu křivky odpovídají jednoznačné hodnoty parametru. Vezmeme bod $A \in k$. Pak existují jediná t, s taková, že $A = (x_1(t), y_1(t)) = (x_2(s), y_2(s))$. Tímto způsobem jsme k t přiřadili s a existuje tedy funkce $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ taková, že

$$x_1(t) = x_2(\varphi(t)), \quad y_1(t) = y_2(\varphi(t)).$$

Dále

$$x'_1(t) = x'_2(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow x'_2(s) = \frac{x'_1(t)}{\varphi'(t)}$$

a podobně $y'_2(s) = \frac{y'_1(t)}{\varphi'(t)}$. Potom

$$\int_c^d f(x_2(s), y_2(s))x'_2(s) + g(x_2(s), y_2(s))x'_2(s) ds = \left| \begin{array}{l} s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t)dt \\ s = c \Rightarrow t = a \\ s = d \Rightarrow t = b \end{array} \right| \\ = \int_a^b \left(f(x_2(\varphi(t)), y_2(\varphi(t))) \frac{x'_1(t)}{\varphi'(t)} + g(x_2(\varphi(t)), y_2(\varphi(t))) \frac{y'_1(t)}{\varphi'(t)} \right) \varphi'(t) dt \\ = \int_a^b f(x_1(t), y_1(t))x'_1(t) + g(x_1(t), y_1(t))y'_1(t) dt.$$

□

VĚTA 12.7. *Buď dáno pole $(f(x, y), g(x, y))$ a orientovaná křivka k_{CD} . Pak*

$$\int_{k_{CD}} f(x, y)dx + g(x, y)dy = - \int_{k_{DC}} f(x, y)dx + g(x, y)dy$$

Důkaz. Nechť je orientovaná, pro jednoduchost hladká, křivka $k_{CD}, C \neq D$ parametrizovaná:

$$k = \{(x(t), y(t)); t \in [c, d], \text{ existují } x_1'(t), y_1'(t)\},$$

$$[x(c), y(c)] = C, \quad [x(d), y(d)] = D.$$

Pak opačně orientovaná je dána

$$k = \{(x_1(t), y_1(t)) := (x(-t), y(-t)); t \in [-d, -c],$$

$$[x_1(c), y_1(c)] = D, \quad [x_1(d), y_1(d)] = C,$$

$$(x_1'(t), y_1'(t)) := -(x'(-t), y'(-t)).$$

$$\begin{aligned} \int_{k_{CD}} f(x, y)dx + g(x, y)dy &= \int_c^d \left(f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t) \right) dt \\ &= \left| \begin{array}{l} t = -s, \quad dt = -ds \\ t = c \Rightarrow s = -c \\ t = d \Rightarrow s = -d \end{array} \right| \\ &= \int_{-c}^{-d} \left(f(x(-s), y(-s))x'(-s) + g(x(-s), y(-s))y'(-s) \right) (-ds) \\ &= - \int_{-d}^{-c} \left(f(x_1(s), y_1(s))x_1'(s) + g(x_1(s), y_1(s))y_1'(s) \right) ds \\ &= - \int_{k_{DC}} f(x, y)dx + g(x, y)dy. \end{aligned}$$

□

5. Příklady

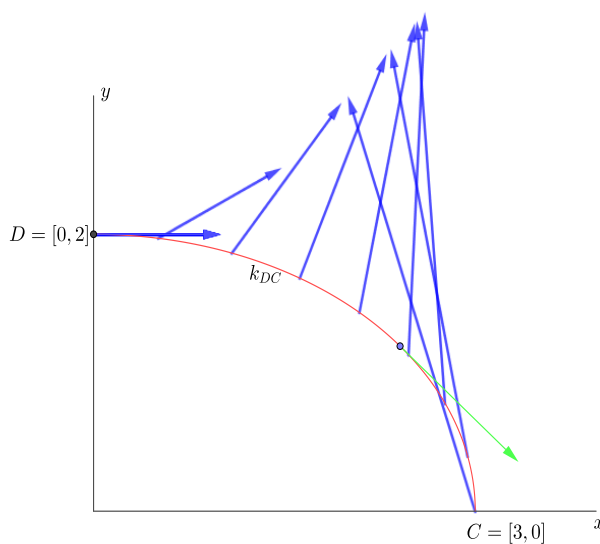
PŘÍKLAD 12.8. *Je dána křivka $k : x = 3 \cos t, y = 2 \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ orinentovaná od bodu $A = [0, 2]$ k bodu $B = [3, 0]$. Spočti*

$$\int_{k_{AB}} (y - 1)dx + xdy.$$

Řešení. Křivku chceme proběhnout opačným směrem, než jaký dává $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Viz obrázek 8. Zelený vektor dává orientaci červené křivky, modré vektory jsou zadané vektorové pole. Lze tedy psát

$$\begin{aligned} \int_{k_{AB}} (y - 1)dx + xdy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left((2 \sin t - 1) \cdot (-3 \sin t) + 3 \cos t \cdot 2 \cos t \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6 \sin^2 t - 3 \sin t - 6 \cos^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-6 \cos 2t - 3 \sin t) dt \\ &= [-3 \sin 2t + 3 \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -3. \end{aligned}$$

□



OBRÁZEK 8. Práce v silovém poli.

PŘÍKLAD 12.9. Je dána křivka $k : x = t^2, y = 2t, z = 4t^3, t \in [0, 1]$ orinentovaná od bodu $A = [0, 0, 0]$ k bodu $B = [1, 2, 4]$. Spočti

$$\int_{k_{AB}} xdx + ydy + (xz - y)dz.$$

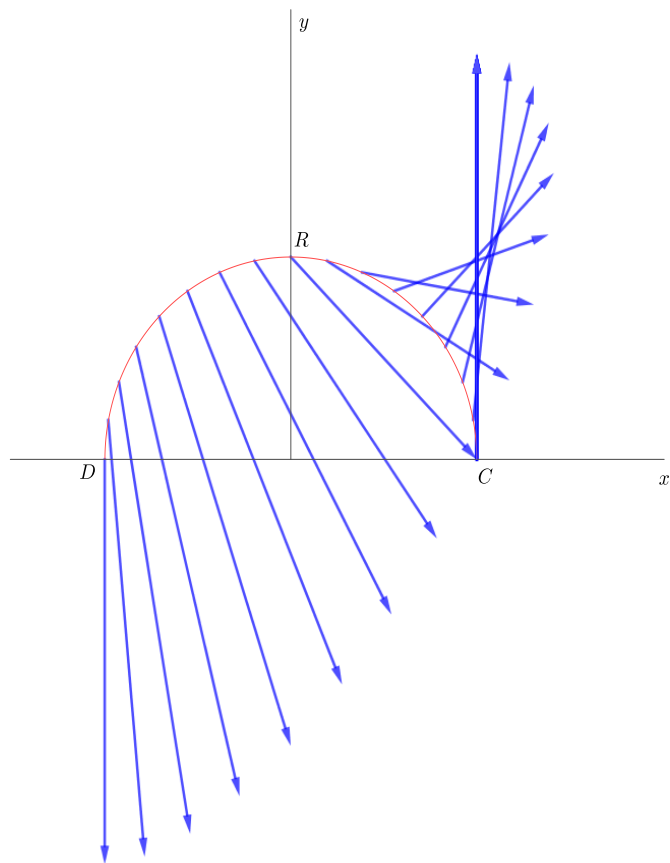
Řešení. Obrázek kreslit nebudeme, je to nějaká prostorová křivka. Lze psát

$$\begin{aligned} \int_{k_{AB}} xdx + ydy + (xz - y)dz &= \int_0^1 \left(t^2 \cdot 2t + 2t \cdot 2 + (4t^5 - 2t)12t^2 \right) dt \\ &= \int_0^1 (2t^3 + 4t + 48t^7 - 24t^3) dt = \left[-\frac{11}{2}t^4 + 2t^2 + \frac{12}{2}t^8 \right]_0^1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 12.10. Je dáno silové pole $(x + y, 2x)$. Spočítejte práci, kterou vykoná toto pole podél horní polokružnice o poloměru R se středem v bodě $[0, 0]$, která je orientovaná od bodu $C = [0, R]$ do bodu $D = [0, -R]$.

Řešení. Viz obrázek 9. Orientaci červené křivky je od bodu C do bodu D , modré vektory jsou zadané vektorové pole. Křivka je parametrizovaná např. po-



OBRÁZEK 9. Práce v silovém poli.

mocí

$$\begin{aligned} x &= -t, & t &\in [-R, R], \\ y &= \sqrt{R^2 - t^2}. \end{aligned}$$

Protože $x'(t) = -1$ a $y' = \frac{-t}{\sqrt{R^2 - t^2}}$, lze psát

$$\begin{aligned}
 \int_{k_{CD}} (x+y)dx + 2xdy &= \int_{-R}^R \left((-t + \sqrt{R^2 - t^2})(-1) + 2(-t) \frac{-t}{\sqrt{R^2 - t^2}} \right) dt \\
 &= \int_{-R}^R \left(t - \sqrt{R^2 - t^2} + \frac{2t^2}{\sqrt{R^2 - t^2}} \right) dt = \left| \begin{array}{l} t = R \sin s \\ dt = R \cos s \, ds \end{array} \right| \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(R \sin s - R \cos s + \frac{2R^2 \sin^2 s}{R \cos s} \right) R \cos s \, ds \\
 &= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin s \cos s - \cos^2 s + 2 \sin^2 s \right) ds \\
 &= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin 2s - \frac{1 + \cos 2s}{2} + 2 \frac{1 - \cos 2s}{2} \right) ds \\
 &= R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 2s - \frac{3}{2} \cos 2s \right) ds = R^2 \left[\frac{s}{2} - \frac{1}{4} \cos 2s - \frac{3}{4} \sin 2s \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= R^2 \left(\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \cos \pi - \frac{3}{4} \sin \pi \right) - \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \cos(-\pi) - \frac{3}{4} \sin(-\pi) \right) \right) = \frac{\pi}{2} R^2.
 \end{aligned}$$

Přirozenější parametrizace je ovšem

$$\begin{aligned}
 x &= R \cos t, & t &\in [-0, \pi], \\
 y &= R \sin t.
 \end{aligned}$$

Pak $x' = -R \sin t$, $y' = R \cos t$ a

$$\begin{aligned}
 \int_{k_{CD}} (x+y)dx + 2xdy &= \int_0^\pi \left((R \cos t + R \sin t)(-R \sin t) + 2R \cos t \, R \cos t \right) dt \\
 &= R^2 \int_0^\pi (-\cos t \sin t - \sin^2 t + 2 \cos^2 t) dt \\
 &= R^2 \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1 - \cos 2t}{2} + 2 \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\
 &= R^2 \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{3}{2} \cos 2t \right) dt = R^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{3}{4} \sin 2t \right]_0^\pi \\
 &= R^2 \left(\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cos 2\pi + \frac{3}{4} \sin 2\pi \right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{1}{4} \cos 0 + \frac{3}{4} \sin 0 \right) \right) \\
 &= R^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} R^2,
 \end{aligned}$$

což je stejný výsledek.

□

Křivkový integrál druhého druhu přes uzavřenou orientovanou křivku

1. Práce pole podél uzavřené orientované křivky

Zatím jsme vždy pracovali s křivkami, jejichž počáteční a koncové body nesplývali. Je ovšem užitečné umět spočítat práci pole podél uzavřené křivky.

Vezmeme si nyní uzavřenou orientovanou křivku $r(t) = [x(t), y(t)]$, $t \in [c, d]$, $r(t) \neq r(s)$ pro $t \neq s$, $t, s \in [c, d]$, $C = r(c) = r(d) = D$. Orientace je dána pomocí tečných vektorů $(x'(t), y'(t))$.

DEFINICE 13.1. *Nechť $r(t) = (x(t), y(t))$ je spojitě zobrazení z $[c, d]$ do $\mathbb{R}^2$ a nechť $r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňuje:*

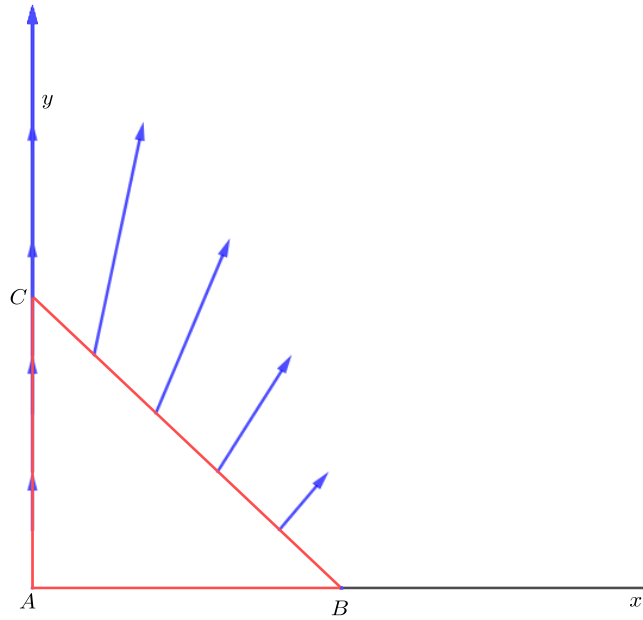
- (i) $r(t) \neq r(s)$ pro $t \neq s$, $t, s \in [c, d]$
- (ii) $r(c) = r(d)$
- (iii) $x(t), y(t)$ jsou spojitě v $[c, d]$
- (iv) *existuje konečně mnoho čísel $c_1, c_2, \dots, c_n \in (a, b)$, $c = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < c_{n+1} = d$, tak, že existují $x'(t), y'(t)$ v každém intervalu $[c_i, c_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.*

Označíme-li $C = r(c)$, $D = r(d)$, pak $C = D$. Označme ještě $C_i = r(c_i)$. Označme $k_i = \{r(t); t \in [c_i, c_{i+1}]\}$ hladké části. Řekneme, že k_i, k_{i+1} jsou souhlasně orientované, pokud bod C_{i+1} je koncový bod jedné z nich a počáteční té druhé. Orientujme nyní nějakou k_i pořadím bodů C_i, C_{i+1} . Vedlejší, k_{i-1}, k_{i+1} orientujme souhlasně s k_i a tak pokračujeme. Nakonec jsme zorientovali celé k .

Snadno je vidět, že orientaci uzavřené křivky můžeme zadat pomocí tří na ní ležících bodů A, B, C tím, že zadáme pořadí těchto bodů, např. ABC . Pišme pak k_{ABC} .

PŘÍKLAD 13.2. *Vypočítejte $\int_{k_{ABC}} xy dx + y dy$, kde k_{ABC} je uzavřená orientovaná křivka spojující úsečkami body $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [0, 1]$.*

Řešení. Křivka je znázorněná na obrázku 1. Červená křivka je daná orientovaná uzavřená křivka (orientace je v pořadí A, B, C) a modré vektory jsou zadané pole. Na dolní úsečce je pole nulové, tak tam žádné modré vektory nejsou. Křivka se



OBRÁZEK 1. Práce v silovém poli.

nám rozpadne na tři hladké křivky (úsečky)

$$k_1 : x = t, \quad t \in [0, 1],$$

$$y = 0,$$

$$k_2 : x = 1 - t, \quad t \in [0, 1],$$

$$y = t,$$

$$k_3 : x = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$y = 1 - t.$$

Tedy

$$\int_{k_1} xydx + ydy = \int_0^1 t \cdot 0 + 0 = 0,$$

$$\int_{k_2} xydx + ydy = \int_0^1 (1-t)t(-1) + (1-t) dt = -\frac{1}{6}, \quad \int_{k_3} xydx + ydy = \int_0^1 0 + 0 = 0.$$

Tedy

$$\int_k xydx + ydy = \int_{k_1} xydx + ydy + \int_{k_2} xydx + ydy + \int_{k_3} xydx + ydy = -\frac{1}{6}.$$

□

PŘÍKLAD 13.3. *Nechť $\alpha > 0$. Vypočítejte $\int_{k_\alpha} 2xdx + 2ydy$, kde $k_\alpha = k_{ABC}$ je uzavřená orientovaná křivka spojující body $A = [0, 0], B = [1, 1], C = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ parametricky*

$$\begin{aligned} k_1 : x &= t, & t &\in [0, 1], \\ y &= t^\alpha, \\ k_2 : x &= 1 - t, & t &\in [0, 1], \\ y &= 1 - t. \end{aligned}$$

Řešení. Jedná se o nekonečně mnoho křivek pro různá α . Pro několik α jsou zobrazeny na obrázku 2. Pro $\alpha = 0.2$ je zobrazena pomocí zelených vektorů orientace. Tedy

$$\begin{aligned} \int_{k_\alpha} 2xdx + 2ydy &= \int_0^1 2t + 2t^\alpha \cdot \alpha t^{\alpha-1} dt + \int_0^1 2(1-t)(-1) + (1-t)(-1) dt, \\ &= \int_0^1 2t + 2\alpha t^{2\alpha-1} dt + 2 \int_0^1 2t - 2 dt = [t^2 + t^{2\alpha} + 2(t^2 - 2t)]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

□

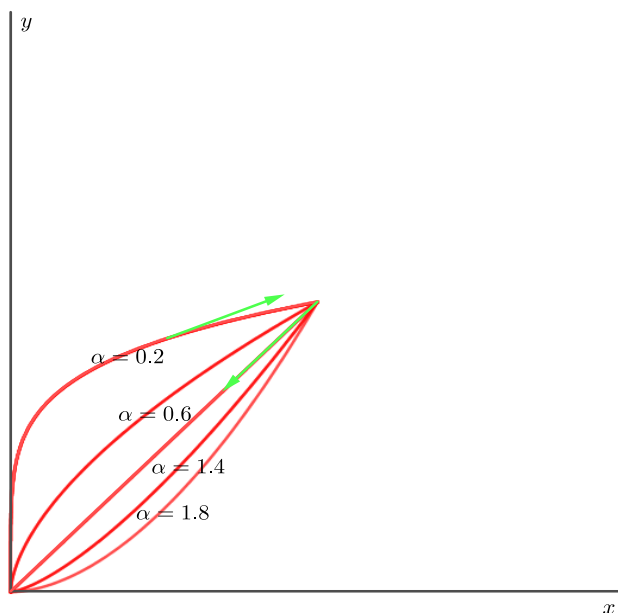
2. Greenova věta

Nejprve si promluvíme o orientaci. Základním kamenem je orientace vektorového prostoru. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ a buď $\mathfrak{B}$ množina všech bází $\mathbb{R}^3$. Každé bázi $B = [u, v, w]$, kde $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3), w = (w_1, w_2, w_3)$, můžeme přiřadit její determinant

$$\det(B) := \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Protože jde o bázi, determinant není roven nule. Je tedy buď $\det(B) > 0$ nebo $\det(B) < 0$. Množina všech bází se nám tím rozpadne na dvě třídy, ty s kladným determinanem a ty se záporným determinanem. Jednu z těchto tříd označíme za kladnou a tím jsme zvolili orientaci prostoru $\mathbb{R}^3$. Je zvykem volit za kladnou tu třídu, pro kterou je determinant kladný. Takovým bázím budeme říkat pravotočivé báze či pravotočivé systémy. Uvažujme nyní křivku k ve smyslu definice 13.1 (představujme si třeba elipsu, trojúhelník, ...). Ta nám rozdělí rovinu na dvě části, vnitřek Ω křivky k a její vnějšek, tj. ta neomezená část. Volbou normály k Ω (tj. zvolíme buď vektor $(0, 0, 1)$ či $(0, 0, -1)$) orientujeme oblast Ω . Označme $e_3 = (0, 0, 1)$. Budeme říkat, že Ω je kladně orientovaná, pokud zvolíme vektor e_3 za kladnou orientaci.

Křivka k nemá obecně tečnu ve všech svých bodech, existuje ale maximálně konečná množina bodů, ve kterých tečna není. Hladkým bodem nazveme bod, ve kterém tečna existuje.



OBRÁZEK 2. Práce v silovém poli.

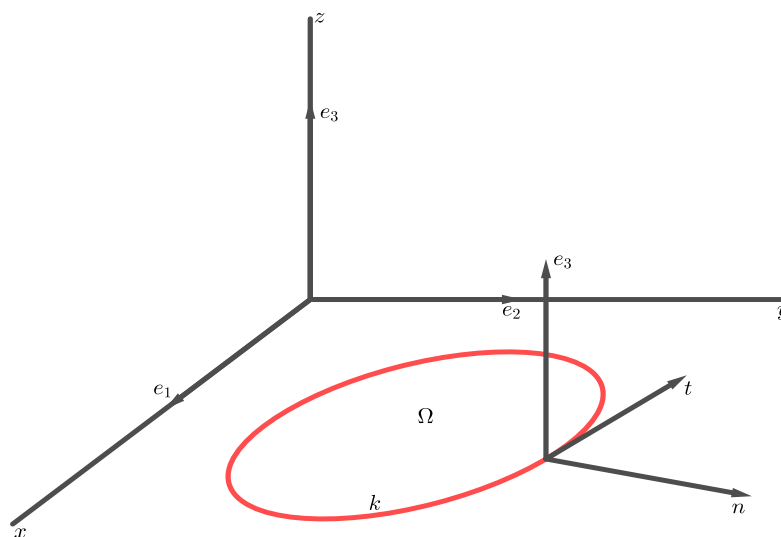
DEFINICE 13.4. *Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^2$ kladně orientovaná a nechť její hranice k je uzavřená křivka k ve smyslu definice 13.1. Orientujme nějak křivku k pomocí tečných vektorů. Říkáme, že křivku k je souhlasně orientovaná s Ω , pokud ve všech hladkých bodech křivky k vektory $[n, t, e_3]$ tvoří pravotočivý systém (n je jednotkový vektor vnější normály).*

Podívejme se, co to znamená prakticky. Viz obrázek 3. Aby byla báze $[n, t, e_3]$ kladná, musíme vektor t orientovat "proti" směru hodinových ručiček, pokud se na oblast Ω díváme "shora", tj. proti vektoru e_3 . Jinak by byl $\det[n, -t, e_3]$ záporný. Máme-li tedy oblast Ω v rovině, tak kladně orientovanou hranici poznáme tak, že jsme křivku proběhli "proti směru chodu" hodinových ručiček.

Nyní si vyslovíme Greenovu větu. Převádí křivkový integrál přes hranici k na dvojný integrál přes oblast Ω .

VĚTA 13.5. *Nechť Ω je kladně orientovaná oblast se souhlasně orientovanou hranicí $k = \partial\Omega$. Nechť je dáno hladké pole $f(x, y), g(x, y)$. Pak*

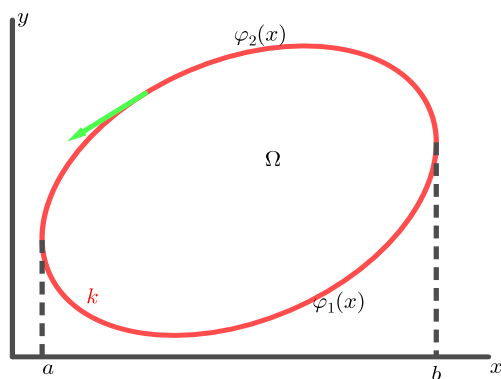
$$\int_{\partial\Omega} f(x, y)dx + g(x, y)dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$



OBRÁZEK 3. Souhlasná orientace hranice.

Důkaz. Důkaz provedeme pouze ve speciálním případě pro konvexní oblast s hladkou hranicí (konvexní znamená, že s libovolnými dvěma body $A, B \in \Omega$ tam leží celá úsečka s koncovými body A, B). Takovou nějakou oblast si namalujeme na obrázku 4. Zelený vektor dává orientaci. Označme ještě k_1 "dolní" část hranice, k_2 horní. Nyní počítejme.

$$\begin{aligned} I_1 &:= \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b [f(x, y)]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx = \int_a^b (f(x, \varphi_2(x)) - f(x, \varphi_1(x))) dx. \end{aligned}$$



OBRÁZEK 4. Obrázek k důkazu Greenovy věty.

Dále počítejme (pozor na opačnou orientaci k_2)

$$\begin{aligned} \int_k f(x, y) dx &= \int_{k_1} f(x, y) dx + \int_{k_2} f(x, y) dx = \begin{vmatrix} x = t & x = t \\ y = \varphi_1(t) & y = \varphi_2(t) \\ dx = dt & dx = dt \end{vmatrix} \\ &= \int_a^b f(t, \varphi_1(t)) dt - \int_a^b f(t, \varphi_2(t)) dt = -I_1. \end{aligned}$$

Tedy

$$- \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy dx = \int_k f(x, y) dx.$$

Analogicky můžeme dokázat

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) dy dx = \int_k f(x, y) dy,$$

což dohromady dává

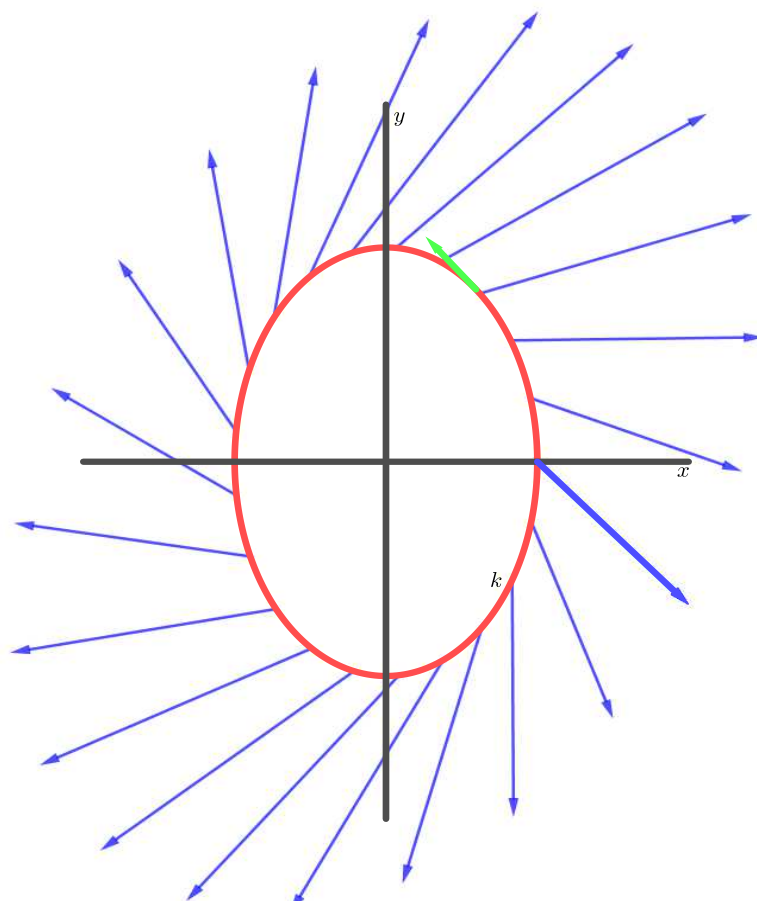
$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

□

PŘÍKLAD 13.6. *Nechť k je kladně orientovaná uzavřená křivka $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Spočítejte*

$$\int_k (x + y) dx - (x - y) dy.$$

Řešení. Křivka je namalovaná na obrázku 5. Zelený vektor je orientace a modré vektory jsou zadané vektorové pole. Podle Greenovy věty je



OBRÁZEK 5. Obrázek ke Greenově větě.

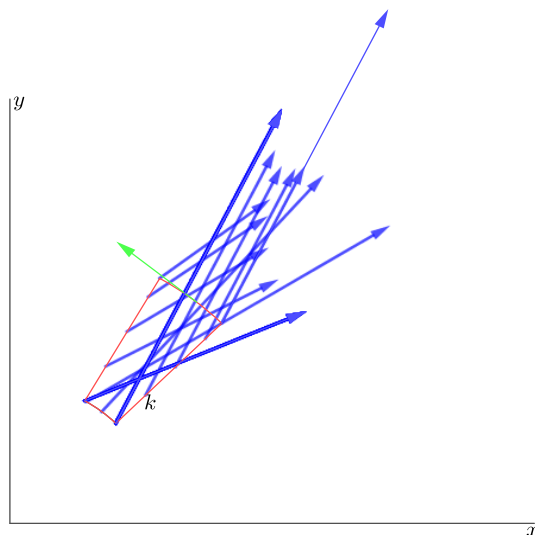
$$\begin{aligned}
\int_k (x+y)dx - (x-y)dy &= \int_k (x+y)dx + (y-x)dy \\
&= \iint_M \left(\frac{\partial(y-x)}{\partial x} - \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \right) dxdy = \iint_M (-1-1) dxdy \\
&= -2 \iint_M dxdy = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 ab \varrho d\varrho d\varphi = -2\pi ab.
\end{aligned}$$

□

PŘÍKLAD 13.7. *Nechť k je kladně orientovaná hranice oblasti $M = \{[x, y]; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$. Spočítejte*

$$\int_k \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy.$$

Řešení. Křivka je namalovaná na obrázku 6. Zelený vektor je orientace a modré vektory jsou zadané vektorové pole. Spočítejme



OBRÁZEK 6. Obrázek ke Greenově větě.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) &= \frac{2}{y} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \frac{1}{y} = \frac{2}{x^2 + y^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) &= \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Podle Greenovy věty je

$$\begin{aligned}& \int_k \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy \\&= \iint_M \left(\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dxdy = \iint_M \frac{1}{x^2 + y^2} dxdy \\&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r dr d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_1^2 \frac{1}{r} dr d\varphi \\&= \int_{\pi/4}^{\pi/3} [\ln r]_1^2 d\varphi = \ln 2 [\varphi]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi \ln 2}{12}.\end{aligned}$$

□

Je ovšem možné použít Greenovu větu i na mezikruží či jinou oblast, ze které je vyříznutá díra či několik děr. Musíme si ale uvědomit orientaci hranice. Na obrázku 7 vidíme oblast Ω , která vznikla vyříznutím menší elipsy z větší. Jde nám o orientaci hranice. Část k_1 je stejná jako na obrázku 3. Ale aby byla orientace n, t, e_3 kladná u křivky k_2 , musí vektor t směřovat po směru hodinových ručiček. Prakticky to vidíme na obrázku 8. Jde o oblast se dvěma otvory. Zelené vektory udávají kladnou orientaci. Jako příklad si můžeme spočítat následující.

PŘÍKLAD 13.8. *Nechť k je kladně orientovaná hranice oblasti $M = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq 9, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$. Spočítejte*

$$\int_k y^2 dx + x^2 dy.$$

Řešení. Daná křivka je na obrázku 9. Zelené vektory určují kladnou orientaci. Zřejmě je křivka k složená ze dvou křivek, k_1 a k_2 . Křivka k_1 je kružnice se středem $[0, 0]$ a poloměrem 3. Parametrické rovnice jsou

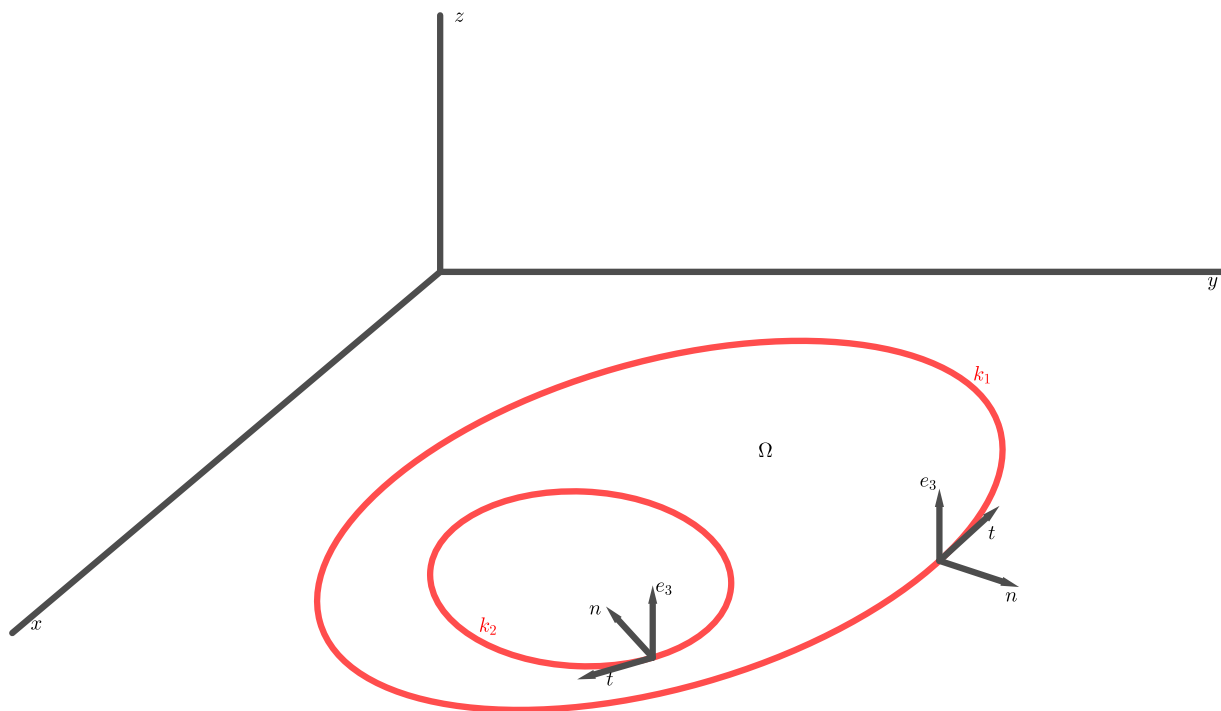
$$\begin{aligned}k_1 : \quad x &= 3 \cos t & dx &= -3 \sin t dt & t &\in [0, 2\pi] \\ y &= 3 \sin t & dy &= 3 \cos t dt.\end{aligned}$$

Tato parametrizace nám proběhne křivku k_1 proti směru hodinových ručiček, čili kladně. Dále křivka k_2 je také kružnice se středem $[1, 0]$ a poloměrem 1, ovšem musíme ji proběhnout po směru hodinových ručiček. To nám udělá následující parametrizace.

$$\begin{aligned}k_2 : \quad x &= 1 + \cos t & dx &= -\sin t dt & t &\in [0, 2\pi] \\ y &= -\sin t & dy &= -\cos t dt.\end{aligned}$$

Potom lze psát

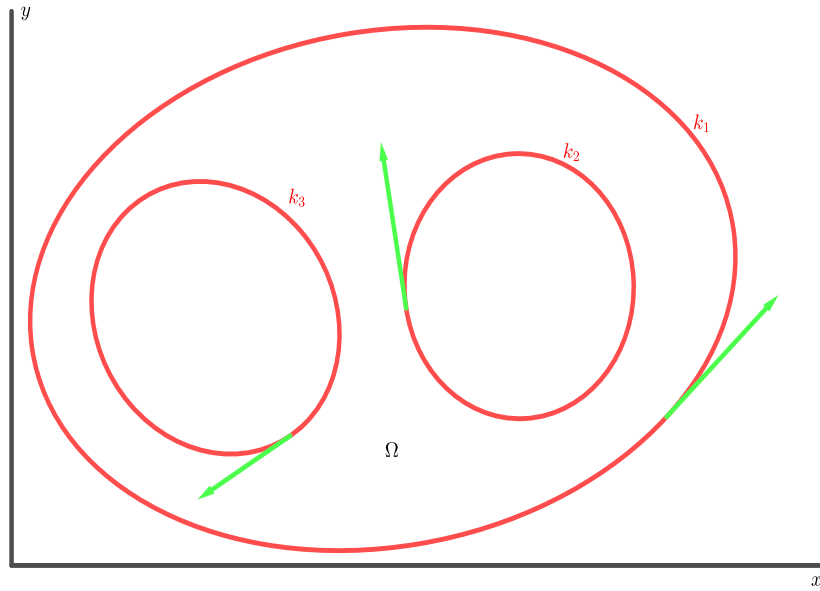
$$\int_k y^2 dx + x^2 dy = \int_{k_1} y^2 dx + x^2 dy + \int_{k_2} y^2 dx + x^2 dy := I_1 + I_2.$$



OBRÁZEK 7. Souhlasná orientace hranice.

Dále

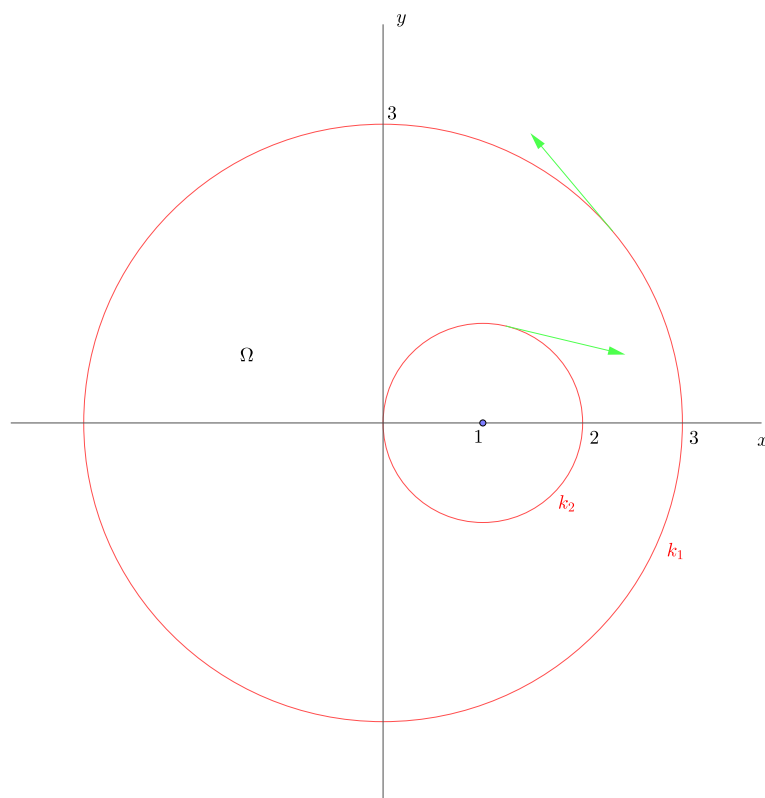
$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{2\pi} (9 \sin^2 t (-3 \sin t) + 9 \cos^2 t (3 \cos t)) dt \\
 &= 27 \int_0^{2\pi} ((1 - \cos^2 t)(-\sin t) + (1 - \sin^2 t)(\cos t)) dt \\
 &= 27 \left\{ - \int_0^{2\pi} \sin t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt + \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt \right\} \\
 &= 27 \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} + \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0.
 \end{aligned}$$



OBRÁZEK 8. Souhlasná orientace hranice.

Další integrál je

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t (-\sin t) + (1 + \cos t)^2 (-\cos t)) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} ((1 - \cos^2 t)(-\sin t) + (1 + 2\cos t + \cos^2 t)(-\cos t)) dt \\
 &= \left\{ -\int_0^{2\pi} \sin t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \cos t dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \cos t dt \right\} \\
 &= \left\{ -\int_0^{2\pi} \sin t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \cos t dt - 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt \right\} \\
 &= \left\{ -\int_0^{2\pi} \sin t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \cos t dt - \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt - \int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt \right\} \\
 &= \left[\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} - \sin t - t - \frac{\sin 2t}{2} - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = -2\pi.
 \end{aligned}$$



OBRÁZEK 9. Souhlasná orientace hranice.

Tedy

$$\int_k y^2 dx + x^2 dy = -2\pi.$$

Daný křivkový integrál ovšem můžeme spočítat pomocí Greenovy věty. Označme

$$\Omega_1 = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq 9\}, \quad \Omega_2 = \{[x, y]; (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Užijeme postupně polární souřadnice $x = 3r \cos \varphi$, $y = 3r \sin \varphi$ a $x = 1+r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Dostaneme

$$\begin{aligned}
 \int_k y^2 dx + x^2 dy &= \iint_{\Omega} (2x - 2y) dx dy = \iint_{\Omega_1} (2x - 2y) dx dy - \iint_{\Omega_2} (2x - 2y) dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 2(r \cos \varphi - r \sin \varphi) r dr d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^1 2((1+r \cos \varphi) - r \sin \varphi) r dr d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} r^3 (\cos \varphi - \sin \varphi) \right]_{r=0}^3 d\varphi - \int_0^{2\pi} \left[r^2 + \frac{2}{3} r^3 (\cos \varphi - \sin \varphi) \right]_{r=0}^1 d\varphi \\
 &= 18 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi - \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2}{3} (\cos \varphi - \sin \varphi) \right) d\varphi \\
 &= 18 \left[-\sin t - \cos t \right]_0^{2\pi} - \left[t + \frac{2}{3} (\sin \varphi + \cos \varphi) \right]_0^{2\pi} \\
 &= 18 \left[-\sin t - \cos t \right]_0^{2\pi} - \left[t \right]_0^{2\pi} + \frac{2}{3} \left[\sin \varphi + \cos \varphi \right]_0^{2\pi} = -2\pi.
 \end{aligned}$$

□

3. Fyzika a Greenova věta

Zatím jsme uvažovali pouze křivkový integrál jako práci, kterou vykoná pole podél orientované křivky. My si zde popíšeme trochu jinou fyzikální interpretaci. Představme si, že sledujeme proudící kapalinu (třeba vodu) v potoce. Samozřejmě vidíme jen proudící hladinu. Předpokládejme, že se rychlost proudění s časem nemění. Vyberme si bod o souřadnicích $[x, y]$ na hladině a hodme tam zrnko prachu. V momentě, kdy se zrnko začne pohybovat, změříme jeho rychlost. To je vektor o souřadnicích $(f(x, y), g(x, y))$. Tím jsme dostali dvourozměrné pole. To je dvourozměrné rychlostní pole proudící kapaliny. Představme si nějaké takové rychlostní pole. Viz obrázek 10. Fixujme nějaký bod S . Zvolme poloměr r a opišme kružnici k se středem S a poloměrem r . Zvolme si na ní bod $[x, y]$. V tomto bodě uvažujme zadané rychlostní pole $\vec{F} = (f(x, y), g(x, y))$, viz modrá šipka. Vezmeme elementární malý tečný vektor $\vec{ds}$ ve směru tečny ke kružnici v bodě $[x, y]$. To je oranžová šipka. Víme, že projekce $\vec{F}$ do $\vec{ds}$ je dána skalárním součinem $\vec{F} \cdot \vec{ds} = f(x, y)dx + g(x, y)dy$, to je ta zelená šipka. Počítejme nyní, jakou úhlovou rychlostí se pohybuje bod $[x, y]$ kolem S . Jeho rychlost je $v = \vec{F} \cdot \vec{ds}$ a víme už ze střední školy, že úhlová rychlost ω je dána vztahem

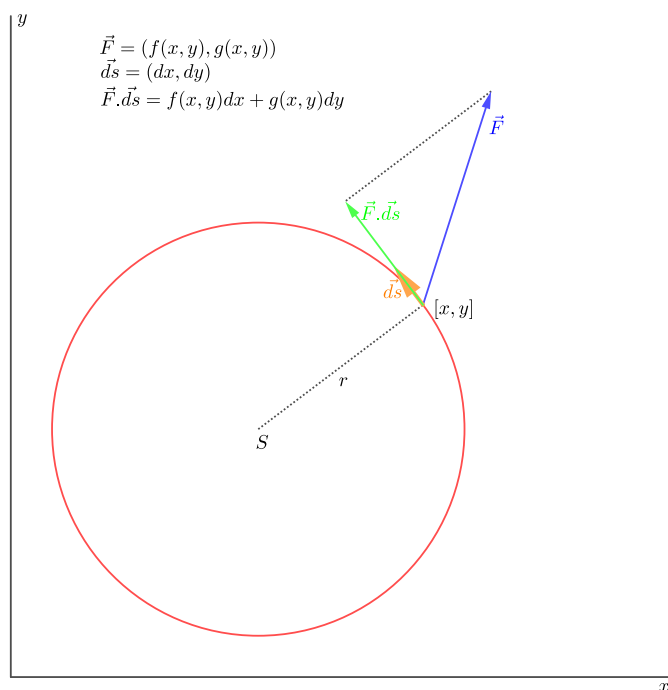
$$\omega(x, y) := \omega = \frac{v}{r}.$$

Tedy

$$\omega(x, y) := \omega = \frac{\vec{F} \cdot \vec{ds}}{r} = \frac{1}{r} (f(x, y)dx + g(x, y)dy).$$

Spočítejme nyní průměrnou úhlovou rychlost přes danou kružnici. Tu dostaneme tak, že posčítáme jednotlivé úhlové rychlosti a vydělíme to délkou kružnice k . Na obrázku 11 vidíme nějaké modré rychlostní pole a jeho projekce do tečných vektorů, to jsou zelené vektory. Sečtením zelených vektorů a vydělíme to délkou kružnice k dostaneme (místo konečné ho součtu je zde integrál)

$$\omega_{\text{průměr}} := \frac{1}{2\pi r} \frac{1}{r} \int_k f(x, y)dx + g(x, y)dy = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi r^2} \int_k f(x, y)dx + g(x, y)dy.$$



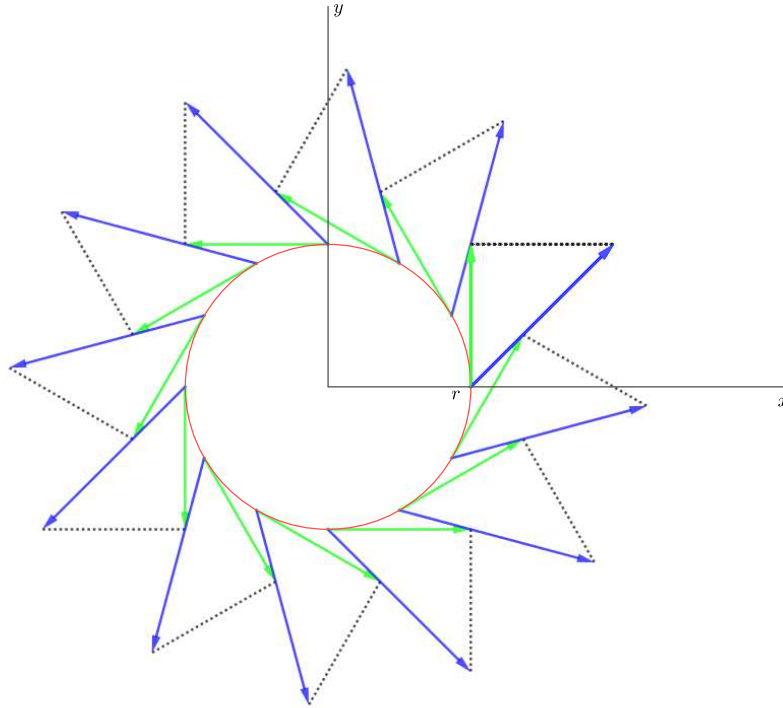
OBRÁZEK 10. Rotace pole.

Veličina $\omega_{\text{průměr}}$ ale ve skutečnosti říká, jak moc se dané pole otáčí kolem bodu S . Tato veličina se ale dá pomocí Greenovy věty spočítat následovně. Označme $B(S, r)$ kruh o poloměru r a se středem S . Pak

$$\begin{aligned}
 \omega_{\text{průměr}} &:= \frac{1}{2} \frac{1}{\pi r^2} \int_k f(x, y)dx + g(x, y)dy \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(S, r)} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Ozpečme na moment souřadnice bodu $S = [x_0, y_0]$. Pokud začneme jít s poloměrem r k nule, můžeme považovat $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ přibližně za konstantní v $B(S, r)$ a tedy

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$



OBRÁZEK 11. Rotace pole.

Pak

$$\begin{aligned}
 \omega_{\text{průměr}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(S,r)} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \\
 &\approx \frac{1}{2} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(S,r)} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\pi r^2} \pi r^2 \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).
 \end{aligned}$$

Z toho vidíme, že výraz $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ nám popisuje míru otáčení pole kolem bodu $[x_0, y_0]$, jinak řečeno popisuje míru rotace. Takže se zavádí označení rotace pole

$$\text{rot} \vec{F}(x_0, y_0) = \text{rot}(f(x_0, y_0)g(x_0, y_0)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

A pro lokální úhlovou rychlost rotace v bodě $[x_0, y_0]$ platí

$$\omega(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \text{rot}(f(x_0, y_0)g(x_0, y_0)).$$

Pole, které má v každém bodě nulovou rotaci, nemá žádné víry a proto se nazývá nevírové pole, viz následující definice.

DEFINICE 13.9. *Nechť $\vec{F}(x, y) = f(x, y)g(x, y)$ je dané rovinné pole. Potom*

$$\text{rot}\vec{F}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Pokud $\text{rot}(\vec{F}(x, y)) = 0$ pro každé $[x, y]$, nazýváme pole $\vec{F}(x, y)$ nevírové.

Greenovu větu pak můžeme přepsat do tvaru

$$\int_k \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Omega} \text{rot}\vec{F}(x, y) dx dy.$$

Takto to píšou fyzikové.

4. Nezávislost integrálu na cestě, potenciál

Jistě si pamatujete už ze základní školy, že potenciální energie tělesa o hmotnosti m ve výšce h nad povrchem Země je dán vzorcem $E = mgh$. Na to, abychom tuto energii získali, je nutné, abychom těleso do té výšky vytáhli. Na obrázku 12 je vidět několik křivek, po kterých jsme vytáhli těleso do výšky h . Potřebná energie je mgh , což je ale výraz, který vůbec nezávisí na tom, po které křivce jsme těleso vytáhli. Uvědomme si, že energie je rovna práci, kterou na vytažení vykonáme v silovém poli Země. To je dáno $\vec{F} = (0, -mg)$. Práce A se spočítá jako křivkový integrál

$$A_1 = \int_{k_1} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad A_2 = \int_{k_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad A_3 = \int_{k_3} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

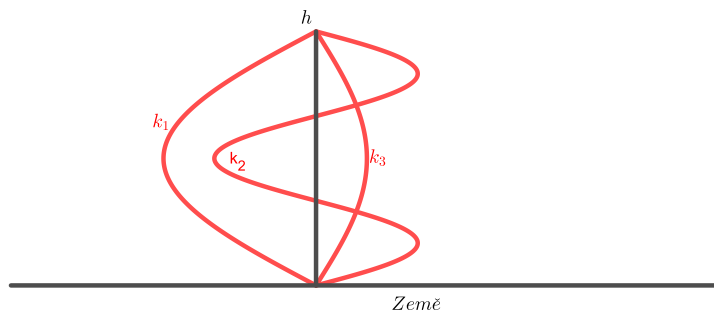
Protože energie mgh se rovná práci, je $A_1 = A_2 = A_3 = mgh$. Čili nezávisí na křivce, po které integrujeme. Výsledek závisí jen na výšce h , tj. na počátečním bodu a koncovém bodu.

Představme si, že např. po křivce k_1 vytáhneme těleso do výšky h a po křivce k_2 jej spustíme dolů. Nejprve vykonáme práci A_1 a potom zase pole koná práci A_2 , čili vykonáme práci $-A_2$. Protože $A_1 = A_2$, je celková práce rovna nule. To by šlo také formulovat takto: v homogenním tíhovém poli Země je každý křivkový integrál přes uzavřenou křivku nulový.

V příkladu 13.3 jsme viděli, že integrál přes uzavřenou křivku k_α byl vždy nulový. To není náhoda. Dalo by se vypočítat, že vyjde nula pro libovolnou uzavřenou křivku. Ukážeme si názorný příklad.

Je dáno pole $(2xy, x^2 + y^2)$. Nechť $\alpha > 0$ a buď k_α křivka $x = t, y = t^\alpha, t \in [0, 1]$ orientovaná od $C = [0, 0]$ do $D = [1, 1]$. Vypočítejme

$$\int_{k_{CD}} 2xy dx + (x^2 + y^2) dy.$$



OBRÁZEK 12. Potenciál nad povrchem Země.

Zřejmě je

$$\begin{aligned}
 \int_{k_{CD}} 2xydx + (x^2 + y^2)dy &= \int_0^1 (2t t^\alpha + (t^2 + t^{2\alpha} \alpha t^{\alpha-1})) dt \\
 &= \int_0^1 ((2 + \alpha)t^{\alpha+1} + \alpha t^{3\alpha-1}) dt = \left[\frac{2 + \alpha}{\alpha + 2} t^{\alpha+2} + \frac{\alpha}{3\alpha} t^{3\alpha} \right]_0^1 \\
 &= \left[t^{\alpha+2} + \frac{1}{3} t^{3\alpha} \right]_0^1 = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Vidíme, že výsledek nezávisí na α .

Můžeme učinit závěr, že pro některá pole práce (čili křivkový integrál) závisí na počátečním a koncovém bodě a na ničem jiném, a pro některá pole závisí práce na počátečním a koncovém bodě a také na křivce, po které integrujeme.

Proč to tak je? Jsme schopni odhalit nějaký hlubší argument? Zkusme to zcela obecně. Buď k_{CD} orientovaná křivka, $k = (x(t), y(t))$, $t \in [c, d]$, $[x(c), y(c)] = [0, 0]$

a $[x(d), y(d)] = [1, 1]$. Pak

$$\begin{aligned} \int_{k_{CD}} 2xydx + (x^2 + y^2)dy &= \int_c^d (2x(t)y(t)x'(t) + (x^2(t) + y^2(t))y'(t))dt \\ &= \int_c^d (x^2(t)y(t) + \frac{1}{3}y^3(t))' dt = \left[x^2(t)y(t) + \frac{1}{3}y^3(t) \right]_c^d \\ &= \left(x^2(d)y(d) + \frac{1}{3}y^3(d) \right) - \left(x^2(c)y(c) + \frac{1}{3}y^3(c) \right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Takže jsme ukázali, že tento integrál závisí jenom na počátečním a koncovém bodě, ne už na křivce, po které integrujeme.

Pokud napíšeme $x(t) = x$, $y(t) = y$, $x'(t)dt = dx$, $y'(t)dt = dy$, lze psát

$$2xydx + (x^2 + y^2)dy = \frac{\partial(x^2y + \frac{1}{3}y^3)}{\partial x}dx + \frac{\partial(x^2y + \frac{1}{3}y^3)}{\partial y}dy$$

a tedy $2xydx + (x^2 + y^2)dy$ je totální diferenciál funkce $x^2y + \frac{1}{3}y^3$. Předchozí výpočet jsme pak mohli napsat takto:

$$\int_{k_{CD}} 2xydx + (x^2 + y^2)dy = \left[x^2y + \frac{1}{3}y^3 \right]_{[0,0]}^{[1,1]} = \frac{4}{3}.$$

Funkce $x^2y + \frac{1}{3}y^3$ se nazývá potenciálem pole $(2xy, x^2 + y^2)$ a samotné pole se nazývá konzervativním či potenciálním.

DEFINICE 13.10. Buď $(f(x, y), g(x, y))$, resp. $(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$, pole v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ resp. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω otevřená. Nechť existuje funkce $P(x, y)$, resp. $P(x, y, z)$ v Ω taková, že

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = g,$$

resp.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = g, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = h.$$

Pak funkci P nazýváme potenciálem pole (f, g) , resp. (f, g, h) , v Ω a říkáme, že dané pole je potenciální či konzervativní.

VĚTA 13.11. Buď $(f(x, y), g(x, y))$, resp. $(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$, potenciální pole v $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, resp. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ s potenciálem P . Buď k_{CD} libovolná orientovaná křivka ležící v Ω , která spojuje body C, D orientovaná od C do D . Pak

$$\int_{k_{CD}} f(x, y)dx + g(x, y)dy = P(D) - P(C),$$

resp.

$$\int_{k_{CD}} f(x, y)dx + g(x, y)dy + h(x, y)dz = P(D) - P(C).$$

Důkaz. Jen pro rovinný případ. Nechť k_{CD} je dána parametricky $x(t), y(t)$, $t \in [c, d]$, $C = [x(c), y(c)]$, $D = [x(d), y(d)]$. Počítejme

$$\frac{d}{dt}P(x(t), y(t)) = \frac{\partial P}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial P}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

a protože

$$\frac{\partial P}{\partial x} = f, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = g,$$

máme

$$\frac{d}{dt}P(x(t), y(t)) = f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t).$$

Potom platí

$$\begin{aligned} \int_{k_{CD}} f(x, y)dx + g(x, y)dy &= \int_c^d f(x(t), y(t))x'(t) + g(x(t), y(t))y'(t) dt \\ &= \int_c^d \frac{d}{dt}P(x(t), y(t))dt = [P(x(t), y(t))]_c^d = P(D) - P(C). \end{aligned}$$

□

Tím jsme dokázali následující větu.

VĚTA 13.12. *Nechť je dáno v nějaké oblasti Ω potenciální pole. Potom pro libovolnou uzavřenou křivku k platí*

$$\int_k f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0.$$

Tato věta platí i naopak a lze tedy vyslovit toto:

VĚTA 13.13. *Nechť je dáno v nějaké oblasti Ω pole. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) $\int_k f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0$ pro každou uzavřenou křivku.
- (ii) Pole je potenciální.

Důkaz. Implikace (ii) $\Rightarrow$ (i) je dokázána ve větě 13.12. Dokážeme opačnou implikaci. Předpokládejme, že pro každou uzavřenou křivku platí

$$\int_k f(t, s)dt + g(t, s)ds = 0.$$

Zvolme $[x_0, y_0] \in \Omega$. Zvolme $[x, y] \in \Omega$ a nechť k je libovolná křivka spojující počáteční bod $[x_0, y_0]$ s koncovým bodem $[x, y]$. Definujme potom

$$P(x, y) = \int_k f(t, s)dt + g(t, s)ds.$$

Pokud si někdo zvolí jinou křivku k_1 s počátečním bodem $[x_0, y_0]$ a koncovým bodem $[x, y]$, tak díky předpokladu (i) máme

$$\int_k f(t, s)dt + g(t, s)ds - \int_{k_1} f(t, s)dt + g(t, s)ds = 0$$

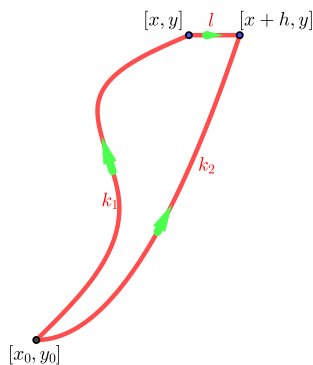
a tedy je

$$\int_k f(t, s)dt + g(t, s)ds = \int_{k_1} f(t, s)dt + g(t, s)ds.$$

Hodnota $F(x, y)$ tedy nezávisí na křivce, ale pouze na počátečním bodu $[x_0, y_0]$ a koncovém bodu $[x, y]$. Je tedy dobře definovaná.

Vezmeme nyní body $[x, y]$ a $[x + h, y]$. Nechť k_1 je křivka s počátečním bodem $[x_0, y_0]$ a koncovým bodem $[x, y]$, k_2 s počátečním bodem $[x_0, y_0]$ a koncovým bodem $[x + h, y]$ a l buď úsečka s počátečním bodem $[x, y]$ a koncovým bodem $[x + h, y]$. Viz obrázek 13. Zelené šipky udávají orientaci. Počítejme

$$\frac{1}{h}(P(x + h, y) - P(x, y)) = \frac{1}{h} \left(\int_{k_2} f(t, s)dt + g(t, s)ds - \int_{k_1} f(t, s)dt + g(t, s)ds \right).$$



OBRÁZEK 13. Důkaz existence potenciálu.

Díky předpokladu (i) platí

$$-\int_{k_1} f(t, s)dt + g(t, s)ds + \int_{k_2} f(t, s)dt + g(t, s)ds - \int_l f(t, s)dt + g(t, s)ds = 0,$$

z čehož plyne

$$-\int_{k_1} f(t, s)dt + g(t, s)ds + \int_{k_2} f(t, s)dt + g(t, s)ds = \int_l f(t, s)dt + g(t, s)ds.$$

Potom lze psát

$$\frac{1}{h}(P(x+h, y) - P(x, y)) = \frac{1}{h} \int_l f(t, s)dt + g(t, s)ds.$$

Parametrizace l je $(x+t, y)$, $t \in [0, h]$. Tedy

$$\frac{1}{h}(P(x+h, y) - P(x, y)) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t, y)dt.$$

Na obou stranách nyní přejdeme k limitnímu přechodu pro $h \rightarrow 0$. Víme už dávno, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(P(x+h, y) - P(x, y)) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y).$$

Pokud je h malé, můžeme na intervalu $[0, h]$ považvat hodnotu $f(x+t, y)$ za přibližně konstantní a to rovnou $f(x, y)$. Pravá strana pak vyjde

$$\frac{1}{h} \int_0^h f(x+t, y) dt \approx \frac{1}{h} \int_0^h f(x, y) dt = \frac{1}{h} h f(x, y) = f(x, y).$$

Vyšlo nám tedy

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = f(x, y).$$

Úplně stejně by nám vyšlo

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = g(x, y)$$

a $P(x, y)$ je tedy potenciál zadaného pole.

□

PŘÍKLAD 13.14. *Buď $(2xy, x^2 + y^2)$ pole v rovině. Najděte potenciál.*

Řešení. Musí být $\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$. Tedy

$$P(x, y) = \int 2xy dx = x^2 y + c(y).$$

Dále

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + c'(y) = x^2 + y^2$$

a máme $c'(y) = y^2$, z čehož $c(y) = \frac{1}{3}y^3 + c$. tedy

$$P(x, y) = x^2 y + \frac{1}{3}y^3 + c.$$

□

Předchozí postup nám dost připomíná postup při řešení exaktní diferenciální rovnice. Ono je to v podstatě podobné. Ale jako nemusí být každá rovnice exaktní, nemusí být každé pole potenciální. To se během výpočtu skutečně projeví.

PŘÍKLAD 13.15. *Buď $(2xy, -x^2 + y^2)$ pole v rovině. Najděte potenciál.*

Řešení. Musí být $\frac{\partial P}{\partial x} = 2xy$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2 + y^2$. Tedy

$$P(x, y) = \int 2xy dx = x^2 y + c(y).$$

Dále

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + c'(y) = -x^2 + y^2$$

a máme $c'(y) = 2x^2 + y^2$. Protože $c'(y)$ je pouze funkce y a pravá strana explicitně závisí na x , nelze nikdy tuto rovnici splnit. Z toho vidíme, že dané pole nemá potenciál.

□

Lze ale nějak poznat na daném poli (teď už se omezíme pouze na rovinná pole), zda má potenciál, aniž bychom integrovali? To skutečně jde. Představme si nějaké potenciální pole $(f(x, y), g(x, y))$ s potenciálem $P(x, y)$. Potom

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = g(x, y).$$

Potom

$$\frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Záměnnost parciálních derivací dává

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}.$$

VĚTA 13.16. *Nechť $(f(x, y), g(x, y))$ je pole třídy $C^1(\Omega)$ (tj. funkce $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$ a $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$ jsou spojité funkce v oblasti Ω). Potom platí implikace: Je-li toto pole potenciální, pak $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$.*

Tato věta se dá obrátit, ale pouze na speciálních oblastech. Jde to na tzv. jednoduše souvislých oblastech. To jsou v podstatě oblasti, které nemají díry. Je to např. kruh, obdélník, trojúhelník, vnitřek elipsy atd. Ale není to třeba mezikruží.

VĚTA 13.17. *Nechť $(f(x, y), g(x, y))$ je pole třídy $C^1(\Omega)$, kde Ω je jednoduše souvislá oblast. Potom platí implikace: Je-li $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$ pak toto pole je potenciální.*

Důkaz. Typický příklad jednoduše souvislé oblasti je konvexní oblast. Dokažme to tedy na ukázkou jen pro konvexní oblast. Zvolme k libovolnou uzavřenou křivku v Ω . Protože Ω je konvexní oblast, je celý vnitřek G křivky k podmnožinou Ω a tedy hranice G je tedy pouze k (čili G je jednoduše souvislá). Podle Greenovy věty (viz větu 13.5 - důkaz byl udělán pro konvexní oblasti) dostaneme

$$\int_k f(x, y)dx + g(x, y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

Díky předpokladu $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$ máme

$$\int_k f(x, y)dx + g(x, y)dy = 0.$$

Pro každou uzavřenou křivku k . Podle věty 13.13 je pole $(f(x, y), g(x, y))$ potenciální.

□

Pro oblasti, které nejsou jednoduše souvislé, je to trochu složitější. Jak ukazuje následující příklad, tak obecně neplatí. Vezmeme pole $(f, g) := \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, -\frac{x-y}{x^2+y^2} \right)$ definované v $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$. Přímým výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{x^2 + y^2 - (x+y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} &= -\frac{x^2 + y^2 - (x-y)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Tedy $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$.

Počítejme nyní potenciál.

$$P(x, y) = \int \frac{x+y}{x^2+y^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} + c(y).$$

Dále

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \frac{x}{y^2} + c'(y) = -\frac{x - y}{x^2 + y^2} + c'(y) = -\frac{x - y}{x^2 + y^2}.$$

Tedy $c'(y) = 0$ a lze vzít $c(y) = 0$. Pokud tedy existuje potenciál, je

$$P(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y}.$$

Toto ale není potenciál v Ω . Zvolme pevné $x > 0$. Spočtěme

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0_+} P(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0_+} \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} = \ln x + \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{y \rightarrow 0_-} P(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0_-} \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} = \ln x - \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

Pro $x < 0$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0_+} P(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0_+} \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} = \ln x - \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{y \rightarrow 0_-} P(x, y) &= \lim_{y \rightarrow 0_-} \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} = \ln x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Funkci P tedy nelze spojitě navázat přes $y = 0$.

Nicméně v horní polorovině to potenciál je (a v dolní pochopitelně taky), ale nejde to svázat. Pokud definujeme např.

$$\tilde{P}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} & \text{pro } y > 0, \\ \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} - \pi & \text{pro } y < 0, \\ \ln x + \frac{\pi}{2} & \text{pro } y = 0, x < 0, \end{cases}$$

je toto potenciál v oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus \{[x, y]; x \geq 0, y = 0\}$.

Spočtěme ještě

$$\int_k \frac{x + y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x - y}{x^2 + y^2} dy,$$

kde k je kružnice se středem v počátku a poloměrem 1. Tedy $k : x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t + \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) - \frac{\cos t - \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t - \sin^2 t - \cos^2 t + \cos t \sin t) dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi. \end{aligned}$$

Integrál přes uzavřenou křivku není roven nule. Z toho také vidíme, že nemůže existovat potenciál.

Obrácená věta platí jen pro speciální oblasti. My si uvedeme jen velmi speciální případ.

Poznamenejme, že věty 13.16 a 13.17 se dají vyslovit takto.

VĚTA 13.18. *Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast a $(f(x, y), g(x, y))$ buď pole. Pak toto pole je potenciální právě když je nevírové.*

PŘÍKLAD 13.19. *Uvažujme nyní gravitační pole v rovině s centrem $[0, 0]$. Je známo, že toto pole se dá zapsat $(-\kappa M x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}, -\kappa M y(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}})$. Jakou rychlostí musíme vystřelit těleso o hmotnosti m ze vzdálenosti R od bodu $[0, 0]$, aby se už nevrátilo?*

Řešení. Snadno se ověří, že funkce $P(x, y) = \kappa M (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ je potenciál našeho pole. Tedy energii potřebnou k tomu, abychom přemístili naše těleso ze vzdálenost R od centra gravitace do nekonečné vzdálenosti, je $m(P(R, 0) - P(\infty, 0)) = \frac{\kappa M m}{R}$. Ale to musí být rovno kinetické energii tohoto tělesa ve vzdálenosti R , tj. $\frac{1}{2}mv^2$. Tedy

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\kappa M m}{R},$$

z čehož máme tzv. druhou kosmickou rychlost $v = \sqrt{\frac{2\kappa M}{R}}$.

□

Plošné integrály 1. druhu - bonus pro zvědavce

1. Plošný integrál 1. druhu

DEFINICE 14.1. Množina $L \subset \mathbb{R}^3$ se nazývá hladký list, pokud existuje oblast $\Omega \in \mathbb{R}^2$ s hladkou hranicí $\partial\Omega$ a tři funkce dvou proměnných $x(u, v), y(u, v), z(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takové, že

- (i) $L = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (u, v) \in \Omega \cup \partial\Omega\}$,
- (ii) parciální derivace všech funkcí x, y, z podle všech proměnných jsou spojité funkce v $\mathbb{R}^2$,
- (iii) tečné vektory $\mathbf{t}_u(u, v) := \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$ a $\mathbf{t}_v(u, v) := \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ jsou lineárně nezávislé pro každé $(u, v) \in \Omega \cup \partial\Omega$.

Připomeňme ještě, že $\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v)$ značí vektorový součin vektorů $\mathbf{t}_u(u, v), \mathbf{t}_v(u, v)$, tj.

$$\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v) = \left(\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right)$$

a $\|\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v)\|$ je velikost tohoto vektoru, tj.

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v)\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}. \end{aligned}$$

DEFINICE 14.2. Nechť $L \subset \mathbb{R}^3$ je hladký list a $x(u, v), y(u, v), z(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je jeho parametrizace. Nechť je dána funkce $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Potom definujeme plošný integrál 1. druhu předpisem

$$\iint_L f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\mathbf{t}_u(u, v) \times \mathbf{t}_v(u, v)\| du dv.$$

PŘÍKLAD 14.3. Je dáno číslo $a > 0$. Vypočítejte

$$\iint_L z \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma,$$

kde $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$.

Řešení. Parametrizujme polosféru (v podstatě pomocí sférických souřadnic s pevným poloměrem a).

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \sin \nu, & \varphi &\in [0, 2\pi], \\ y &= a \sin \varphi \sin \nu, & \nu &\in [0, \frac{\pi}{2}], \\ z &= a \cos \nu. \end{aligned}$$

Dále jsou derivace (tečné vektory)

$$t_1 = a(-\sin \varphi \sin \nu, \cos \varphi \sin \nu, 0),$$

$$t_2 = a(\cos \varphi \cos \nu, \sin \varphi \cos \nu, -\sin \nu).$$

Potom $t_1 \times t_2 = a^2(-\cos \varphi \sin^2 \nu, -\sin \varphi \sin^2 \nu, -\sin \nu \cos \nu)$ a

$$\|t_1 \times t_2\| = a^2 \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^4 \nu + \sin^2 \varphi \sin^4 \nu + \sin^2 \nu \cos^2 \nu} = a^2 \sin \nu.$$

Potom

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos \nu \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \nu + a^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \nu} a^2 \sin \nu \, d\varphi \, d\nu \\ &= a^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \nu \sqrt{\sin^2 \nu} \sin \nu \, d\varphi \, d\nu = a^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \nu \sin^2 \nu \, d\varphi \, d\nu \\ &= 2\pi a^4 \left[\frac{1}{3} \sin^3 \nu \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \pi a^4. \end{aligned}$$

□

Aplikace plošného integrálu 1. druhu

Nechť je dán list L s plošnou hustotou $\varrho(x, y, z)$.

1. Hmotnost plochy

Hmotnost je dána vzorečkem

$$m = \iint_L \varrho(x, y, z) d\sigma.$$

PŘÍKLAD 15.1. *Je dáno číslo $a > 0$. Vypočítejte hmotnost povrchu koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, je-li hustota $\varrho(x, y, z) = x^2 y^2$.*

Řešení. Parametrizujme sféru (v podstatě pomocí sférických souřadnic s pevným poloměrem a).

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \sin \nu, & \varphi &\in [0, 2\pi], \\ y &= a \sin \varphi \sin \nu, & \nu &\in [0, \pi], \\ z &= a \cos \nu. \end{aligned}$$

Dále jsou derivace (tečné vektory)

$$\begin{aligned} t_1 &= a(-\sin \varphi \sin \nu, \cos \varphi \sin \nu, 0), \\ t_2 &= a(\cos \varphi \cos \nu, \sin \varphi \cos \nu, -\sin \nu). \end{aligned}$$

Potom $t_1 \times t_2 = a^2(-\cos \varphi \sin^2 \nu, -\sin \varphi \sin^2 \nu, -\sin \nu \cos \nu)$ a

$$\|t_1 \times t_2\| = a^2 \sqrt{\cos^2 \varphi \sin^4 \nu + \sin^2 \varphi \sin^4 \nu + \sin^2 \nu \cos^2 \nu} = a^2 \sin \nu.$$

Potom

$$\begin{aligned}
 m &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (a \cos \varphi \sin \nu)^2 (a \sin \varphi \sin \nu)^2 a^2 \sin \nu d\varphi d\nu \\
 &= a^6 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \sin^5 \nu d\varphi d\nu = a^6 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^5 \nu d\nu \\
 &= a^6 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \nu)^2 \sin \nu d\nu \\
 &= a^6 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos^2 2\varphi}{4} d\varphi \int_1^{-1} (1 - t^2)^2 (-dt) \\
 &= \frac{1}{2} a^6 \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_{-1}^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt \\
 &= \frac{1}{2} a^6 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi \cdot 2 \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt \\
 &= \frac{1}{2} a^6 \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right]_0^{2\pi} \left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{2} a^6 \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{4}{15} \pi a^6.
 \end{aligned}$$

□

2. Velikost plochy

Položíme-li v předchozím vzorci $\varrho(x, y, z) = 1$, dostaneme plošný obsah listu

$$S = \iint_L d\sigma.$$

PŘÍKLAD 15.2. *Vypočítejte povrch pláště kuželové plochy s poloměrem R a výškou H (bez podstavy).*

Řešení. Parametrizujme plochu (v podstatě pomocí cylindrických souřadnic).

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi, & \varphi &\in [0, 2\pi], \\
 y &= r \sin \varphi \sin \nu, & r &\in [0, R], \\
 z &= \frac{H}{R} r.
 \end{aligned}$$

Dále jsou derivace (tečné vektory)

$$\begin{aligned}
 t_1 &= (\cos \varphi, \sin \varphi, \frac{H}{R}), \\
 t_2 &= r(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).
 \end{aligned}$$

Potom $t_1 \times t_2 = r(-\frac{H}{R} \cos \varphi, -\frac{H}{R} \sin \varphi, 1)$ a

$$\|t_1 \times t_2\| = r \sqrt{\frac{H^2}{R^2} \cos^2 \varphi + \frac{H^2}{R^2} \sin^2 \varphi + 1} = \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{R} r.$$

Potom

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{R} r dr d\varphi = \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{R} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\varphi = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}.$$

□

3. Těžiště plochy

Statické momenty jsou dány vzorečky

$$S_{yz} = \iint_L x \varrho(x, y, z) d\sigma, \quad S_{xz} = \iint_L y \varrho(x, y, z) d\sigma, \quad S_{xy} = \iint_L z \varrho(x, y, z) d\sigma.$$

Potom

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m} \right],$$

kde m je hmotnost listu.

PŘÍKLAD 15.3. Je dáno číslo $a > 0$. Vypočítejte těžiště plochy kde $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq ax\}$.

Řešení. Parametrizace je

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & \varphi &\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ y &= r \sin \varphi, & r &\in [0, a \cos \varphi], \\ z &= r. \end{aligned}$$

Dále jsou derivace (tečné vektory)

$$\begin{aligned} t_1 &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 1), \\ t_2 &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Potom $t_1 \times t_2 = (-r \cos \varphi, -r \sin \varphi, r)$ a $\|t_1 \times t_2\| = \sqrt{2} r$. Počítejme nyní statické momenty a hmotnost.

$$\begin{aligned} m &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} \sqrt{2} r dr d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \varphi d\varphi = \sqrt{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos \varphi}{2} d\varphi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \left[\varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{yz} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} r \cos \varphi \sqrt{2} r dr d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \left[\frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \pi a^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{xz} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} r \sin \varphi \sqrt{2} r dr d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \left[\frac{\cos^4 \varphi}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{xy} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \varphi} r \sqrt{2} r dr d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3 \int_0^1 (1 - t^2) dt \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3 \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{9} a^3.
\end{aligned}$$

Souřadnice těžiště pak jsou

$$\begin{aligned}
T_x &= \frac{S_{yz}}{m} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{8} \pi a^3}{\frac{\sqrt{2}}{4} \pi a^2} = \frac{a}{2}, \\
T_y &= \frac{S_{xz}}{m} = \frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{4} \pi a^2} = 0, \\
T_z &= \frac{S_{xy}}{m} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{9} a^3}{\frac{\sqrt{2}}{4} \pi a^2} = \frac{16}{9\pi} a.
\end{aligned}$$

Tedy $T = (\frac{1}{2}a, 0, \frac{16}{9}\pi^{-1}a)$.

□

4. Momenty setrvačnosti plochy

Jako obvykle si uvedeme momenty setrvačnosti jenom vzhledem k souřadným osám. Platí

$$\begin{aligned}
J_x &= \iint_L (y^2 + z^2) \varrho(x, y, z) d\sigma, \\
J_y &= \iint_L (x^2 + z^2) \varrho(x, y, z) d\sigma, \\
J_z &= \iint_L (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) d\sigma.
\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 15.4. Jsou dána čísla $0 < b < a$ a ploch (anuloid čili "pneumatika") rovnicí $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$. Vypočítejte její moment setrvačnosti vzhledem k ose z .

Řešení. Parametrizace je dána např.

$$\begin{aligned}
x &= \cos \varphi (a + b \cos \psi), & \varphi &\in [0, 2\pi], \quad \psi \in [0, 2\pi]. \\
y &= \sin \varphi (a + b \cos \psi), \\
z &= b \sin \psi.
\end{aligned}$$

Spočítejme parciální derivace a dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_\varphi(\varphi, \psi) &= (-\sin \varphi (a + b \cos \psi), \cos \varphi (a + b \cos \psi), 0), \\
\mathbf{t}_\psi(\varphi, \psi) &= (-b \cos \varphi \sin \psi, -b \sin \varphi \cos \psi, b \cos \psi).
\end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_\varphi(\varphi, \psi) \times \mathbf{t}_\psi(\varphi, \psi) &= (b \sin^2 \varphi \sin \psi (a + b \cos \psi) + b \cos^2 \varphi \sin \psi (a + b \cos \psi), \\
&\quad b \sin \varphi \cos \psi (a + b \cos \psi), b \cos \varphi \cos \psi (a + b \cos \psi)) \\
&= b(a + b \cos \psi)(\sin \psi, \sin \varphi \cos \psi, \cos \varphi \cos \psi)
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{t}_\varphi(\varphi, \psi) \times \mathbf{t}_\psi(\varphi, \psi)\| &= b(a + b \cos \psi) \sqrt{\sin^2 \psi + (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \cos^2 \psi} \\ &= b(a + b \cos \psi).\end{aligned}$$

Moment setrvačnosti potom je

$$\begin{aligned}S_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi (a + b \cos \psi)^2 + \sin^2 \varphi (a + b \cos \psi)^2) b(a + b \cos \psi) d\varphi d\psi \\ &= b \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + b \cos \psi)^3 d\varphi d\psi = 2\pi b \int_0^{2\pi} (a + b \cos \psi)^3 d\psi \\ &= 2\pi b \int_0^{2\pi} (a^3 + 3a^2 b \cos \psi + 3ab^2 \cos^2 \psi + \cos^3 \psi) d\psi \\ &= 2\pi b \int_0^{2\pi} \left(a^3 + 3a^2 b \cos \psi + 3ab^2 \frac{1 + \cos 2\psi}{2} + \cos \psi (1 - \sin^2 \psi) \right) d\psi \\ &= 2\pi b \left[a^3 \psi + 3a^2 b \sin \psi + \frac{3}{2} ab^2 \left(\psi + \frac{1}{2} \sin 2\psi \right) + \sin \psi - \frac{1}{3} \sin^3 \psi \right]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi^2 ab(2a^2 + 3b^2)\end{aligned}$$

□